

# Primjena informacijsko komunikacijskih tehnologija za optimizaciju rute elektroničkog vozila s ciljem povećanja njegove autonomije

---

Živković, Matija

Master's thesis / Diplomski rad

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Transport and Traffic Sciences / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:119:143000>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom](#).

Download date / Datum preuzimanja: **2024-11-27**



Repository / Repozitorij:

[Faculty of Transport and Traffic Sciences - Institutional Repository](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**FAKULTET PROMETNIH ZNANOSTI**

**Matija Živković**

**PRIMJENA INFORMACIJSKO KOMUNIKACIJSKIH  
TEHNOLOGIJA ZA OPTIMIZACIJU RUTE  
ELEKTRIČNOG VOZILA S CILJEM POVEĆANJA  
NJEGOVE AUTONOMIJE**

**DIPLOMSKI RAD**

**Zagreb, 2015.**

# SAŽETAK

U ovom diplomskom radu obrađen je problem optimizacije rute električnog vozila s ciljem povećanja njegove autonomije. Zbog karakteristika električnog vozila nije dostatno samo promatrati klasične prometne probleme kao što su problem pronalaska najbrže ili najkraće rute, nego je potrebno i pronaći optimalnu rutu s obzirom na trošak energije. Proučena je problematika energetskega usmjeravanja električnih vozila s obzirom na autonomiju baterijskog punjenja u svrhu povećanja radijusa kretanja, koja imaju ograničenu autonomiju kretanja i duže vrijeme punjenja u odnosu na konvencionalna vozila. Prilikom optimizacije rute s ciljem pronalaska „energetski optimalne rute“ nužno je koristiti podupiruće informacijskih sustave. Zbog ograničenja baterijskog punjenja potrebno je uz optimiziranje troška energije još isplanirati raspored lokacija stanica za punjenje. Za rješavanje problema optimizacije energetske optimalne rute objašnjene su modifikacije postojećih algoritama koji služi za rješavanje pronalaska najkraće rute, kao što su Dijkstra i A\* algoritam.

KLJUČNE RIJEČI: električno vozilo; energetski optimalna ruta; autonomija električnog vozila

# SUMMARY

In this final paper we have described path optimization problem of the electrical vehicle with aim towards increasing its autonomy. Because of the characteristics of electrical vehicle we have to observe not only classical traffic problems like finding of the shortest or the fastest path but also finding of the energy consumption optimal path. We have studied the matter of routing electrical vehicles in regard towards autonomy of battery charge and with aim towards increasing movement radius, because of all limits which electrical vehicles have (limited movement autonomy and longer charge time) in comparison with conventional vehicles. Because of the limitations of the battery charges, it is necessary to optimize costs of energy and to plan the locations of the recharge stations. In order to solve optimization problem of the energy optimal path, we have described modification of the existing algorithms for the shortest path, Dijkstra and A\* algorithm.

KEY WORDS: Electrical vehicles, energy optimal path, autonomy of electrical vehicles

Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet prometnih znanosti

## **DIPLOMSKI RAD**

**PRIMJENA INFORMACIJSKO KOMUNIKACIJSKIH  
TEHNOLOGIJA ZA OPTIMIZACIJU RUTE  
ELEKTRIČNOG VOZILA S CILJEM POVEĆANJA  
NJEGOVE AUTONOMIJE**

**APPLICATION OF INFORMATION AND  
COMMUNICATION TECHNOLOGIES FOR ENERGY  
EFFICIENT ROUTING FOR ELECTRIC VEHICLE**

Mentor: izv.prof.dr.sc Tonči Carić

Student: univ.bacc.ing.traff. Matija Živković, 0036398433

Zagreb, rujan 2015

# SADRŽAJ

1. Uvod.....	4
2. Analiza sustava napajanja i rada električnih vozila .....	5
2.1 Električna vozila.....	5
2.1.1 Struktura električnih vozila .....	5
2.1.2 Karakteristike električnih vozila.....	7
2.1.3 Potrošnja energije.....	9
2.2 Električni pogonski sustav.....	11
2.2.1 Opis električnog pogonskog sustava.....	11
2.2.2 Istosmjerni motori.....	14
2.2.3 Indukcijski motori.....	15
2.2.4 Reluktantni motori.....	18
2.2.4.1 Osnovna izvedba strukture statora i rotora.....	19
2.2.4.2 Princip rada reluktantnog motora.....	20
2.2.5 Usporedba vrsti elektromotora.....	21
2.3 Skladišta energije.....	23
2.3.1 Elektrokemijske baterije.....	24
2.3.1.1 Izvedba baterije.....	24
2.3.1.2 Energetska korisnost.....	27
2.3.2 Superkondenzatori.....	28
3. Definiranje optimizacijskog problema.....	31
3.1 Trošak energije električnog vozila.....	31
3.1.1 Opći opis vozila u pokretu.....	31
3.1.2 Otpori pri kretanju vozila.....	32
3.1.2.1 Otpor kotrljanja.....	32
3.1.2.2 Aerodinamički otpor.....	34
3.1.2.3 Otpor nagiba.....	35
3.1.2.4 Otpor ubrzanja.....	36

3.2 Formulacija optimizacijskog problema.....	37
3.2.1 Trošak energije električnog vozila.....	38
3.2.1.1 Podjela troška energije.....	38
3.2.1.2 Trošak energije za segment rute.....	39
3.2.2 Problem energetske optimalne rute.....	42
4. Analiza informacijskih sustava potrebnih za optimizaciju ruta električnih vozila.....	43
4.1 Energy Optimal Real-Time Navigation System.....	43
4.1.1 Svrha EORTNS sustava.....	43
4.1.2 Uvod u EORTNS sustav.....	44
4.2 Arhitektura za upravljanje električnim vozilima s obzirom na trošak energije izvora napajanja.....	49
4.3 Sustav Green Navigation.....	50
5. Izbor lokacija stanica za punjenje baterija.....	54
5.1 Matematički modeli.....	54
5.1.1 Planiranje modela optimizacije.....	54
5.1.2 Problem dimenzioniranja i lociranja.....	56
5.1.3 Ograničenja distribucijske mreže.....	56
5.2 Proces planiranja.....	57
5.2.1 Opis procesa.....	57
5.2.2 Analiza slučaja.....	58
6. Analiza algoritama za optimizaciju ruta električnih vozila s ciljem povećanja efikasnosti i autonomije.....	63
6.1 Dijkstrin algoritam.....	63
6.2 Analiza A* algoritma.....	66
6.2.1 Energetske optimalne ruta kao najkraća ruta.....	66
6.2.2 Opis A* algoritma.....	68
6.3 Energetsko-vremenski algoritam.....	71
6.3.1 Problem ograničene optimalne rute.....	71
6.3.2 Opis algoritma uz vremensko ograničenje.....	73

7.Zaključak.....	78
Literatura.....	81
Popis kratica.....	83
Popis slika.....	84
Popis tablica.....	86
Popis oznaka.....	87
Popis relacija.....	92

# 1.Uvod

Ovim diplomskim radom biti će obrađena tema energetske optimizacije rute električnog vozila s obzirom na trošak energije baterijskog punjenja. Zbog karakteristika električnih vozila (ograničena duljina operativnoga upravljanja vozilom s jednim punjenjem baterija, dugačko vrijeme punjenja baterija, sposobnost punjenja baterija tokom kočenja, pražnjenje baterije tokom vožnje i smanjenje životnog vijeka baterije učestalim punjenjem) potrebno je optimizirati rutu vožnje električnog vozila s ciljem povećanja autonomije vozila. S prometnog stajališta nije dostatno promatrati klasični problemi optimizacije rute (pronalaženje najkraće ili najbrže rute), već je nužno s posebnom pozornošću promatrati problem odabira rute uz što manji trošak energije baterijskog punjenja.

Počinja se sa razlaganjem analize sustava napajanja i radom električnih vozila. Opisana je struktura električnog vozila, njegove glavne karakteristike i izvori energije. Objasnjeni su glavne vrste električnog motora koje se koriste za pogon i vrste skladištenja energije. U trećem poglavlju objašnjene su fizikalne pojave koje dovode do potrošnje energije električnog vozila, te je obzirom na matematičke formulacije pojava, definiran problem energetske optimalne rute. U središnjem dijelu rada, prikazan je sustav koji služi u svrhu optimizacije rute i potrebna arhitektura koja se koristi prilikom takve jedne optimizacije. Prikazan je još u tom poglavlju prototipni sustav koji vizualizira energetske izračunatu optimalnu rutu. Matematički modelom obrađen je problem planiranja lokacija za punjenje baterija, te je izbor za smještaj lokacija punjenja ilustrativno objašnjen kroz analizu slučaja. Nadalje, u posljednjem dijelu rada analizirani su klasični algoritmi koji se inače koriste za pronalazak najkraćeg puta, ali su svoju primjenu našli i za rješavanje problema energetske optimalne rute kroz postojeće modifikacije, kako bi se dobio trošak energije na određenom dijelu puta.

Na kraju, unutar zaključka, donosi se sinteza obrađene problematike i nove spoznaje koje su se iskristalizirale tijekom pisanja ovoga diplomskog rada.



## 2. Analiza sustava napajanja i rada električnih vozila

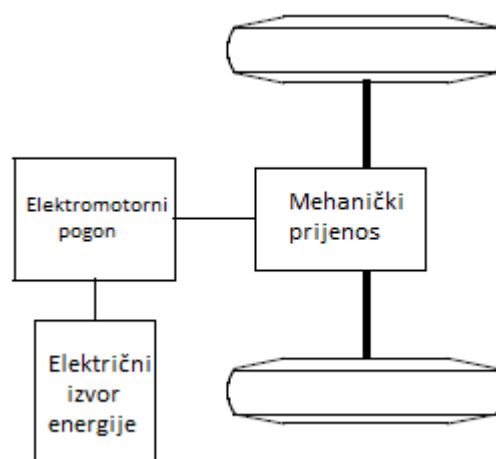
Za razumijevanje problema optimiziranja energetske rute, potrebno je razumjeti principe rada i strukturu električnog vozila, kao i izvore energije koji služe za pokretanje elektromotora.

### 2.1 Električna vozila

U ovoj točki opisati će se struktura električnog vozila, elektropogonski sustav i potrošnja energije.

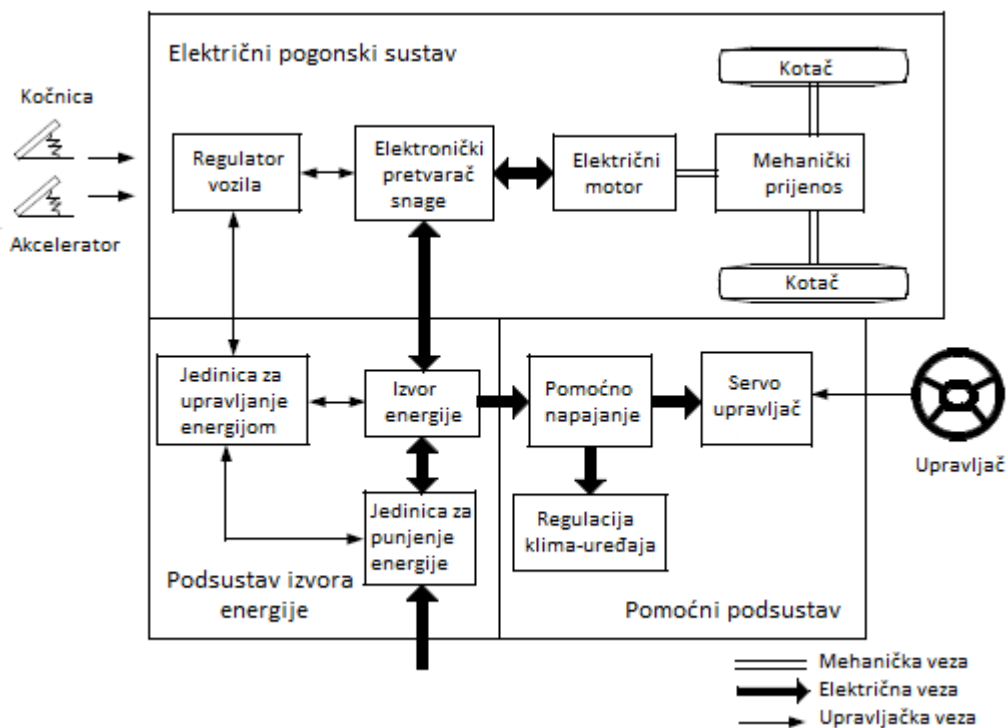
#### 2.1.1 Struktura električnih vozila

Električna vozila koriste električni motor za vuču, te kemijske baterije, gorive ćelije, superkondenzatore i/ili druge zamašnjake sa odgovarajućim izvorima energije. Struktura električnih vozila preuzima strukturu vozila koja koriste za pogon motor sa unutrašnjim sagorijevanjem, te umjesto motora sa unutrašnjim sagorijevanjem imamo elektromotor, te umjesto spremnika za gorivo koristi se baterijsko punjenje uz ostale komponente, kao što je prikazano na slici 2.1.[1]



Slika 2.1: Osnovni pogonski sklop električnog vozila,[1]

Suvremeno električno vozilo izgrađeno je na temelju originalne karoserije i dizajniranog okvira. To zadovoljava zahtjeve koji se stavljaju pred strukturu jedinstvenog električnog vozila i omogućuju korištenje veće fleksibilnosti električnog pogona. Konceptualno je na slici 2.2 prikazan suvremeni električni pogon koji se sastoji od tri glavne komponente: elektromotorni pogon, izvor energije i pomoćne komponente. Komponenta električnog pogona sastoji se od regulatora vozila, elektroničkog pretvarača snage, elektromotora, mehaničkog prijenosa i pogonskih kotača. Komponenta izvora energije uključuje izvor energije, upravljačku jedinicu za energiju i jedinicu za punjenje energije. Pomoćna komponenta sastoji se od jedinice servo upravljača, jedinice klima-uređaja, te jedinice pomoćnog napajanja.[1]



Slika 2.2: Opći prikaz strukture električnog vozila,[1]

Na temelju kontrole ulaza pomoću papučica ubrzanja i kočnice, regulator vozila osigurava odgovarajuće upravljačke signale za elektronički pretvarač snage koji regulira tok snage između

elektromotora i izvora energije. Zbog regenerativnoga kočenja električnog vozila moguć je negativni tok energije, te energija može biti vraćena u izvor energije. Upravljačka jedinica za energiju povezana sa regulatorom vozila kontrolira regenerativno kočenje i povrat energije. Također upravlja sa jedinicom za punjenje energije i prati uporabljivost izvora energije. Pomoćno napajanje napaja različitim naponskim razinama sve pomoćne uređaje električnog vozila, posebno jedinice klima-uređaja i servo upravljača.[1]

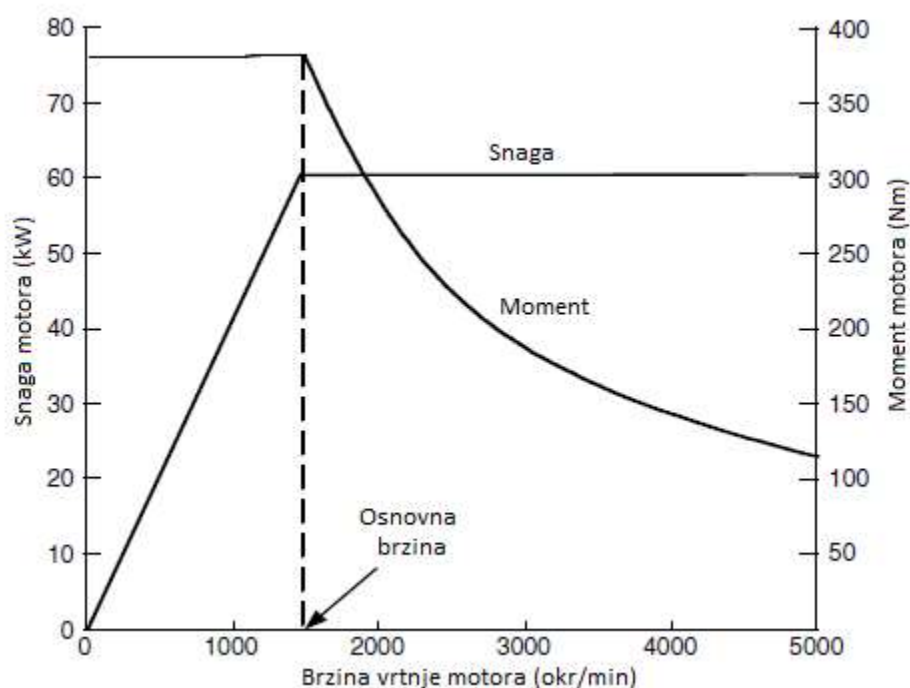
## 2.1.2 Karakteristike električnih vozila

Vozne karakteristike električnog vozila obično se ocjenjuju po parametrima kao što vrijeme potrebno za ubrzanje, maksimalna brzina i sposobnost savladavanja nagiba. Pogonski sustav električnog vozila, odgovarajuće snage elektromotora i prijenosne karakteristike ispunjavaju specifičnosti radnih karakteristika. Projektiranje svih ovih parametara najviše ovisi o karakteristika omjera brzine i snage (okretnog momenta) vučnog elektromotora. [1]

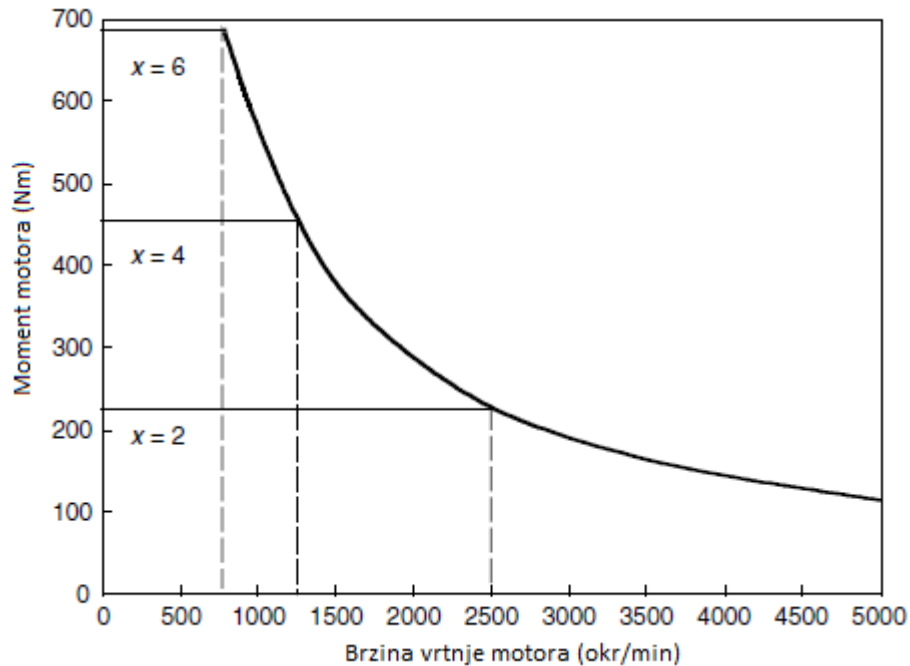
Uspoređujući karakteristike elektromotora i motora s unutarnjim izgaranjem, prednosti su uvelike na strani elektromotora. Nedostaci motora s unutarnjim izgaranjem su emisija štetnih tvari, vibracija i buka, te potrošnja neobnovljenih resursa energije. Nedostaci ove vrste motora su prednosti elektromotora. Međutim, iako elektromotor sam po sebi nema emisiju štetnih tvari, zagađenje nastaje na mjestima proizvodnje električne energije. Nadalje, prednost elektromotora je u njegovoj mehaničkoj izvedbi, te visokoj energetske učinkovitosti (preko devedeset posto iskorištenosti izlazne energije, u odnosu na uloženu). Motori s unutarnjim izgaranjem imaju oko maksimalno 30-40% učinkovitosti. Elektromotor i pri malim okretajima vrtnje ostvaruje veliki moment, te može doseći brzine i ubrzanje kao i vozilo koje je pokretano pomoću motora sa unutarnjim izgaranjem. Važna karakteristika je da elektromotor može raditi i kao generator, što omogućuje da električno vozilo tijekom kočenja i spuštanja niz nagib stvara regeneraciju energije.

Promjenjive brzine elektromotora pri vožnji obično poprimaju karakteristike koje su prikazane na slici 2.3.. Na slici je vidljivo da za područje niskih brzina (brzine koje su manje od osnovne brzine ili nazivne brzine) elektromotor ima konstantni okretni moment. U području velikih brzina (one koje su više od osnovne brzine) iz slike 2.3 je vidljivo da elektromotor ima konstantnu snagu. Ova karakteristika obično predstavlja omjer brzine  $x$ , koja se definira kao

omjera maksimalne brzine u odnosu na osnovnu. Pri nižim brzinama napon napajanja raste s povećanjem brzine, pomoću elektroničkog pretvarača, dok se magnetski tok drži konstantnim. U trenutku dostizanja osnovne brzine, napon elektromotora doseže napon izvora napajanja. Poslije dostizanja osnovne brzine, napon elektromotora poprima održivu konstantnu vrijednost i električni tok, odnosno okretni moment hiperbolički opada s povećanjem brzine.[1]



**Slika 2.3:** Karakteristika elektromotora sa promjenjivom brzinom,[1]



**Slika 2.4:** Prikaz ovisnosti momenta o brzini za 60kW elektromotor s omjerom brzine  $x=2, 4$  i  $6$ ,[1]

Na slici 2.4 prikazana je grafička ovisnost okretnog momenta i brzina elektromotora od 60 kW, uz omjer brzine  $x$  ( $x=2, 4$ , i  $6$ ). U području s dugačkom konstantom snagom, maksimalni okretni moment elektromotora može biti značajno povećan, stoga ubrzanje vozila i sposobnost svladavanja nagiba može biti poboljšano, te prijenos može biti pojednostavljen. Međutim, svaki tip motora ima svojstveni ograničeni omjer maksimalne brzine. Primjerice, motor sa stalnim magnetom ima maleni  $x$  ( $<2$ ) zbog teškoća sa slabljenjem magnetskog polja zbog pristupnosti stalnog magneta. Reluktantni motor može postići  $x>6$ , a asinkroni motor otprilike  $x=4$ . [1]

### 2.1.3 Potrošnja energije

U prijevozu, obično se za energiju koristi jedinica kilovat sati (kWh), a potrošnja energije vozila se izražava po jedinici udaljenosti (tj. potrošeni kilovat sati po kilometru (kWh/km). Potrošak energije se mjeri na priključcima baterije, te se njezin kapacitet mjeri kilovat satima, a raspon kretanja s jednim punjenjem može se jednostavno izmjeriti. [1]

Potrošnja energije je integrirana izlazna snaga na priključcima baterijskog punjenja. Ta izlazna snaga jednaka je snazi koja se troši za pogon vozila, gubicima u prijenosu, te gubicima elektronike. Za gubitke snage u prijenosu i motornom pogonu koristi se oznake  $\eta_t$  i  $\eta_m$ . Prema tome, izlazna snaga baterije se može izraziti na slijedeći način:

$$P_{b-izlaz} = \frac{v}{\eta_t \eta_m} \left( M_v g(f_r + i) + \frac{1}{2} \rho C_D A_f v^2 + M_v \delta_{eqm} \frac{dv}{dt} \right) \quad (2.1)$$

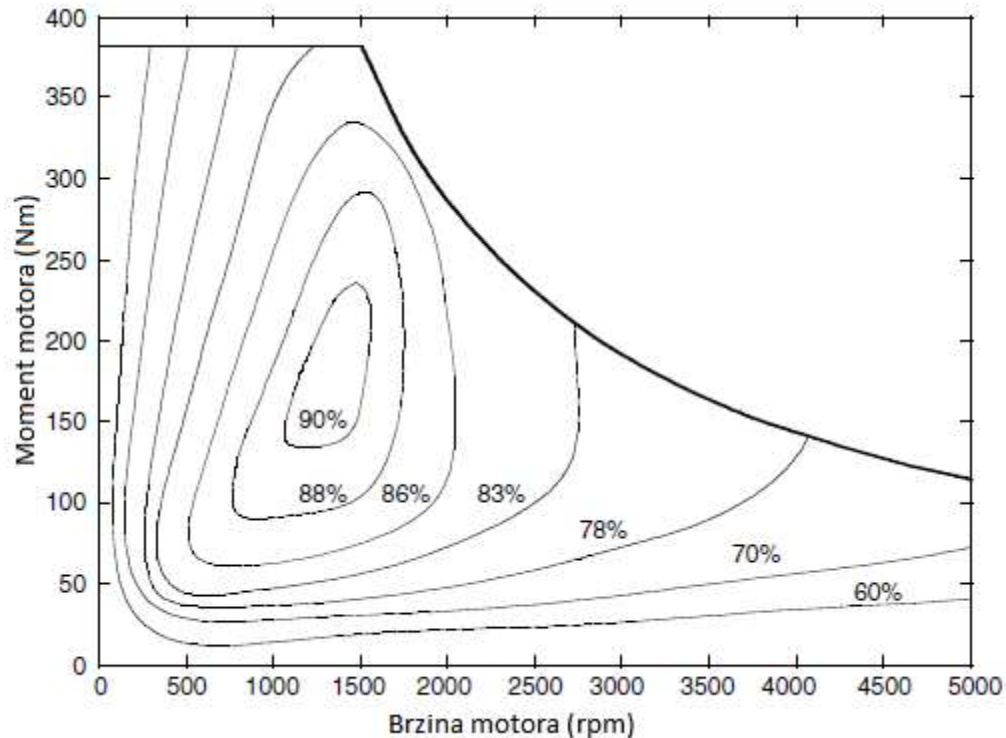
Ovdje, u prethodnoj relaciji pomoćno opterećenje (napajanje pomoćne komponente) nije uključeno. U nekim slučajevima, pomoćno opterećenje može biti značajno, te se ne može biti ignorirano, nego treba biti pridodano vučnom opterećenju. Regenerativno kočenje koje predstavlja gubitka u konvencionalnim vozilima (ona koja koriste za pogon motor s unutrašnjim sagorijevanjem), za električna vozila znače povratak energije ka baterijskom punjenju, jer motorni pogon tada više ne djeluje kao elektromotor, nego kao generator. Snaga regenerativnog kočenja na baterijskim priključcima može se izraziti na slijedeći način:

$$P_{b-ulaz} = \frac{\gamma v}{\eta_t \eta_m} \left( M_v g(f_r + i) + \frac{1}{2} \rho C_D A_f v^2 + M_v \delta_{eqm} \frac{dv}{dt} \right) \quad (2.2)$$

gdje su nagib prometnice  $i$  ili ubrzanje  $dv/dt$  ili pak obje te veličine, negativne vrijednosti, a  $\gamma (0 < \gamma < 1)$  je postotak od ukupne energije kočenja koja se može iskoristi za pogon elektromotora. Matematička relacija snage regenerativnog kočenja ima negativni predznak. Taj se pojam naziva čimbenik regenerativnog kočenja. Potrošnja energije iz baterije iznosi:

$$E_{izlaz} = \int_{vuča} P_{b-izlaz} dt + \int_{kočenje} P_{b-ulaz} dt \quad (2.3)$$

Kada iznos potrošnje energije baterije dosegne ukupni iznos energije u baterijama, ona je ispražnjena, te treba biti ponovo napunjena. Udaljenost putovanja koje vozilo može preći između dva punjenja određena je ukupnom energijom baterije, troškom opterećenja i učinkovitošću regenerativnog kočenja. Korisnost vučnog motora u njegovim radnim točkama ovisi o odnosu brzine i okretnog momenta kako prikazuje slika 2.5. Na njoj su prikazana najučinkovitija radna područja izražena u postocima. U dizajnu pogonskog sklopa mora se voditi računa da se njegovo područje poklapa ili barem da je što bliže području sa najvećom radnom učinkovitošću.[1]



Slika 2.5: Karakteristike učinkovitosti elektromotora,[1]

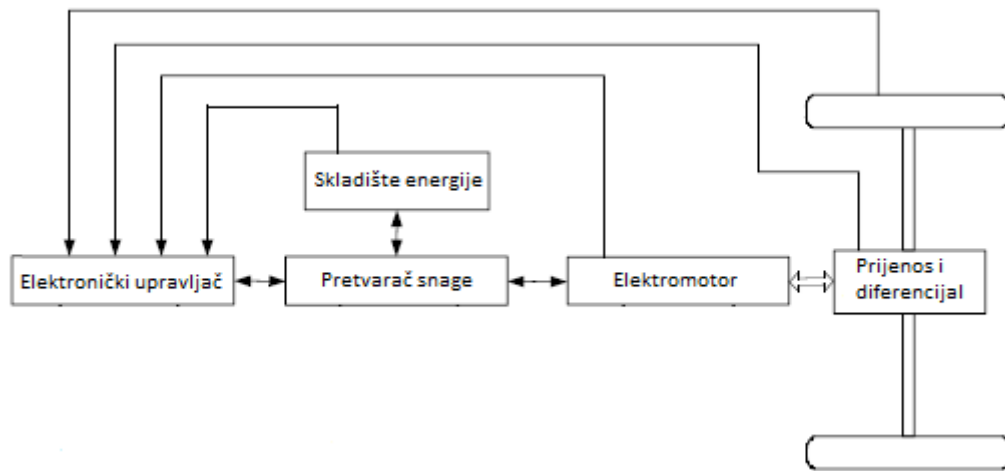
## 2.2 Električni pogonski sustav

U ovom dijelu prikazati će se električni pogonski sustav, te će se opisati tri vrste elektromotora. U posljednjoj točki ovog dijela usporediti će se karakteristike opisanih elektromotora.

### 2.2.1 Opis električnog pogonskog sustava

Električni pogonski sustav je središnji dio električnog vozila, a sastoji se od električnog motora, pretvarača snage i elektroničkih upravljača. Slika 2.6 prikazuje blok dijagram za takav sustav. Elektromotor pretvara električnu energiju u mehaničku koja pokreće vozilo ili obrnuto, omogućuje regenerativno kočenje stvarajući pri tome električnu energiju koja puni bateriju električnom energijom. Pretvarač snage se koristi za napajanje elektromotora sa odgovarajućim naponom i strujom. Elektronički upravljač pomoću kontrolnih signala upravlja pretvaračem snage,

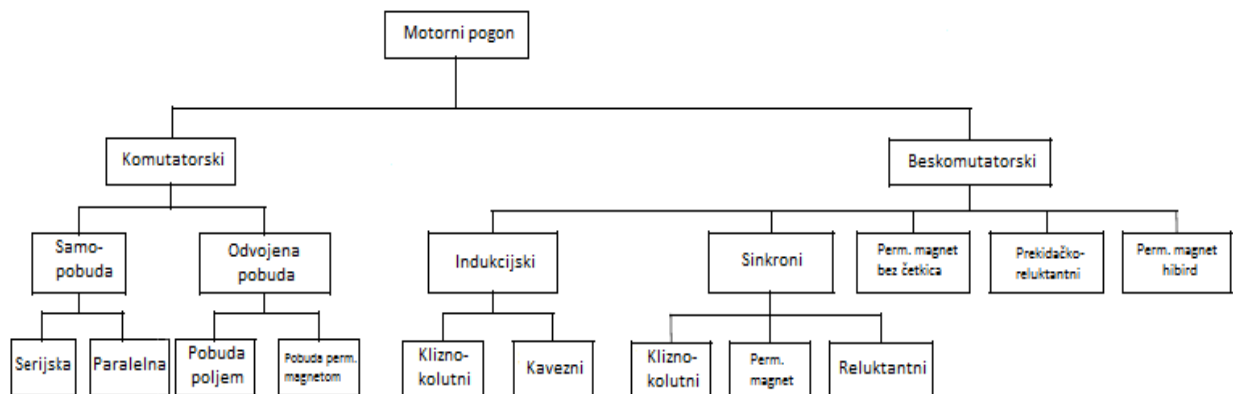
te upravlja radom elektromotora koji stvara odgovarajući moment i brzinu u skladu sa smjerom voženje. Elektronički upravljač može se podijeliti u tri funkcionalne cjeline: senzor, elektronički sklop i procesor. Senzor se koristi da mjerljive veličine kao što su električna struja, električni napon, temperatura, brzina, moment i magnetski tok, pretvori u električne signale koji prolaze kroz elektronički sklop. Ovi signali su prije ulaska u senzora omeđeni određenom naponskom razinom na kojoj radi senzor. Na izlazu iz procesora, signali se pojačavaju preko elektroničkog sklopa pomoću pretvarača snage. [1]



**Slika 2.6:** Blok dijagram električkog pogonskog sustava,[1]

Izbor električnog pogonskog sustava za električno vozilo uglavnom ovisi o mnogo čimbenika, uključujući očekivanja vozača, ograničenja vozila i izvor energije. Očekivanja vozača ovise o načinu voženje koja uključuje ubrzanje, maksimalnu brzinu, sposobnost savladavanja nagiba , kočenje i opseg vožnje. Ograničenja vozila su volumen, težina, korisna nosivost. Izvor energije odnosi se na baterije, gorive ćelije i superkondenzatore, zamašnjake i različite hibridne izvore. Stoga, tijekom identifikacije željenih osobina i dodatnih opcija za električni pogon mora se razmatrati na sustavnoj razini. Moraju pri tome biti ispitani željeni utjecaji sustava i međudjelovanje podsustava.[1]





Slika 2.7: Podjela električnih motora,[1]

Razlikujući industrijske izvedbe motora, motori koji se upotrebljavaju kod električnih vozila uglavnom zahtijevaju često pokretanje i zaustavljanje, visoku stopu ubrzanja i usporenja, veliki moment i malu brzinu uspinjanja nagibom, mali moment i veliku brzinu vožnje, te vrlo širok raspon operativnih brzina. Pogonski motori za električno vozilo mogu se svrstati u dvije glavne skupine. Prva skupina su motori s komutatorom, a druga oni bez komutatora. Ilustrativnu podjelu prikazuje slika 2.7. Motori s komutatorom su tradicionalno istosmjerni motori koji imaju serijsku, paralelnu, složenu, odvojenu pobudu i motori sa pobudom permanentnog magneta. Istosmjerni motori trebaju komutatore i četkice za dovođenje električne struje unutar armature, te ih to čini manje pouzdanim i neprikladnim za održavanje (neometani rad i velike brzine). Osim toga, istosmjerni motori koji imaju pobude pomoću namotaja imaju nisku specifičnu gustoću snage. Gustoća snage predstavlja energiju koju uređaj može predati trošilu u jedinici vremena po jedinici mase ili volumena uređaja. Unatoč tome, zbog usavršene tehnologije i jednostavnog upravljanja, istosmjerni motorni pogoni su istaknuti u električnim pogonskim sustavima. Razvojem tehnologije, motori bez komutatora su ušli u novo razdoblje. Takvi motori imaju prednosti kao što su viša učinkovitost, veća gustoća snage i niži operativni troškovi. Također su više pouzdaniji i prikladniji za održavanje u odnosu na motore sa komutatorom. Zbog toga su ovi motori postali u posljednje vrijeme više zanimljivi kao pogon kod električnih vozila.[1]

Indukcijski (asinkroni) motori su široko prihvaćeni kao vrsta motora bez komutatora za električna vozila, zbog svojih niskih troškova, visoke pouzdanosti i rada bez potrebe za prevelikim održavanjem. Međutim, konvencionalno upravljanje indukcijskim motorom, ne može pružiti

traženu učinkovitost. Pojavom energetske elektronike i razvojem računalstva, upravljanje ovom vrstom motora prevladava se složenost kod se javlja kod takve radnje zbog njegove nelinearnosti. No, ipak i kod ovog načina upravljanja nazočna je niska učinkovitost pri slabom opterećenju i ograničenoj snazi unutar radnog područja u kojem djeluje motor.[1]

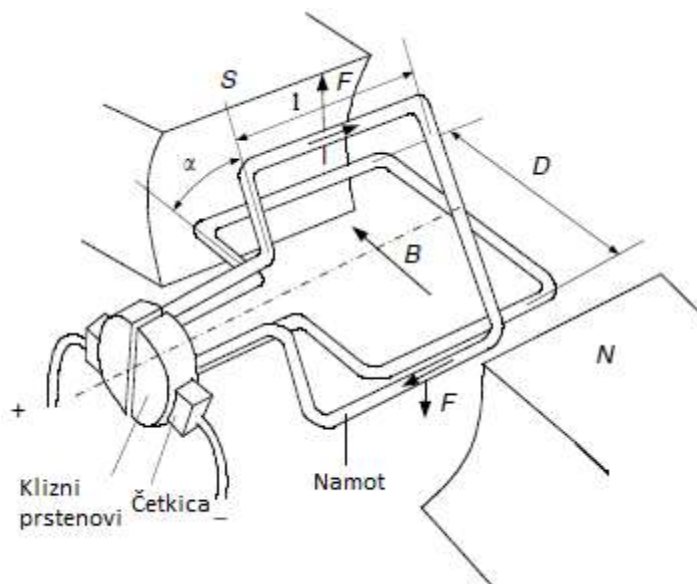
Reluktantni motori su prepoznati kao potencijal koji se može koristiti za pogon električnog vozila. Ova vrsta motora ima prednost u jednostavnoj konstrukciji, niskom trošku proizvodnje i odličnoj karakteristici momenta odnosu na brzinu. Iako, oni imaju jednostavnu konstrukciju, to ne nikako ne znači da im je izvedba i upravljanje, jednostavno. Naime, zbog visoke magnetske zasićenosti polova, njihovo upravljanje je otežano kao i izvedba samog motora. Oni rade na principu, da se preko senzora osovine, otkriva relativni položaj rotora u statoru. Takvi senzori su osjetljivi na mehaničke udarce, temperaturu i prašinu. Stoga, zbog senzora položaja se smanjuje pouzdanost reluktantnih motora i ograničava se njihova primjena. Međutim, razvoj novih tehnologija može osigurati neometano funkcioniranje od nulte do maksimalne brzine. [1]

### **2.2.2 Istosmjerni motori**

Istosmjerni motori naveliko se koriste gdje potrebno prilagođavanje brzine, dobra regulacija brzine, često pokretanje, kočenje i kretanje unazad. Različiti istosmjerni motori imaju široku namjenu za različite primjene električne vuče, zbog usavršene tehnologije i jednostavnosti upravljanja.[1]

Način djelovanja istosmjernog motora je jednostavan. Kada kroz vodič koji se nalazi u magnetskom polju, protječe električna struja, tada magnetska sila počne djelovati na vodič. Magnetska sila je okomita na vodič i na magnetsko polje, kako prikazuje slika 2.8. Magnetska sila je proporcionalna u odnosu na duljinu vodiča, veličinu električne struje i gustoću magnetskog polja. Izražena matematičkom relacijom, vrijedi:

$$F_L = BIl \quad (2.4)$$



**Slika 2.8:** Princip rada istosmjernog motora,[1]

Kada je vodič u obliku koluta, kao što je prikazano na slici 2.8, magnetska sila djeluje na obje strane, te dolazi do stvaranja momenta koji se izražava na način:

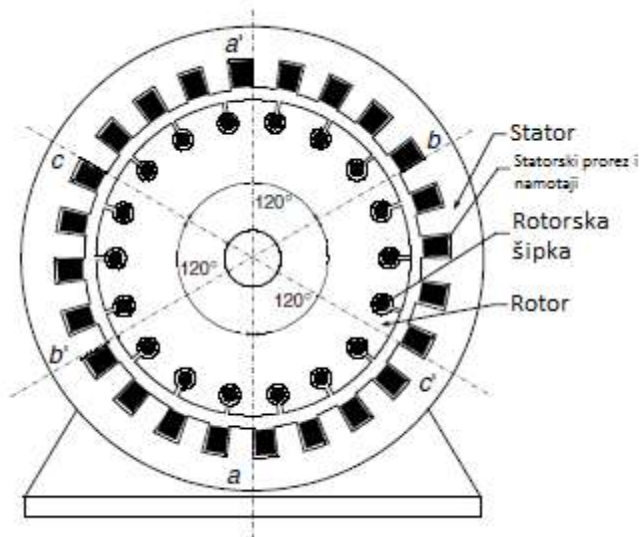
$$T = BIl \cos \alpha \quad (2.5)$$

gdje je  $\alpha$  kut između ravnine namotaja i magnetskog polja, kako prikazuje slika 2.8. Magnetsko polje može se stvoriti nizom namota ili uz pomoć permanentnih magneta. Namotaj kojim teče električna struja naziva se armatura. Ona se sastoji od brojnih nizova namotaja. Da bi se dobio stalni i maksimalni moment, klizni prsteni i četkice se koriste da bi se svaki namotaj doveo u položaj gdje je  $\alpha = 0$ . [1]

### 2.2.3 Indukcijski motori

Motori bez komutatora ili indukcijски motor ima mnoge prednosti ispred konvencionalnog istosmjernog komutatorskog motora, koji se koristi za elektropogonske sustave kod električnih vozila. Uspoređujući, istosmjerne motore sa asinkronim indukcijским motorom, dodatne prednosti potonjeg su manja težina, manji volumen, niža cijena i veća efikasnost. Takve prednosti su osobito važne za električno vozilo. [1]

Postoje dvije vrste, indukcijskih motora, kavezni i klizno-kolutni. Zbog velikih troškova, potrebe za održavanjem, nedostatka čvrstoće, klizno-kolutni motor je manje aktualan od kaveznog, a posebno za elektromotorne pogonske sustave. [1]



Slika 2.9: Presjek indukcijskog motora, [1]

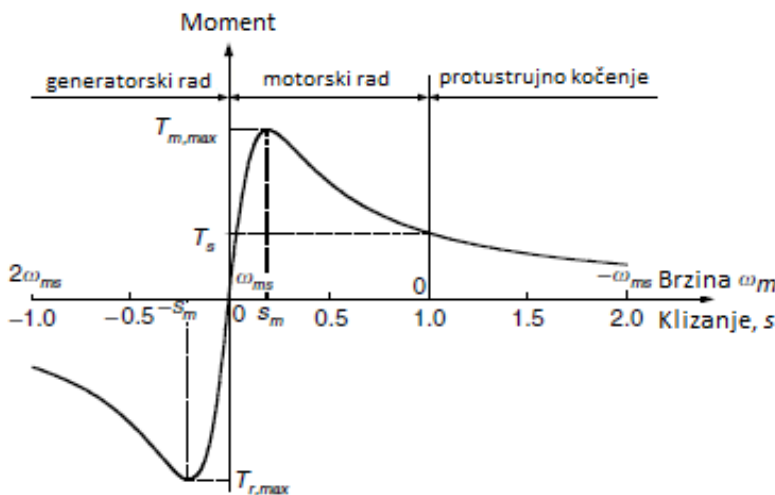
Presjek dvopolnog indukcijskog motora prikazuje slika 2.9.. U proreze unutrašnjeg oboda statora umetnuti su namotaji u tri faze,  $a - a'$ ,  $b - b'$ ,  $c - c'$ . Statorski namotaji su raspoređeni tako da električna struja u njima stvara približno sinusoidnu distribuiranu gustoću toka oko ruba zračnog raspore. Tri su namota prostorno raspoređeni pod kutom od  $120^\circ$ , što je vidljivo na slici 2.9.[1]

Najčešće vrste rotora indukcijskih motora su kavezni u kojem su aluminijske šipke postavljene u utore vanjskog oboda rotora. Aluminijske šipke su kratko spojene na bočnim krajevima rotora pomoću aluminijskih prstena.[1]

Statorski namotaj spojen na električno napajanje stvara okretno magnetsko polje koje rotira sinkronom brzinom. Magnetske silnice tog okretno polja presijecaju vodiče statorskog i rotorskog namotaja, te se stoga induciraju naponi u njima. Inducirani napon u rotorskom namotaju uzrokuje električnu struju. Na svaki vodič kojim teče strujom u magnetskom polju djeluje sila, te nastaje okretni moment, koji je proporcionalna magnetskom toku i induciranoj struji u rotoru. Inducirana struja u rotoru neophodna je za stvaranje momenta, a s druge strane inducirana struja ovisi o

relativnom kretanju okretnog magnetskog polja statora i rotora. Zbog toga mora postojati razlika između kutne brzine okretnog magnetskog polja statora i kutne brzine rotora, jer ne bi ni došlo do stvaranja momenta.[1]

Na slici 2.10, prikazana je karakteristika momenta u ovisnosti o klizanju za induksijski motor koji ima stalni napon i frekvenciju. Iz karakteristike se može očitati da u području  $0 < s < s_m$ , moment se povećava približno linearno s povećanjem klizanja, dok ne dostigne vrijednost svojeg maksimuma, odnosno  $s = s_m$ . Gdje je  $s_m$  nazivno klizanje motora. Klizanje je pojava, da se rotor okreće brzinom koja je uvijek manja od sinkrone, odnosno ta je brzina manja od brzine vrtnje okretnog magnetskog polja. Nakon što je moment dosegnuo svoje maksimum, nastavlja padati povećanjem klizanja. Kod vrijednosti  $s = 1$ , brzina rotora je jednaka nuli, te je pripadajući moment za tu vrijednost, početni moment koji je manji, nego moment pri vrijednosti kod  $s = s_m$ . Područje  $0 < s < 1$  je područje rada motora. U područje gdje je vrijednost klizanja veća od jedan, odnosno  $s > 1$ , moment rotora se smanjuje, kako se povećava klizanje, rotorska je brzina negativna. Stoga, je u tom području motor u stanju protustrujnog kočenja. Kod vrijednosti klizanja  $s < 0$ , kada je brzina rotora veća od sinkrone brzine, motor stvara negativni moment.[1]



**Slika 2.10:** Ovisnost momenta o klizanju za induksijski motor,[1]

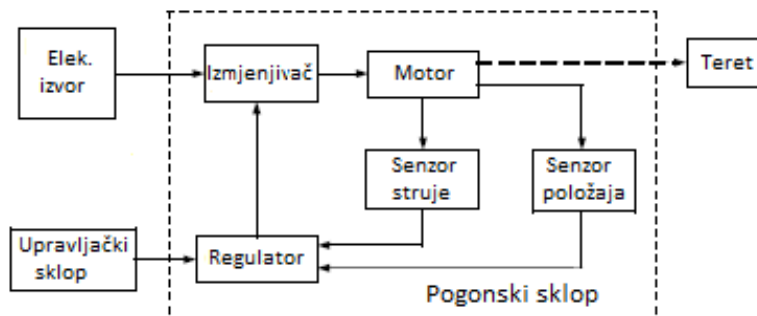
Karakteristika sa slike 2.10., stalnog napona i frekvencije inducirano motora nije adekvatna za primjene vuče vozila. Razlog tome je niski početni moment, ograničen opseg brzine, nestabilno područje za  $s > s_m$ . U tom području bilo koje dodatno narušavanje momenta uslijed

opterećenja, dovesti će motor do zaustavljanja, sa padom vrijednosti momenta i brzine. Visoko klizanje može uzrokovati veliku struju, koja pak može oštetiti statorske namotaje. Indukcijski motor stalnog napona i frekvencije radi u uskom području klizanja  $0 < s < s_m$ . Stoga, za vučne primjene vozila, indukcijski motor mora biti reguliran kako bi se osigurala odgovarajuća svojstva momenta u odnosu na brzinu.[1]

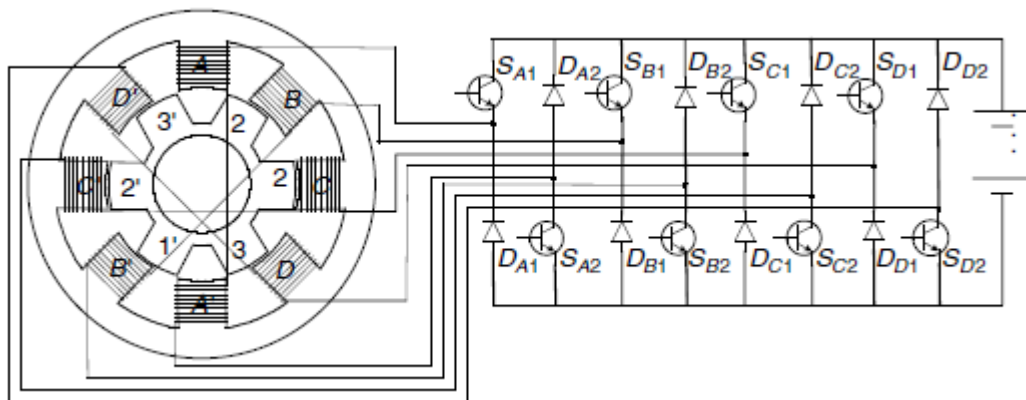
## 2.2.4 Reluktantni motori

Za elektromotorne pogone gdje su potrebne različite brzine, reluktantni motori su pogodni zbog svojih niskih troškova, strukture, pouzdanih pretvarača, visoke efikasnosti uz širok raspon brzina, te jednostavnosti upravljanja. Struktura ove vrste motora je jednostavna i niskog je troška. Struktura ne nudi samo navedene prednosti, nego je ona kao takva nudi i velike radne brzine motora. Motor može postizati velike brzine, stoga, što on nema mehaničkih kvarova koji uzrokuju velike centrifugalne sile. Osim toga, pretvarač kod ove vrste motora ima pouzdanu topologiju, odnosno dobar prostorni razmještaj namotaja. Statorski namotaji su spojeni serijski sa gornjim i donjim prekidačima od pretvarača. Glavna značajka reluktantnih motora je velika efikasnost uz širok raspon brzina i jednostavno upravljanje.[1]

Na slici 2.11, prikazan je konvencionalni reluktantni pogonski sustav koji se sastoji od samog reluktantnog motora, izmjenjivača, senzora napona, struje i položaja, upravljačkog sklopa. Uz pravilno upravljanje moguće je postići veliku učinkovitost reluktantskog pogonskog sustava. Ovaj pogonski sustav ima izmjenjivač koji je spojen na napajanje istosmjernom strujom, bilo da je to učinjeno preko napona gradske mreže pomoću ispravljača ili iz baterija. Fazni namotaji su spojeni na izmjenjivač kao što prikazuje slika 2.12. Upravljački sklop daje signal koji uključuje i isključuje sklopku izmjenjivača, ovisno strategiji upravljanja i signalima iz različitih senzora.[1]



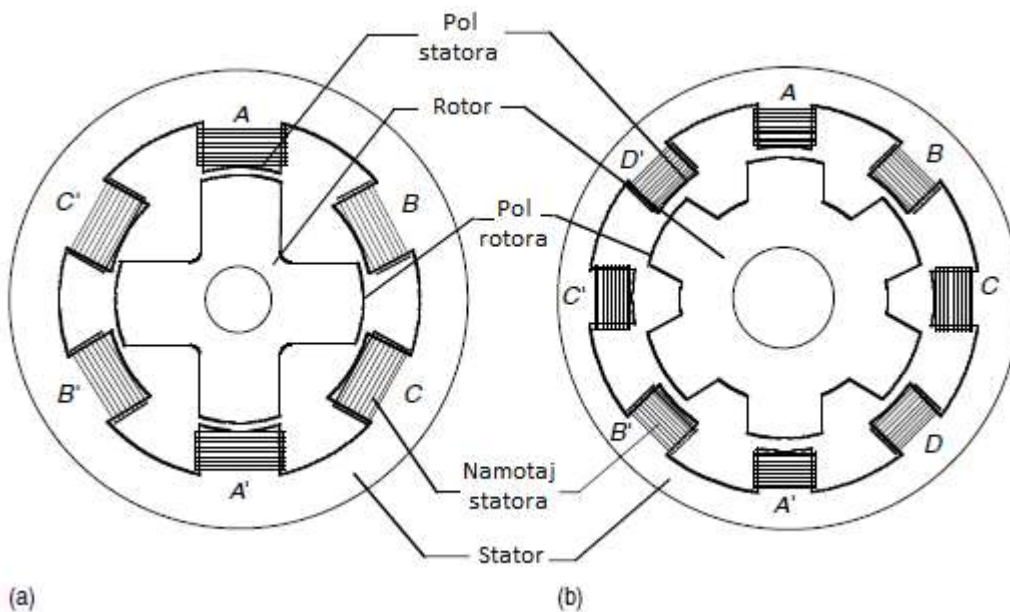
Slika 2.11: Pogonski sustav reluktantnog motora,[1]



Slika 2.12: Prikaz presjeka reluktantnog motora i njegovog napajanja,[1]

### 2.2.4.1 Osnovna izvedba strukture statora i rotora

Reluktantni motori imaju istaknute polove na statoru i rotoru. Namotaji se nalaze samo na statoru, bez namotaja ili permanentnog magneta na rotoru. Postoji nekoliko izvedbi strukture ove vrste motora ovisno o broju i veličini rotorskih, te statorskih polova. Na slici 2.13, vidljive su dvije najčešće izvedbe strukture reluktantnih motora, odnos polova statora i rotora, 8/6 i 6/4.[1]

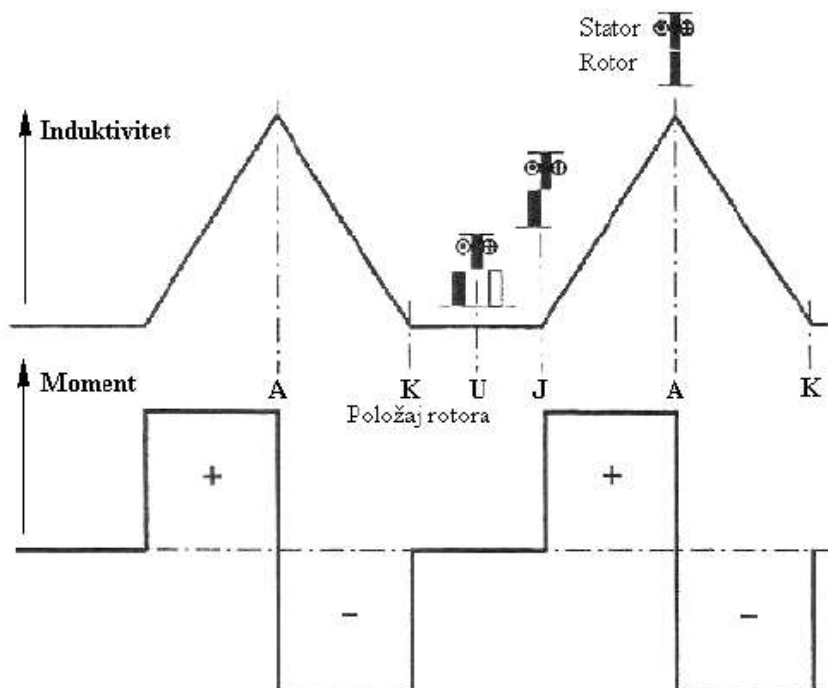


Slika 2.13: Presjek reluktantnog motora za odnos polova statora i rotora (a) 8/6 i (b) 6/4,[1]

Zbog svoje dvopolne strukture, tok reluktancije pojedine faze namotaja ovisi o položaju rotora. Također, budući da je ova vrsta motora strukturno izvedena za visoka magnetska zasićenja uz visoke struje, tok reluktancije isto tako ovisi o faznoj struji. Kao rezultat toga, tok statorskog spoja, glavnina induktiviteta i fazni inkrementalni induktivitet (induktivitet), mijenjaju se ovisno poziciji rotora i iznosu fazne struje.[1]

### 2.2.4.2 Princip rada reluktantnog motora

Kod ove vrste motora, moment se stvara na način da rotor dospije u položaj maksimalnog induktiviteta namotaja pobude. Na statorskim polovima namotani su namotaji, a na rotoru nema nikakvih namotaja. Na slici 2.14, prikazano je magnetsko polje za ovu vrstu motora, pomoću koje će opisati princip stvaranja momenta.[2]

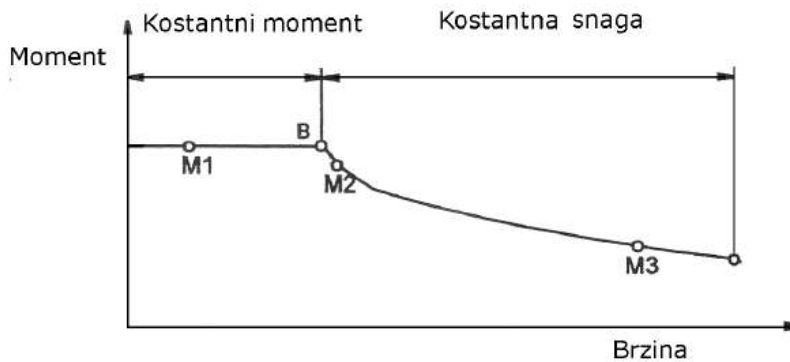


**Slika 2.14:** Ovisnost induktiviteta i momenta o položaju rotora pri konstantnoj struji zavojnice,[2]

Fazni namotaji čine dva namotaja namotani na suprotne polove statora spojeni u serijski spoj. Motor može stvoriti moment samo za ograničeni kut rotacije, koji ovisi o luku jednog pola



statora. Slika 2.14., prikazuje ovisnost induktiviteta namota o položaju rotora za reluktantni motor. Motor stvara pozitivni moment za vrijeme rasta induktiviteta namotaja, odnosno dok se rotor zakreće prema položaju najveće magnetske vodljivosti od položaja *J* sa slike, do položaja *A*. Položaj *J* sa slike označava stanje kada su polovi rotora i statora u istom položaju (prekrivaju se). Položaj *K*, označava kraj stanja prekrivanja. Moment mijenja predznak u položaju maksimalne magnetske vodljivosti. Privlačne sile između polova stvaraju zaustavni moment prolaskom maksimalne magnetske vodljivosti. Za eliminaciju momenta s negativnim predznakom potrebno je isključiti struju u trenutku kada jedan pol rotora pređe položaj maksimalne magnetske vodljivosti. Za ovo opisano stanje pretpostavlja se daje ovdje električna struja konstanta.[2]



**Slika 2.15:** Ovisnost momenta u odnosu na brzinu za reluktantni motor,[2]

Na slici 2.15, opisuje se ovisnost momenta u odnosu na brzinu za reluktantni motor. Iz slike razlikujemo tri područja, odnosno područja konstantnog momenta, konstante snage i smanjivanje snage. Za područje konstantnog momenta, osnovna brzina je maksimalna brzina pri kojoj možemo uz nazivni napon, dobiti maksimalnu struju, te time i moment. Upravljanje momentom se radi preko regulacije struje. Područje konstante snage obilježava opadanje momenta uz porast brzine. Ovdje se održava vrijednosti ulančanog toka na maksimalnoj mogućoj razini do brzine koje je približno dva puta veća od osnovne brzine. Kako se povećava brzina, moment počinje sve brže opadati tako da se snaga više ne može držati na konstantnoj vrijednosti. [2]

## 2.2.5 Usporedba vrsti elektromotora

Izbor vrste elektromotornog pogona bitan je korak za dizajniranje cjelokupnog sustava električnog vozila. Moraju se uzeti u obzir mnogi kriteriji kao što su učinkovitost, cijena,

pouzdanost, gustoća snage, doseg razvijenosti tehnologije i upravljivost. Pritom, svaka vrsta elektromotora ima svoje prednosti i nedostatke u odnosu na onu drugu vrstu.[3]

Uspoređujući, prednosti i nedostatke triju vrsta elektromotora mogu se ukratko navesti već opisane karakteristike svakog od njih. Istosmjerni motor je zanimljiv sa inženjerske strane još od davnih vremena zbog jednostavnog upravljanja, te se koristi za pogone koji rade u području nižih snaga. Indukcijski motor je najvažniji kandidat u izboru za elektromotorni pogon zbog svoje pouzdanosti, robusnosti (otpornost na manja odstupanja), manje potreba za održavanjem, te sposobnosti za rad u nepovoljnim uvjetima. Uspoređujući, istosmjerne motore sa asinkronim indukcijskim motorom, dodatne prednosti potonjeg su, manji volumen, manja težina, veća efikasnost i niža cijena. Reluktantni motori postaju sve privlačniji za izbor pogona električnih vozila zbog svojih prednosti kao što su jednostavna i kruta konstrukcija, otpornost na kvarove, jednostavne kontrole i izvrsne karakteristike momenta u odnosu na brzinu. Ova vrsta motora radi u širokom području konstante snage. Nedostatci reluktantnog motora su visoka razina buke, elektromagnetske smetnje i posebna topologija za pretvarače.[3]

Indukcijski motor kao elektromotorni pogon nalazi svoju primjenu za osobna električna vozila (*Tesla Model S, Dacia Sandero*), dok reluktantni motor svoju primjenu nalazi kod terenaca gdje je potreban široki raspon snage zbog različitosti konfiguracije terena (*Land Rover Defender*). Istosmjerni motor koristi se za vozila gdje nije potrebna velika snaga, kao što je kombinirano vozilo *Citroën Berlingo*.

U tablici 1. na osnovu izvora [3] prikazano je broičano vrednovanje triju vrsta elektromotora po kriterijima gustoće snage, učinkovitosti, upravljivosti, pouzdanosti, razvijenosti tehnologije i cijeni. Svaka vrsta elektromotora vrednovana je za svaki pojedini kriterij ocjenom do 5 bodova. Za kriterije gustoće snage i učinkovitosti, indukcijski i reluktantni motori su u prednosti ispred istosmjernog zbog manjih gubitaka i jače nazočnosti magnetskog polja unutar svoje strukture. Upravljivost je slabija strana kod reluktantnog motora u odnosu na druge dvije vrste. Međutim, istosmjerni motor ima lošiju pouzdanost u odnosu na druge dvije promatrane vrste elektromotora, zbog potreba za održavanjem. Doseg razvijenosti tehnologije nešto manji je kod reluktantnog motora zbog posebne potrebe za topologijom pretvarača. Cijena je indukcijskog

motora je najprihvatljivija u odnosu na druge dvije vrste. U ukupnoj procjeni indukcijski motor je po svim navedenim kriterijima najbolje rješenje od ponuđenih za izbor elektromotornog pogona električnog vozila.

**Tablica 1.:** Procjena različitih vrsta elektromotora za elektromotorni pogon,[3]

Vrsta elektromotora			
Karakteristike	Istosmjerni	Indukcijski	Reluktantni
Gustoća snage	2.5	3.5	3.5
Učinkovitost	2.5	3.5	3.5
Upravlјivost	5	5	3
Pouzdanost	3	5	5
Razvijenost tehnologije	5	5	4
Cijena	4	5	4
<b>Ukupno</b>	 <b>22</b>	 <b>27</b>	 <b>23</b>

## 2.3 Skladišta energije

Za pohranjivanje električne energije služe uređaji koji se nazivaju skladišta energije. Oni opskrbljuju svojom energijom električna vozila, a skladište energiju koja dolazi od električnih vozila tokom regenerativnog kočenja. Postoji nekoliko vrsta skladišta energije koja su prikladna za namjenu kod električnih vozila. Kod električnih vozila razlikuju se skladišta energije kao što su elektrokemijske baterije, super-kondenzatori i super brzi zamašnjaci.[1]

Zahtjevi koje se stavljaju pred izvore energije za pogon električnog vozila su mnogi. Neki od kriterija su određena energija, određena snaga, učinkovitost, održavanje, upravljanje, trošak,

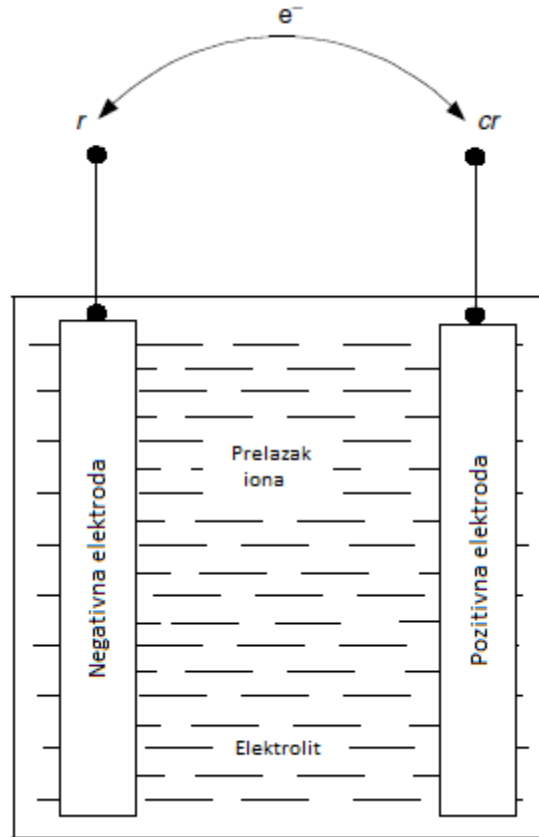
prihvatljivost za okoliš i sigurnost. Zbog prirode energetskog resursa električnog vozila, definirana energija je prvo ograničenje za udaljenost koje vozilo može preći s jednim punjenjem skladišta energije.[1]

### **2.3.1 Elektrokemijske baterije**

U ovom dijelu opisati će se izvedba i princip rada baterije, te će objasniti energetska korisnost za vrijeme punjenja i pražnjenja baterije.

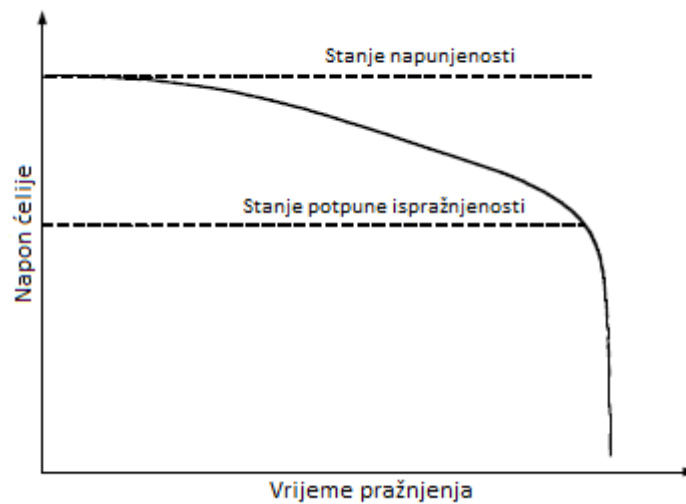
#### **2.3.1.1 Izvedba baterije**

Obično se elektrokemijske baterije nazivaju „baterijama“, te su one elektrokemijski uređaji koji pretvaraju električnu energiju u potencijalnu kemijsku energiju za vrijeme punjenja, a pretvaraju kemijsku energiju u električnu energiju za vrijeme pražnjenja. Baterija je sastavljena od nekoliko ćelija složenih zajedno. Ćelija je nezavisna i jedinstvena cjelina koja posjeduje sva elektrokemijska svojstva. U osnovi, baterijska ćelija sastoji se od tri ključna elementa: dvije elektrode (pozitivna i negativna), koje su uronjene u elektrolit. Na slici 2.16. je prikazana jedna tipična elektrokemijska ćelija.[1]

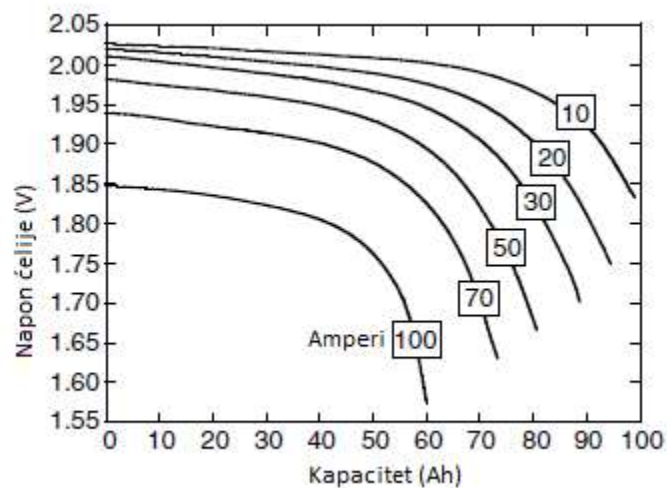


Slika 2.16: Elektrokemijska baterijska ćelije,[1]

Sa strane proizvođača, baterija je određena kulometrijskim kapacitetom, odnosno amper-satima. Taj se kapacitet definira kao broj amper-sati dobivenih kod pražnjenja baterije od stanja napunjenosti do stanja potpune ispražnjenosti (razina napona baterija koja se uzima kao stanje ispražnjenosti). Opisano stanje prikazano na slici 2.17. Nadalje, proizvođači navode i različite vrijednosti električne struje pored definirane veličine amper-sati. Na slici 2.18 je vidljivo da će kapacitet biti manji s većom strujom, odnosno kapacitet će brže padati sa većim brojem definiranih amper-satima.[1]



Slika 2.17: Stanje ispražnjenosti baterije,[1]



Slika 2.18: Karakteristika pražnjenja baterije,[1]

Osim kapaciteta, drugi bitan parametar za baterije je stanje napunjenosti, odnosno engleska kratica za taj pojam SOC (engl. *State-Of-Charge*). Stanje napunjenosti je omjer preostalog kapaciteta baterije u odnosu na puni kapacitet. Baterija je kod stanja napunjenosti od 0% potpuno ispražnjena, a kod 100% potpuno napunjena. Za različite kapacitete uz različite brzine pražnjenja i razine napona koji se uzimaju kao referenta točka stanja ispražnjenosti baterije, pojam potpune

ispražnjenosti ima drugačije tumačenje. Promjena stanja napunjenosti u vremenskom odsječku  $dt$ , uz struju punjenja ili pražnjenja  $i_b$ , izražava se:

$$\Delta SOC = \frac{i_b dt}{Q(i_b)} \quad (2.6)$$

gdje  $Q(i)$  kapacitet izražen u amper-satima uz struju  $i_b$ . Kod pražnjenja struja  $i_b$  je pozitivna, a kod punjenja, ona je negativna. Stoga, se stanje napunjenosti, izražava:

$$SOC = SOC_0 - \int \frac{i_b dt}{Q(i_b)} \quad (2.7)$$

gdje je  $SOC_0$  početna vrijednost stanja napunjenosti, odnosno  $SOC$ . [1]

Za električno vozilo, kapacitet energije je važniji od kapaciteta baterije, jer je neposredno povezan sa radom vozila. Energija dobivena iz baterija, izražava se:

$$EC = \int_0^t V(i_b, SOC) i_b(t) dt \quad (2.8)$$

gdje  $V(i_b, SOC)$  napon na baterijskim priključcima, koji je funkcija struje i stanja napunjenosti. [1]

### 2.3.1.2 Energetska korisnost

Energetski ili gubici snage za vrijeme pražnjenja i punjenja baterije, pojavljuju kao gubici napona. Stoga, energetska korisnost tokom pražnjenja i punjenja baterije može se definirati u svakoj radnoj točki kao omjer radnog napona ćelije i termodinamički napon. Za vrijeme pražnjenja taj omjer je: [1]

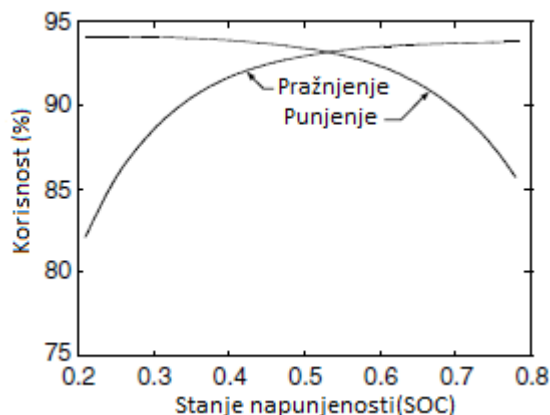
$$\eta_b = \frac{V}{V_0} \quad (2.9)$$

Za vrijeme punjenja taj omjer iznosi:

$$\eta_b = \frac{V_0}{V} \quad (2.10)$$

Napon na priključcima baterije ili stanje napunjenosti (SOC), za vrijeme pražnjenja je niži, a za vrijeme punjenja viši, nego električni potencijal stvoren u kemijskoj reakciji. Slika 2.19., prikazuje korisnost baterije tokom punjenja i pražnjenja. Prema toj slici, baterija ima visoku

korisnost tokom pražnjenja s visokim stanjem napunjenosti, te visoku korisnost tokom punjenja s niskim stanjem napunjenosti.[1]



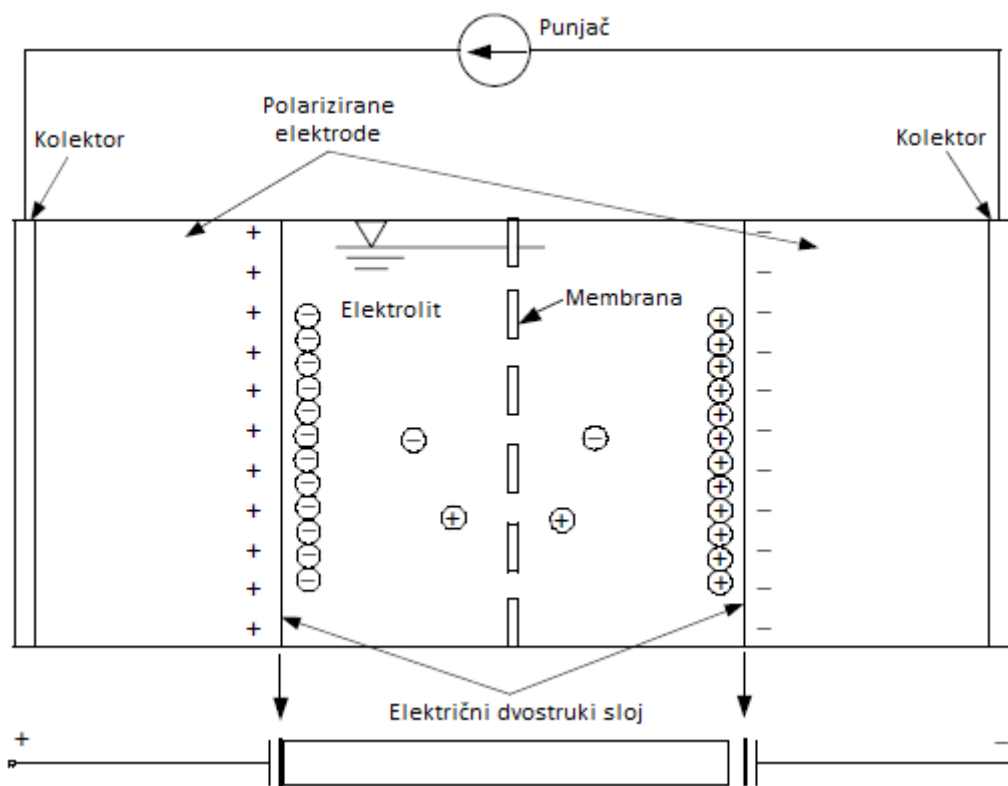
Slika 2.19: Korisnost baterije tokom pražnjenja i punjenja[1]

### 2.3.2 Superkondenzatori

Ovu vrstu skladišta energije karakterizira znatno veća specifična snaga, ali znatno manja specifična energija u odnosu na baterije. Specifična energija je u rasponu od nekoliko vat-sati po kilogramu, ali specifična snaga može dosegnuti vrijednost do 3kW/kg, a to je znatno više od bilo koje vrste energije. Zbog male specifične energije gustoće i zavisnosti napona o stanju napunjenost, superkondenzatori se ne koriste samostalno za skladištenje energije. Ipak, postoje prednosti koje omogućuju da se superkondenzatori koriste kao pomoćni izvori energije. Na tragu toga, postoji opcija gdje se kao izvori energije u električnom vozilu koriste zajedno i baterija i superkondenzatori. Zahtjevi koji se stavljaju pred specifičnu energiju i specifičnu snagu, razmatraju se odvojeno. Stoga, se dizajnira baterija samo za namjenu da se ispune zahtjevi specifične energije, a manje se pozornosti posvećuje zahtjevima specifične snage. Naime, energija, izdržljivost, te životni vijek baterije znatno se povećava iz razloga što se utjecaj opterećenja prenosi na superkondenzator, a time se smanjuje negativni utjecaj visoke struje kod pražnjenja i punjenja baterije prilikom regenerativnog kočenja.[1]



Dvoslojna kondenzatorska tehnologija se koristi kod koncepta superkondenzatora. Slika 2.20 prikazuje osnovni koncept dvoslojnog kondenzatora. Na slici su prikazane dvije šipke ugljika uronjene u otopinu sumporne kiseline, odvojene jedna od druge koje se napajaju naponom od nule do 1.5 volti. Ništa se ne događa do jednog volta, ali pri naponu malo višem od 1.2 volti, mali mjehurići će se pojaviti na površini obje elektrode. Mjehurići pri naponu većem od jednog volta ukazuju na električnu razgradnju vode. Membrana razdvaja elektrode, te osigurava prolazak iona, ali se sprečava prolazak elektrona, čime se stvara električna izolacija između elektroda. Na granici elektroda i elektrolita stvara se električni dvostruki sloj, kada se na elektrodama javi razlika potencijala. Energija je uskladištena razdvajanjem naboja u formiranom dvostrukom sloju.[1]



Slika 2.20.: Osnovni koncept dvoslojnog kondenzatora,[1]

Uskladištena energija kondenzatora iznosi:

$$E_{kap} = \frac{1}{2} C_k V^2 \quad (2.11)$$

gdje je  $C_k$  kapacitet kondenzatora u faradima, a  $V$  je iskoristiv napon u voltima. Relacija pokazuje da je za kondenzatore sa većom gustoćom energije, poželjan veći nazivni napon. Uvjeti koji se postavljaju za što kvalitetniji superkondenzator su: velika elektronska otpornost membrane, velika ionska vodljivost membrane i elektrolita, te velika površina elektroda i manja debljina elektroda i membrane.[1]

### 3. Definiranje optimizacijskog problema

Za definiranje optimizacijskog problema, treba opisati trošak energije vozila do kojeg dolazi kada se ono nalazi u pokretu. Na osnovu tih troškova energije, odnosno gubitaka može se definirati problem gdje se razdvajaju troškovi koji nastaju uslijed normalne voženje i vožnje po nagibu.

#### 3.1 Trošak energije električnog vozila

Ponašanje vozila tokom kretanja opisuje se pomoću matematičkih relacija koje se temelje na općim principima mehanike. Vozilo se sastoji od tisuću komponenti, te kao takvo ono predstavlja kompleksni sustav. Za opisati cjelokupno ponašanje vozila tokom njegovog operativnog rada, potrebna su znanja iz matematike i mehanike. Razmatranja o kretanju električnog vozila ograničit će se na njegov jednodimenzionalni aspekt.[1]

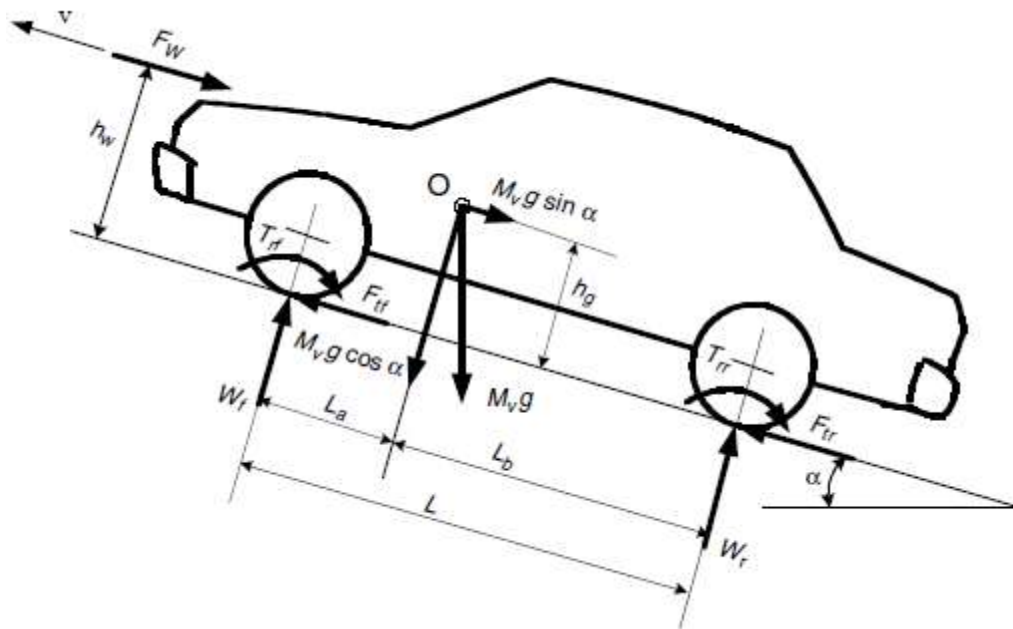
##### 3.1.1 Opći opis vozila u pokretu

Djelovanje sila koje djeluju na vozilo da se kreće uzbrdo po nagibu, prikazuje slike 2.1. Vučna sila  $F_t$  djeluje u kontaktnoj površini između guma pogonskih kotača i površine prometnice, pokrećući vozilo prema naprijed. To je sila stvorena sa strane pogonskog sklopa, te je prenesena prijenosom do pogonskih kotača. Za vrijeme kretanja vozila, javlja se otpor koji pokušava zaustaviti njegovo kretanje. Otpor se sastoji, uglavnom od otpora kotrljanja, aerodinamičkog otpora, te otpora nagiba. Prema, drugom Newtonom zakonu, ubrzanje vozila izražava se prema relaciji:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sum F_t - \sum F_{tr}}{\delta_{eqm} M_v} \quad (3.1)$$

gdje je  $v$  brzina vozila,  $\sum F_t$  ukupna vučna sila vozila,  $\sum F_{tr}$  je ukupni otpor,  $M_v$  ukupna masa vozila, a  $\delta_{eqm}$  je ekvivalentna veličina momenta tromosti koja predstavlja rotirajuće dijelove električnog vozila.

Gornja relacija ukazuje da brzina i ubrzanje vozila ovise o vučnoj sili, otporu i masi vozila.[1]



Slika 3.1: Sile koje djeluju na vozilo,[1]

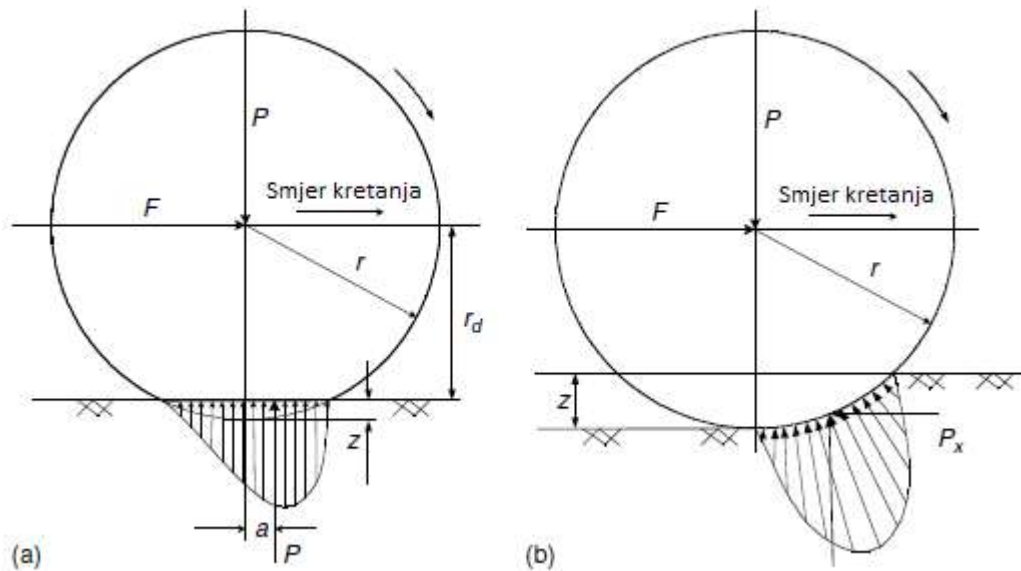
### 3.1.2 Otpori pri kretanju vozila

Kada je vozilo u pokretu, javljaju se otpori koje vozilo mora savladati kako bi se ostvarilo kretanje. Ti otpori su suprotnog smjera od smjera kretanja vozila, kako je prikazano na slici 3.1. Otpori su otpori kotrljanja vozila  $T_{rf}$  i  $T_{rr}$ , aerodinamički otpor  $F_w$ , te otpor nagiba (izraz  $M_v g \sin \alpha$  sa slike 2.1).[1]

#### 3.1.2.1 Otpor kotrljanja

Ovaj otpor kotrljanja kod guma na tvrdim podlogama, prvenstveno je prouzročen izobličenjima materijala koji se koristi u gumama. Izobličenje stvara asimetrično distribuirane sile

koje se javljaju zbog reakcije podloge. Slika 3.2 (a) prikazuje da je veći pritisak pri ulasku u područje kontakta gume sa podlogom, nego kada guma izlazi iz tog područja. Pomaknuta okomita sila reakcije podloge uz nazivno opterećenje (opterećenje na osovini vozila), djeluje na središte kotača stvarajući moment koji se opire kotrljanju kotača. Na mekim podlogama, otpor kotrljanja je prouzročen prvenstveno zbog deformacija podloge po kojoj se vozilo kreće, kao što prikazuje slika 3.2(b). Sila reakcije podloge gotovo u potpunosti prelazi na područje ulaska gume sa podlogom. [1]



**Slika 3.2:** Deformacija kotača i otpor kotrljanja na (a) tvrdoj i (b) mekoj podlozi,[1]

Moment stvoren rezultantom silom reakcije podloge, naziva se moment otpora kotrljanja, te se izražava:

$$T_r = Pa \quad (3.2)$$

Održavajući kotrljanje kotača, sila  $F$  djeluje na središte kotača, i uravnotežuje se sa momentom otpora kotrljanja. Sila se izražava na način:

$$F = \frac{T_r}{r_d} = \frac{Pa}{r_d} = Pf_r \quad (3.3)$$

gdje je  $r_d$  dinamički polumjer gume, a  $f_r = a/r_d$  koeficijent otpora kotrljanja. Koeficijent otpora kotrljanja ovisi o materijalu gume, izvedbi i kvaliteti gume, temperaturi gume prilikom vožnje, pritisku zraka u gumama, brzini voženje, te izvedbi i stanju na prometnici. Sada, moment otpora

kotrljanja može biti zamijenjen ekvivalentom vodoravnom silom koja djeluje na središte kotača u suprotnom smjeru od onoga u kojem se kotači kreću. Ova sila se naziva otpora kotrljanja, te se njezina veličina izražava formulom:

$$F_r = P f_r \quad (3.4)$$

gdje je  $P$  nazivno opterećenje koje djeluje na središte kotača. Kada se vozilo kreće po nagibu, nazivnom opterećenju  $P$ , dodaje se komponenta koje je okomita na podlogu prometnice, odnosno:

$$F_r = P f_r \cos \alpha \quad (3.5)$$

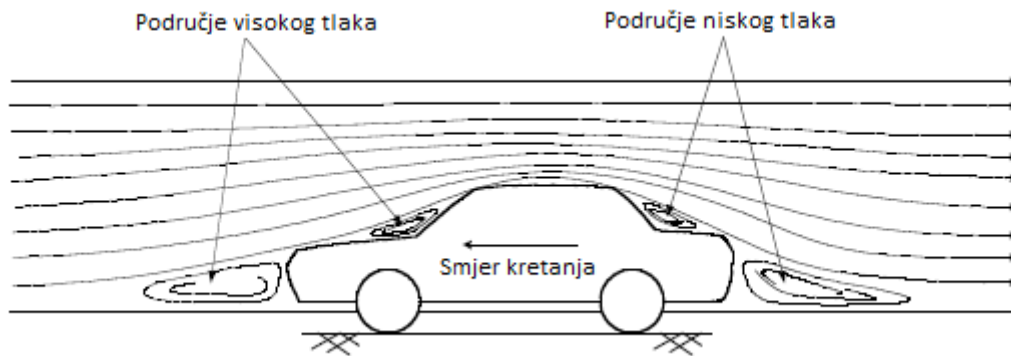
gdje je  $\alpha$  kut prometnice, odnosno nagiba kako pokazuje slika 2.1.[1]

### 3.1.2.2 Aerodinamički otpor

Vozilo dok se kreće određenom brzinom, nailazi na silu zračnog otpora koja se opire njegovom kretanju. Taj sila se naziva sila aerodinamičkog otpora, a sastoji se od dvije komponente: otpora sredstva i unutrašnjeg trenja (viskoznosti). [1]

Otpor sredstva pojavljuje zbog strujanja zraka oko vozila koje se kreće. Sa prednja strane vozila stvara se područje visokog tlaka, a sa stražnje područje niskog tlaka. To se događa zbog toga što strujanje zraka nailazi na otpor u obliku karoserije vozila, te ne može odmah ispuniti prostor ispred i iza vozila. Opisano stanje prikazuje slika 3.3. Rezultantna sila na vozilo naziva se otpor sredstva. [1]

Unutrašnje trenje javlja se zbog međumolekularnih sila. Strujanje zraka pri površini vozila skoro je iste brzine kao i brzina kojom se vozilo kreće, dok molekule zraka koje su udaljene od vozila, nemaju tu brzinu strujanja. Stoga, proizlazi da se molekule zraka kreću u različitom rasponu brzina. Slojevi zraka imaju različite brzine, a molekule susjednih slojeva se međusobno privlače, na način da pokušavaju spriječiti međusobno gibanje slojeva. Razlika između brzina dviju molekula stvara trenje koje rezultira drugom komponentom aerodinamičkog otpora.



Slika 3.3: Otpor sredstva,[1]

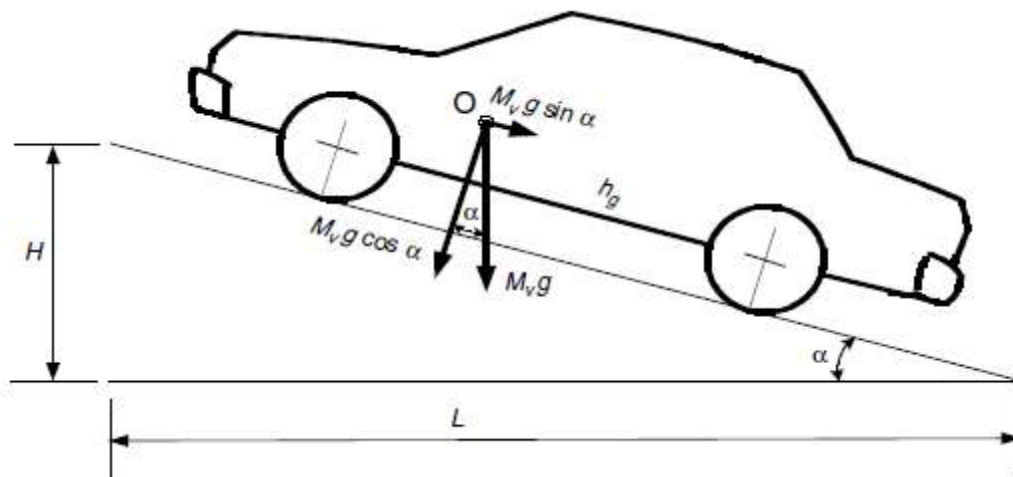
Aerodinamički otpor je funkcija brzine vozila  $v$ , površine prednje strane vozila  $A_f$ , oblika karoserije vozila i gustoće zraka  $\rho$ . Ovaj se otpor matematički izražava:

$$F_w = \frac{1}{2} \rho A_f C_D (v + v_m)^2 \quad (3.6)$$

gdje je  $C_D$  koeficijent aerodinamičkog otpora kojeg karakterizira oblik karoserije,  $v_m$  je komponenta brzine vjetra u smjeru kretanja vozila: Ta komponenta ima pozitivni predznak kada je suprotna smjeru kretanja vozila, a negativni kada je istog smjera kao kretanje vozila. Za različite oblike karoserija vrijede različiti koeficijenti aerodinamičkog otpora.[1]

### 3.1.2.3 Otpor nagiba

Kada vozila ide uz ili niz nagib, njegova težina stvara komponentnu koja je uvijek u smjeru nizbrdice, kao što prikazuje slika 3.4. Ta komponenta se suprotstavlja kretanju vozila pri usponu ili pomaže pri kretanju, ako se radi o spuštanju niz nagib. Kod analize karakteristika vozila razmatra se jedino djelovanje pri uzbrdici, odnosno usponu. Sila kod nagiba koja djeluje na vozilo naziva se obično otpor nagiba.[1]



Slika 3.4: Vozilo pri kretanju nagibom,[1]

Otpor nagiba iz slike 3.4 može se izraziti kao:

$$F_g = M_v g \sin \alpha \quad (3.7)$$

Zbog jednostavnijeg računanja, kut nagiba prometnice  $\alpha$  obično se može zamijeniti vrijednošću nagiba kada je kut nagiba zanemariv. Iz slike 3.4 vidljivo je da se nagiba definira kao:

$$i = \frac{H}{L} = \tan \alpha \approx \sin \alpha \quad (3.8)$$

Ponekad se, otpor kotrljanja i otpor nagiba zajedno nazivaju otpor prometnice, koji se izražava na slijedeći način:

$$F_{rd} = F_r + F_g = M_v g (f_r \cos \alpha + \sin \alpha) \quad (3.9)$$

Opet, zbog jednostavnosti računanja pri zanemarivom kutu prometnice, može pojednostavniti relacija, pa dobivamo:[1]

$$F_{rd} = F_r + F_g = M_v g (f_r + i) \quad (3.10)$$

### 3.1.2.4 Otpor ubrzanja

Ovaj otpor zbog tromosti vozila, te svih rotirajućih dijelova unutar njega, uzrokuje silu tromosti kojom se vozilo odupire promjeni gibanja. Izraz za taj otpor, uzimajući u obzir rotirajuće dijelove vozila, iznosi:

$$F_a = M_v (1 + \delta_{eqm}) \frac{dv}{dt} \quad (3.11)$$



gdje je  $\delta_{eqm}$  je ekvivalentna veličina momenta tromosti koja predstavlja rotirajuće dijelove električnog vozila (kotači i dijelovi pogonskog sklopa).[5]

### 3.2 Formulacija optimizacijskog problema

Sustav prometnica, odnosno cestovna mreža sastoji se od vrhova koji predstavljaju raskrižja ili točke u kojima se prometnice križaju, a bridovi prometnice koje povezuju te vrhove. Trošak bridova predstavlja u stvarnom vremenu energiju potrebnu za prijevoz električnog vozila u trenutku promatranja uzduž segmenta prometnice. Stoga, se cestovna mreža, odnosno sustav prometnica može izraziti pomoću usmjerenog grafa  $G = (V, E, c)$ , gdje  $V$  predstavlja skup vrhova ili raskrižja sa kardinalnim brojem  $n$ , a  $E$  predstavlja skup bridova sa troškom  $c(v_i, v_j): (V \times V) \Rightarrow \mathbb{R}$  sa kardinalnim brojem  $m$ . Pretpostavlja se da svaki vrh ima nagib koji se izražava pomoću dane funkcije  $z(v_i): V \Rightarrow \mathbb{R}_0^+$ . Nadalje, pretpostavlja se da je poznata duljina segmenta prometnice koja se izražava pomoću funkcije  $l(v_i, v_j): (V \times V) \Rightarrow \mathbb{R}^+$ , a brzina u stvarnom vremenu iznosi  $s(v_i, v_j): (V \times V) \Rightarrow \mathbb{R}_0^+$ . [4]

Optimalna ruta ili put  $P_{v_0 \rightarrow v_N}$  od polazne točke  $s$  do odredišne točke  $t$  iskazana je uređenim nizom vrhova  $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_k, v_N)$ , gdje su  $v_0$  i  $v_N$  polazna, te odredišna točka. Svaki pod-niz od dva susljedna elementa uređenog niza je segment prometnice ili brid od usmjerenog grafa  $G$ . Zato je put  $P_{v_0 \rightarrow v_i}$  samo jedan dio puta od polazne točke do odredišne točke, odnosno vrha  $v_k$ . Također  $\mathcal{P}$  je skup svih mogućih ruta od polazne do odredišne točke. Nadalje, vrijedi da je ruta do odredišta moguća, jedino ako svi segmenti rute mogući na putu do odredišta. [4]

Troškovi bridova grafa predstavljaju potrebu energiju da električno vozilo prijeđe udaljenost od polazne od odredišne točke. Kako je ranije opisano, trošak energije ovisi o karakteristikama vozila, brzini i odabranoj ruti. [4]

### 3.2.1 Trošak energije električnog vozila

Zbog potreba izračunavanja i rješavanja optimizacijskog problema, potrebno je troškove energije koji se pojavljuju pri kretanja električnog vozila, matematički formulirati. Prvo je iskazana matematička relacija snage za električno vozilo koja je ovisna o vremenu, te zatim je ona prikazana u odnosu na položaj. Na osnovu, te relacije iskazan je trošak energije za električno vozilo. Međutim, zbog to što izraz za otpor nagiba može poprimiti negativnu vrijednost, relacija za trošak energije dijeli se u dvije nove relacije. Na kraju se prikazuje trošak energije za segment rute.

#### 3.2.1.1 Podjela troška energije

Za električno vozilo koje se kreće uzduž prometnice, uz zbroj sila koje djeluju na njega, snaga iznosi:

$$\begin{aligned} P_D(t) &= f_{P_D}(v, \dot{v}, M_v, \alpha) = (F_w + F_r + F_g + F_a)v \\ &= \frac{\rho}{2} A_f C_D v^3 + M_v g v (f_r \cos \alpha + \sin \alpha) \\ &\quad + M_v (1 + \delta_{eqm}) \dot{v} v \end{aligned} \quad (3.12)$$

gdje je  $F_w$  aerodinamički otpor,  $F_r$  otpor kotrljanja,  $F_g$  otpor nagiba,  $F_a$  otpor ubrzanja,  $M_v$  masa vozila. [4]

Kao važan parametar u gornjoj relaciji, nagib prometnice se kao vrijednost često mijenja ovisno o konfiguraciji prometnice (ravna, uzbrdica, nizbrdica, brdovito područje), te ima veliki utjecaj na potrošnju energije. Nagib prometnice i brzina vozila su bitne veličine s gledišta problema optimizacije rute, te su ovisne o položaju, a ne o vremenu. Stoga, posljednja relacija koja je ovisna o vremenu, nije pogodna za računanje optimalne rute prema odredištu, nego iznos utrošene snage, valja izraziti ovisno o položaju  $s$ . Koristeći transformaciju, dobiva se:[4]

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (3.13)$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{v} \frac{dv}{dt}, v \neq 0 \quad (3.14)$$

Prema tome, relaciju za snagu koje je ovisila o vremenu, možemo sada izraziti ovisno o položaju:

$$P_D(s) = \frac{\rho}{2} A_f C_D v^3 + M_v g f_r v \cos \alpha + M_v g v \sin \alpha \quad (3.15)$$

$$+ M_v (1 + \delta_{eqm}) v^2 \frac{dv}{ds}$$

Iz ove relacije, uz pretpostavku da su brzina i nagib prometnice konstantne za svaki segment rute, može se izraziti utrošena energija za kretanje vozila između početnog i krajnjeg segmenta prometnice ( $v_i, v_{i+1}$ ), kao:

$$E_D(i) = \frac{\rho}{2} A_f C_D v^2 l_i + M_v g f_r l_i \cos \alpha_i + M_v g l_i \sin \alpha_i \quad (3.16)$$

U gornjoj relaciji, treći umnožak zbroja može imati negativnu vrijednost, odnosno taj umnožak je potencijalna energija. Ako je apsolutna vrijednost tog umnoška veća od zbroja ostala dva umnoška, onda je utrošak energije za neki brid negativan. Štoviše, ta dva umnoška odnose se na aerodinamički otpor i otpor kotrljanja. Stoga je, potrebno odvojiti ta tri umnoška u dvije relacije koje izražavaju energiju,  $E_R$  i  $E_P$ . Zato, za svaki segment prometnice  $i$ , može se rastaviti gornja relaciju, u dva različita izraza za energiju:

$$E_R(i) = \frac{\rho}{2} A_f C_D v^2 l_i + M g f_r l_i \cos \alpha_i \quad (3.17)$$

$$E_P(i) = M g l_i \sin \alpha_i \quad (3.18)$$

gdje je  $i \in \{0, \dots, N - 1\}$ . [4]

### 3.2.1.2 Trošak energije za segment rute

Optimizirati rutu od polazišta do odredišta, znači da električnog vozila prođe svakim odgovarajućim segmentom rute od početka do kraja, uz što manji trošak energije. Stoga, svaki dio optimalne rute mora biti ostvariv u tom aspektu, te ulančavanje tih segmenta od početnog do krajnjeg daje ostvarivu optimizaciju rute. Tokom vožnje vozila, mora se voditi računa koji je segment rute ostvariv, te koliki je trošak energije potreban da bi kroz taj segment vozilo moglo

proći, a da ostane dovoljno energije za putovanje do odredišta. Potrebno je modificirati troškove segmenata bridova u skladu sa problemom optimizacije troška energije, na način da troškovi segmenata imaju samo pozitivne vrijednosti, jer se time smanjuje složenost izračuna. [4]

Trošak energije za segmente rute iznosi:

$$c_e(i) = E_R(i) + E_P(i) \quad (3.19)$$

U slučaju kada je moguće samo dio potencijalne energije regenerirati, gornja relacija se izražava na način:

$$c_e(i) = \begin{cases} E_R(i) + \varphi E_P(i) & \text{ako je } E_P(i) \leq 0 \\ E_R(i) + E_P(i) & \text{ako je } E_P(i) > 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

gdje je  $\varphi$  koeficijent regeneracije potencijalne energije kod nizbrdice ( $0 < \varphi < 1$ ).[4]

Segmenti rute koji su navedeni u dvije posljednje relacije mogu imati negativne vrijednosti za troškove energije. Kako bi se mogli primijeniti algoritmi za rješavanje optimizacijskog problema, poput *Dijkstra*, moraju se troškovi energije segmenta rute dosljedno promijeniti u pozitivne vrijednosti. Za tu promjenu koristi se konzervativnost potencijalne energije (regeneracija energije ne ovisi o pojedinim točkama tokom voženje kroz brdoviti dio rute, nego samo o početnoj i onoj krajnjoj za promatrani dio rute) koja pomaže kako bi se to ostvarilo. Zato, vrijedi:

$$c_e^m(i) = \begin{cases} E_R(i) + (\varphi - 1)E_P(i) & \text{ako je } E_P(i) \leq 0 \\ E_R(i) & \text{ako je } E_P(i) > 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

Ova relacija predstavlja trošak energije za segment rute, koji poprima samo pozitivne vrijednosti, zbog toga što algoritmi za optimizaciju rute električnog vozila mogu računati samo pozitivne vrijednosti.[4]

Niz segmenata rute definira se kao  $P_{v_0^j \rightarrow v_{i+1}^j}^j = (v_0^j, v_1^j, \dots, v_{i+1}^j)$ , sa  $i$  nizom od rute koja vodi do odredišta  $P_{v_0^j \rightarrow v_N^j}^j = (v_0^j, v_1^j, \dots, v_N^j)$ . Trošak segmenta rute  $P_{v_0^j \rightarrow v_{i+1}^j}^j$  koji je promijenjen zbrojem potrošene i obnovljene energije, iznosi:[4]

$$c \left( P_{v_0^j \rightarrow v_{i+1}^j}^j \right) = \sum_{k=0}^{k=i} c_e^m(k) \quad (3.22)$$

Kako bi posljednji iskazani izraz bio u skladu sa razmatranim optimizacijskim problemom, moraju se uzeti u obzir ograničenja kapaciteta napajanja, kao što je inicijalno stanje napunjenosti. Stoga, se definiraju veličine  $C_{max}$  i  $C_{min}$  koje predstavljaju maksimalno i inicijalno stanje napunjenosti. Vrijede slijedeći izrazi:[4]

$$\Delta^i = C \left( P_{v_0^j \rightarrow v_{i+1}^j}^j \right) + c_e(i), \quad (i = 1, \dots, N) \quad (3.23)$$

gdje je  $C \left( P_{v_0^j \rightarrow v_{i+1}^j}^j \right)$  izražen kao:

$$C \left( P_{v_0^j \rightarrow v_{i+1}^j}^j \right) = \begin{cases} C_{max} - C_{min} & \text{ako je } i = 0 \\ 0 & \text{ako je } i > 0, \Delta^i < 0 \\ \Delta^i & \text{ako je } i > 0, 0 \leq \Delta^i \leq C_{max} \\ \infty & \text{ako je } i > 0, \Delta^i > C_{max} \end{cases} \quad (3.24)$$

Sada se može definirati dodatni trošak energije za segmente rute, koji uzima u obzir navedena ograničenja baterijskog punjenja. Taj trošak energije izražava se na način:[3.]

$$\widehat{E}_D(i) = \begin{cases} -\Delta^i & \text{ako je } i > 0, \Delta^i < 0 \\ 0 & \text{ako je } i > 0, 0 \leq \Delta^i \leq C_{max} \\ \infty & \text{ako je } i > 0, \Delta^i > C_{max} \end{cases} \quad (3.25)$$

Trošak energije segmenta rute koji se mora uzeti u obzir prilikom optimizacije, uključujući gornju relaciju, iznosi:[4]

$$c_e^m(i) = E_R(i) + (\varphi - 1)E_P(i) + \widehat{E}_D(i) \iff (E_P(i) \leq 0) \wedge (\Delta^i < 0) \quad (3.26)$$

$$c_e^m(i) = E_R(i) + \widehat{E}_D(i) \iff (E_P(i) \geq 0) \wedge (\Delta^i \geq 0) \quad (3.27)$$

### 3.2.2 Problem energetski optimalne rute

Na osnovu svega navedenog u ovom poglavlju, može se definirati problem optimizacije rute s obzirom na trošak energije. Taj problem glasi: za zadani graf troška energije  $G = (V, E, c_e^m)$ , uz polazne i odredišne točke  $s, t \in V$ , te početno stanje napunjenosti  $C_{init}$  i maksimalni kapacitet  $C_{max}$ ,  $(C_{max}, C_{init}) \in R^+$ , problem optimizacije rute je pronaći put  $P^j$  iz  $G$ , od  $s$  do  $t$  uz minimalni trošak cijele rute  $C\left(P_{v_0^j \rightarrow v_N^j}^j\right)$  na temelju relacije za trošak energije segmenta rute  $c_e^m(i)$  koji poprima samo pozitivne vrijednosti.[4]

Ovdje, treba napomenuti da tako, definirani problem optimizacije rute ne uzima u obzir vrijeme potrebno za dolazak do odredišta. Međutim, moguće je proširiti navedeni problem da uzima u obzir i vremensko ograničenje. Energetski optimalne rute su oni putevi koji se mogu iskoristiti na putovanju vozila od polazišta do odredišta, te na kojima je preostali kapacitet napajanja minimalan, odnosno da je na kraju odredišta punjenje baterije maksimalno. Ako pak, ne gledamo što efikasnije iskorištenje baterijskog punjenja i njezin životni vijek, koji zahtjeva rjeđa punjenja i da pri tome baterija bude štoviše ispražnjena, te da se puni do maksimalnog kapaciteta, onda su energetski optimalne rute su oni putevi na kojima je trošak energije minimalan. [4].[6.]

## **4. Analiza informacijskih sustava potrebnih za optimizaciju ruta električnih vozila**

U ovom poglavlju neće biti analiziran, nego opisani sustav koji ima mogućnost izračunavanja najbrže, najkraće (s obzirom na vremensko trajanje putovanja) i energetske najučinkovitije rute. U drugom dijelu biti će prikazan primjer jedne arhitekture koja može poslužiti kao osnova za sustav koji služi za usmjeravanje vozila s obzirom na trošak energije izvora napajanja kod električnog vozila. Na kraju će se prikazati funkcioniranje sustava naziva *Green Navigation* na vizualni način, tako što će se odabrati dvije točke (polazište i odredište), te će se analizirati prikazane vrste triju ruta. Ovaj se sustav koristio pri izradi više znanstvenih radova (pogledati izvore pod [4], [5], [6] i [7]) koji se navode u ovom diplomskom radu. Algoritmi koji se koriste pri različitim navedenim optimizacijama biti će objašnjeni u petom poglavlju.

### **4.1 Energy Optimal Real-Time Navigation System**

Ovo je sustav koji u stvarnom vremenu omogućuje navigaciju vozila s obzirom na energetske optimalnu rutu uz mogućnost prikaza najbrže i najkraće rute.

#### **4.1.1 Svrha EORTNS sustava**

Nagli razvoj tehnologije mobilnog interneta i pametnih uređaja, te dolaskom nove generacije inteligentnih transportnih sustava, povećavaju se količine informacije o trenutnim uvjetima u prometu, a isto tako moguće je i njihovo previđanje. Stvarni vremenski informacijski sustavi pomažu kod usmjeravanja vozila, te u previđanju stanja u prometu. Zbog energetske optimiziranog usmjeravanja, povećava se složenost računanja koja je nastaje zbog negativnih vrijednosti energetske troška pojedinih bridova, promjenjivosti smjera rute, te karakteristika vozila. Komunikacijsko povezivanje i senzori na multimedijским platformama kao što su pametni uređaji omogućuju inženjerskoj zajednici, neslućene mogućnosti praćenja promjena u vremenu.

To uključuje videokamere, brojne senzore (mjerače ubrzanja, svjetlosne senzore, globalno navigacijski sustav, mikrofon), bežične komunikacijske uređaje (GSM, GPRS, WiFi, Bluetooth, infrared), računalnu snagu i memoriju. Zbog svoje portabilnosti, računanja, komunikacijskih mogućnosti, pametni uređaji su promaknuli vozila u pokretne senzore koji su sposobni komunicirati u vezi svojeg položaja i donositi odluke u stvarnom vremenu. Tako da istodobna pojava pametnih uređaja i mobilnog interneta zahtjeva novu generaciju inteligentnih transportnih sustava koja se temelji na zajedničkom principu informiranja i odlukama odlučivanja. Takvi sustavi mogu riješiti u stvarnom vremenu problem optimalne navigacije vozila, gdje se vrijeme putovanja i stanje u prometnoj mreži mijenja s vremenom.[4][5]

Električna vozila imaju sposobnost regenerirati energiju kočenja i usporavanja koja povećavaju radijus kretanja vozila bez potrebe za ponovnim punjenjem. Osim toga, učinkovitost izvora energije vozila se značajno povećala, zbog optimalnog razdvajanja zahtjeva za energijom u određenom trenutku. Optimalno razdvajanje energije može biti izvedeno u stvarnom vremenu, na temelju izračunate rute od polazišta do odredišta koja može biti u optimalnom vremenu (najbrže), optimalnoj udaljenosti (najkraća) ili pak energetski optimalna.[4]

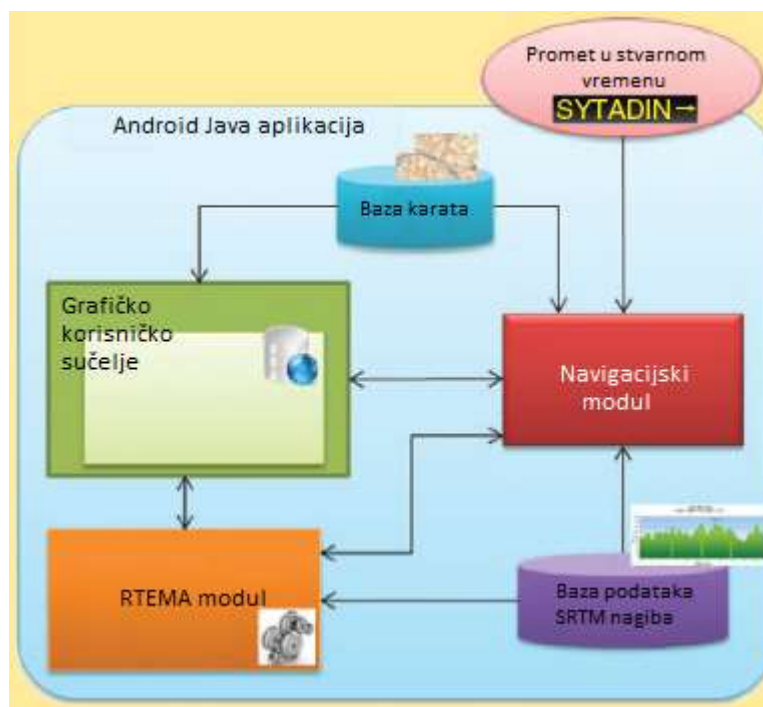
#### **4.1.2 Uvod u EORTNS sustav**

*Energy Optimal Real Time Navigation System* (EORTNS) koji je implantiran na pametnom uređaju, tabletu Samsung Galaxy, sposoban je izračunavati rute do odredišta na temelju informacija dobivenih iz SYTADIN (informacijski sustav stvarnog stanja u prometu). U ovom sustavu razmatra se upravljanje energijom u stvarnom vremenu za hibridna električna vozila. Ona se sastoje od baterijskog punjenja i superkondenzatora. Pored mogućnosti energetski optimalnog usmjeravanja vozila do odredišta, računajući trenutno stanje prometa, ovaj sustav može razdvajati izvor energije na način da se napajanje vozila vrši iz baterija ili superkondenzatora.[4]

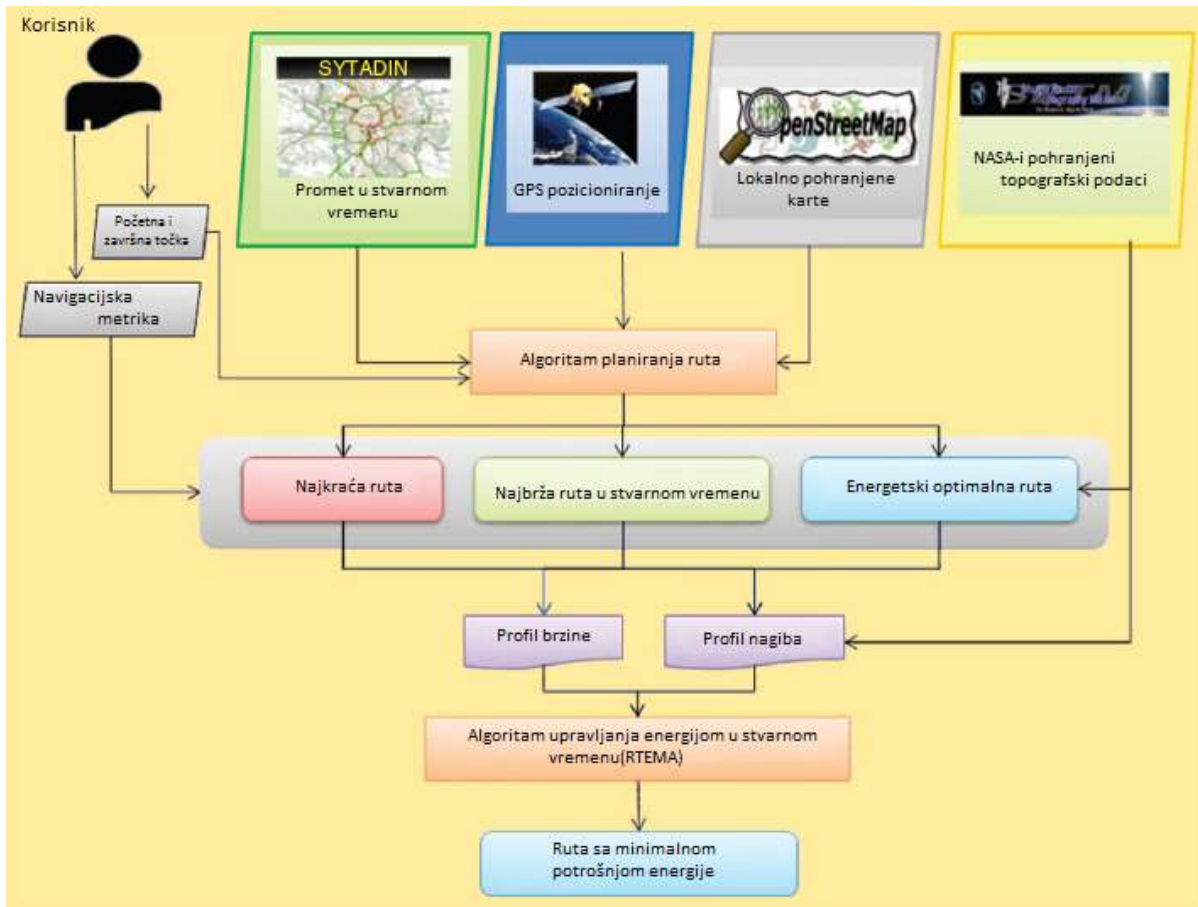
Sustav EORTNS sastoji se od četiri bitna modula: navigacijskog, energetski optimizacijskog, grafičkog korisničkog sučelja i algoritamskog (ovaj modul je zadužen za upravljanje energijom u stvarnom vremenu). Slika 4.1, prikazuje glavne komponente arhitekture sustava, a slika 4.2, dijagram toka za njegovu softversku arhitekturu. Modul grafičkog korisničkog



sučelja obavlja interakciju sa korisnikom, crtanje optimalno izračunate rute na karti, te prikazuje izračunati napredak i rezultate optimizacije. Modul zadužen za navigaciju upravlja sa bazom karata iz koje učitava prometno područje. U ovom modulu podaci o statičkim točkama i segmentu rute nadopunjeni su sa prometnim informacijama u stvarnom vremenu, kao što su brzina i vremensko trajanje potrebno za prijelaz svakog segmenta rute. Nadalje, informacije o trodimenzionalnom nagibu i brzina izračunavaju se za svaki diskretnu točku svake izračunate rute do određiškog segmenta. Informacija o nagibu je potrebna da bi se mogla dobiti plan potrebihe energija do određiškne točke, kako bi se moglo na osnovu toga, pravilno obaviti razdvajanje napajanja u stvarnom vremenu između baterije i superkondenzatora.[4]

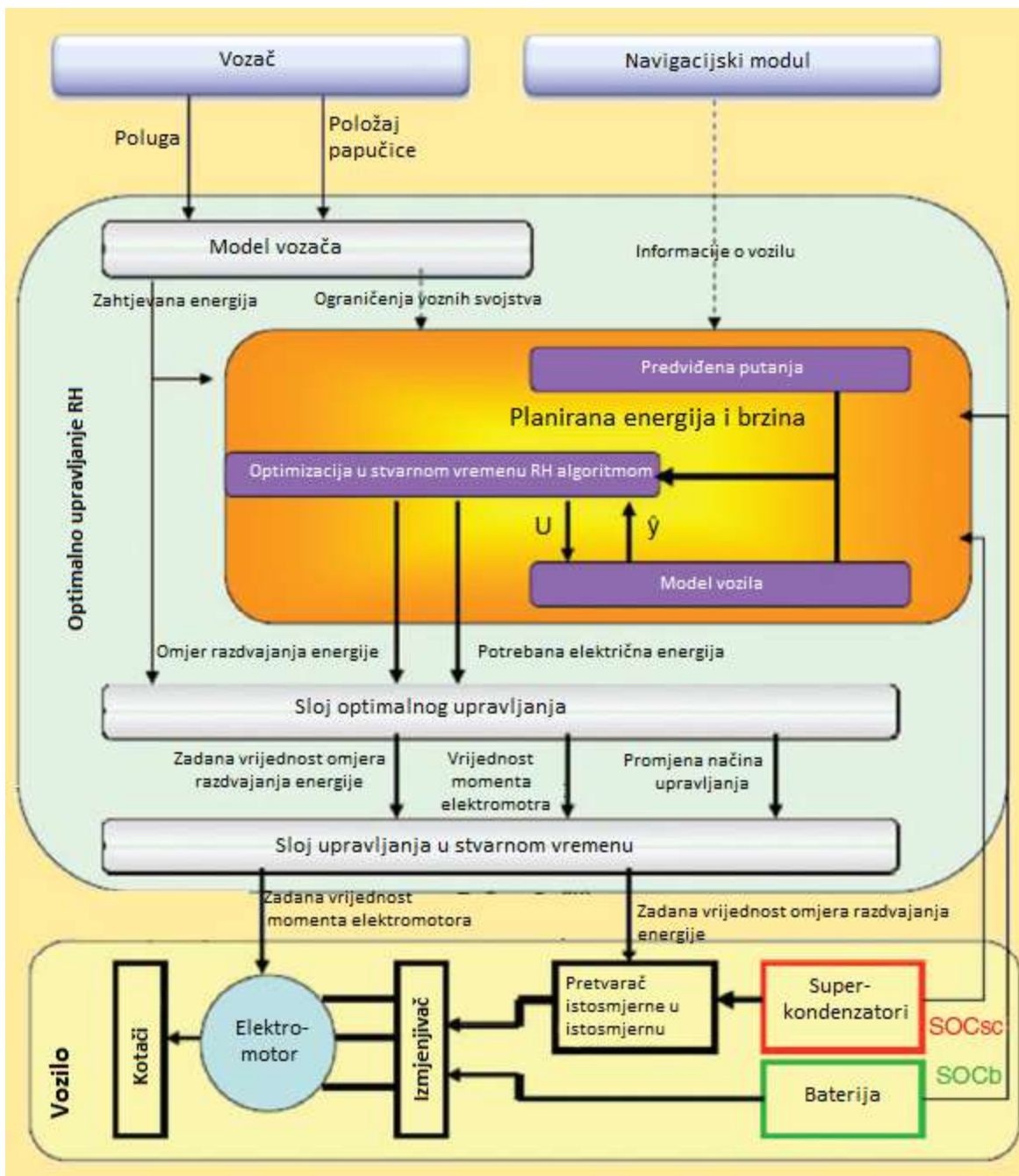


**Slika 4.1:** Arhitektura EORTNS sustava,[4]



Slika 4.2: Dijagram toka za sustav EORTNS,[4]

Softverski modul *Real Time Energy Management Algorithm* (RTEMA) jedan je dio EORTNS sustava, kao što prikazuje slika 4.3. Ovaj modul računa omjer razdvajanja energije iz baterija i superkondenzatora. Iz navigacijskog modula dobiva se u stvarnom vremenu ruta do odredišta koja se sastoji od brzine segmenata rute i njezinih geografskih koordinata u tri dimenzije. Ovi podaci se koriste za računanje profila energije vozila za svaku rutu. Iz profila energije, računaju se gubici energije iz baterija i superkondenzatora, te elektromotora. Modul RTEMA minimizira ove gubitke unutar ograničenja koje nameće dinamika vozila, model baterije i superkondenzatora, te kombinirajući s filozofijom koja se naziva RH (engl. *Receding Horizon*), te sa algoritmom dinamičkog programiranja. Dobiveni rezultati su proporcije razdvojene energije koje služe za pravilnu distribuciju energije iz izvora napajanja, (upravljanje energijom koja dolazi iz baterija i superkondenzatora). [4][5]



Slika 4.3: Modul RTEMA prikazan kao funkcionalni dijagram toka,[4]

U sustavu EORTNS geografski podaci su izvezeni sa servera *OpenStreetMap* (OSM) koji pruža besplatne podatke u vezi usmjeravanja. OSM je karta izvezena u binarnu datoteku sa jednostavnom strukturom koja sadrži nekoliko tablica sa zapisima. Svaki zapis ima jednaku duljinu od jednog bajta, tako da su podaci lako dobavljivi, ako je poznat identifikator tog zapisa. Izvezeni

su podaci samo koji su bitni za usmjeravanje i karta je pohranjena u formatu koji je prikladan za opisivanje usmjerenog grafa. Nadalje, kreirane su tri tablice sa vrhovima, bridovima i geometrijom. Tablica s vrhovima sadrži jedino povezane vrhove ili vrhove gdje se mijenjaju neke karakteristike prometnice (klasa prometnice, brzina,...), te novi brid treba slijediti. U tablice koje sadrže bridove, pohranjuju se informacije koje su potrebne za računanje troška putovanja koji se odvija tim bridom. Tablice sa geometrijom pohranjuju posredničke vrhove koji opisuju konfiguraciju prometnice (ravna, nagib,...). Informacije iz potonje vrste tablica nisu potrebne za usmjeravanje, ali se koriste za algoritme energetske optimizacije i crtanje ruta u grafičkom korisničkom sučelju.[4]

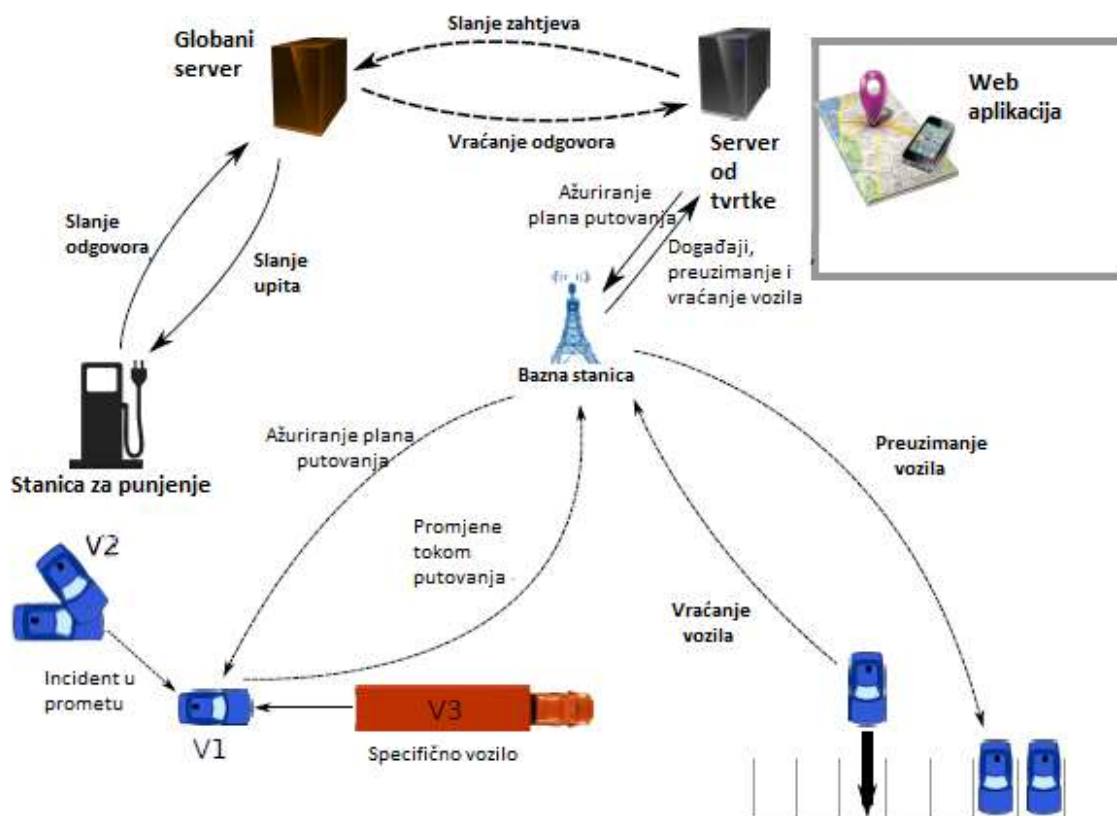
Za dodavanje treće dimenzije, služi izvezena OSM karta koja ima dvije mogućnosti. Jedna je da se podaci dobiju od zahtjeva izračunatog nagiba rute iz neke internetske usluge, a druga je mogućnost, da se pripadajući podaci preuzmu iz uređaja koji ima pohranjene datoteke sa uzdignućima. Prva mogućnost koristi se kao inicijalno rješenje, kada je potrebno dobiti podatke o nagibu, koji se pak koriste u RTEMA modulu kod profila energije. Druga mogućnost je kompliciranije rješenje, zbog toga što se dohvaćaju NASA-ine generirane datoteke, odnosno *Shuttle Radar Topography Mission* (SRTM), stvarajući trenutno baze podataka za tu primjenu. Prednost potonje navedene mogućnosti su neovisnost interneta i brzo dohvaćanje podataka o nagibu za zadane koordinate. Pojedini zahtjev prema SRTM sadrži listu svih elemenata geografskih koordinata. Binarne datoteke SRTM dane sa strane NASA, podijeljene su u rasporede jednog stupnja po jednom stupanju, zemljopisne širine i dužine. [4]

Ovaj informacijski sustav koristi mrežnu uslugu *SYSTADIN*, koja pruža informacije o prometu za francusko područje. Ova mrežna usluga omogućuje ažuriranje informacija za svaki segment rute unutar nekoliko minuta (tri do pet minuta). Na taj način se može dobiti trenutna brzina odvijanja prometa nekog segmenta ili prometno stanje za svaki vrh (protočan promet, zagušenje, zatvoreno za promet) u internoj bazi podataka.[4]

## 4.2 Arhitektura za upravljanje električnim vozilima s obzirom na trošak energije izvora napajanja

Ovdje, opisana arhitektura za upravljanje električnim vozilima omogućuje ekonomično planiranje plana putovanja, na način da se biraju optimalne rute s obzirom na potrošnju napajanja vozila. U cilju smanjivanja potrošnje provodi se sakupljanje informacija u vezi topologije prometnice (nagibi, polazišta, odredišta, itd.), vremenskih uvjeta, karakteristika vozila, profila vozača, stanja prometa i lokacija stanica za punjenje. Stoga, primjerice zbog slabog stanja napunjenosti baterije nekog vozila, proračunavaju se alternativni smjerovi kretanja do najbliže stanice za punjenje, koji se onda nude vozaču na izbor.[7]

Arhitektura sustava se sastoji od tri glavna dijela, a oni su: globalni server, server od tvrtke, električna vozila i stanice za punjenje. Slika 4.4, prikazuje arhitekturu za upravljanje. Proračun za optimalnu rutu se izvodi na način, da prvo klijent izabere vozilo i unese informacije u vezi putovanja na serveru od tvrtke. Nakon toga, server od tvrtke šalje zahtjev prema globalnom serveru, koji izračunava sve moguće rute, uzimajući u obzir konfiguraciju terena do odredišta, vremenske uvjete, te druge korisne informacije. Onda, globalni server računa trošak električne energije za svaki segment rute na temelju prethodnih informacija. Stanje napunjenosti baterije je isto tako uzeto u obzir prilikom računanja, pa ako je razina napunjenosti ispod nekog određenog praga, onda će se preko globalnog servera istražiti najbliža električna stanica pomoću njegove baze podataka. Kada se na kraju izračunaju rute, rezultati se vraćaju serveru od tvrtke i prikazuju preko web aplikacije na karti krajnjem korisniku, sa svim rasporedima ruta i detaljima o trošku električne energije vozila. Naposljetku, krajnji korisnik, odnosno vozač izabire odgovarajuću rutu preko svojeg uređaja za GPS navigaciju u vozilu ili pametnog uređaja. Tokom putovanja, informacije o vožnji se pohranjuju unutar vozila, u svrhu povećanja kvalitete budućeg planiranja ruta.[7]



Slika 4.4: Prikaz arhitekture za upravljanje električnim vozilima,[7]

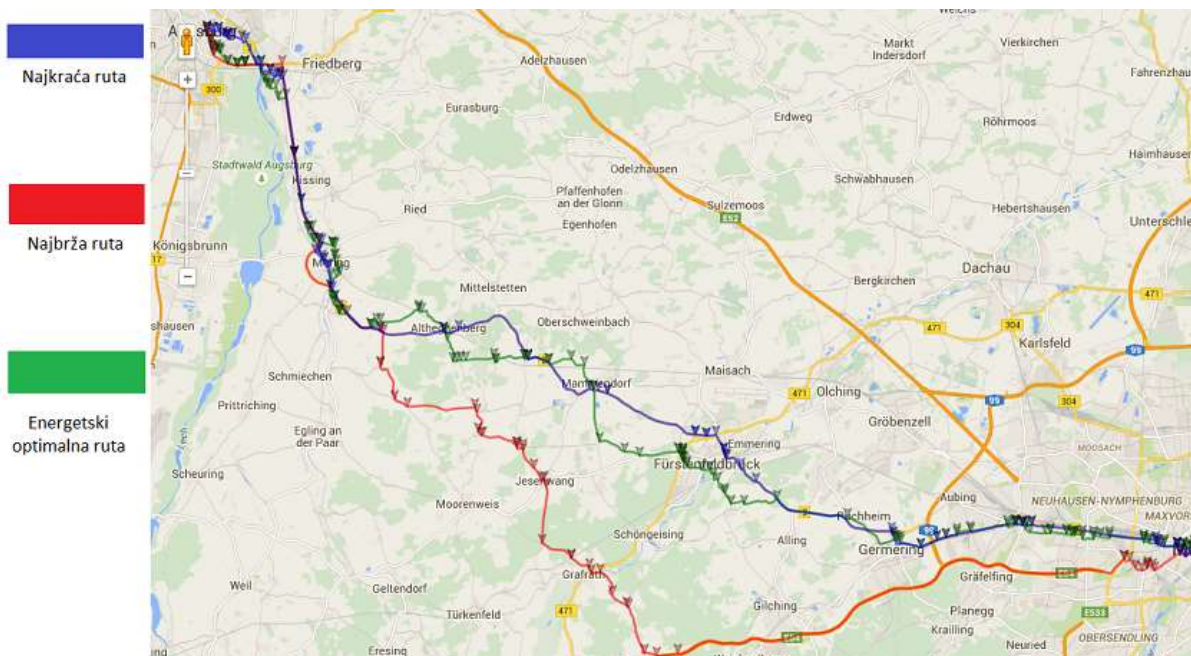
Za računanje troška energije kod ove arhitekture, prvo se računala sila koja je potrebna da bi se vozilo pokrenulo pri određenoj brzini, u drugom koraku računala se potrebna snaga za nadvladavanje otpora pri kretanju vozila, te na kraju korisna snaga elektromotora. Nakon toga za dobivanje troška svakog segmenta rute, množila se korisna snaga motora s vremenom putovanja potrebnog za prijelaz tog segmenta. Na kraju su se zbrojili pojedini umnošci svake rute, te se na taj način dobio ukupni trošak energije. [7]

### 4.3 Sustav Green Navigation

Green Navigation je prototipni sustav za računanje energetski optimalnih ruta, te predviđanje preostalog dosegva voženje električnog vozila, s obzirom na ispražnjenost punjenja. Sastoji se od središnjeg servera koji obavlja proračune, te klijenta koji pristupaju različitim

uslugama koje pruža ovaj server. Središnji server koristi besplatno dostupne geoprostorne podatke OSM (engl. *OpenStreetMap*), te NASA-ine karte sa izraženim nadmorskim visinama. Sustav za nekoliko različitih tipova vozila izračunava najbližu, najkraću, te energetske optimalnu rute za zadane točke polazišta i odredišta, uz različita stanja napunjenosti baterijskog punjenja. Ovaj sustav za usmjeravanje može se koristiti za daljnje istraživanje u drugim sustavima (kao što se koristio za sustav u opisan u 4.1 dijelu ovog poglavlja), kao što su mrežna navigacija, upravljanje voznim parkom ili pak za viševrsto usmjeravanje.[8]

Na slici 4.5 vizualno je prikazano kako sustav Green Navigation (dostupna mrežna verzija sustava na [9]) funkcioniše. Za odabrane točke polazišta (Munich) i odredišta (Augsburg) (prototip sustava ograničen je na njemačku regiju, Bavarsku), sustav je izračunao je najkraću (plavo označena ruta), najbržu (crveno označena ruta), te energetske optimalnu rutu (zeleno označena ruta). Najmanje se razlikuju po pravcu kretanja segmenta rute, najkraća i energetske optimalna ruta, dočim većinu putovanja između polazišta i odredišta, najbrža ruta se podosta razlikuje od druge dvije izračunate rute.



Slika 4.5: Primjer funkcioniranja Green Navigation sustava za odabrane točke,[9]

Na slici 4.6, vidi se na bitna razlika između ruta na jednom dijelu putovanja (uokvireni dio) za odabrane točke (smjer Kreuth-Bayrischzell), odnosno za neke segmente rute koji imaju manji nagib. Na drugim dijelovima, odabir energetski učinkovitije rute, ne bi imao poželjni učinak, zbog većeg troška, nego se poklapa, sa najkraćom i najbržom rutom.

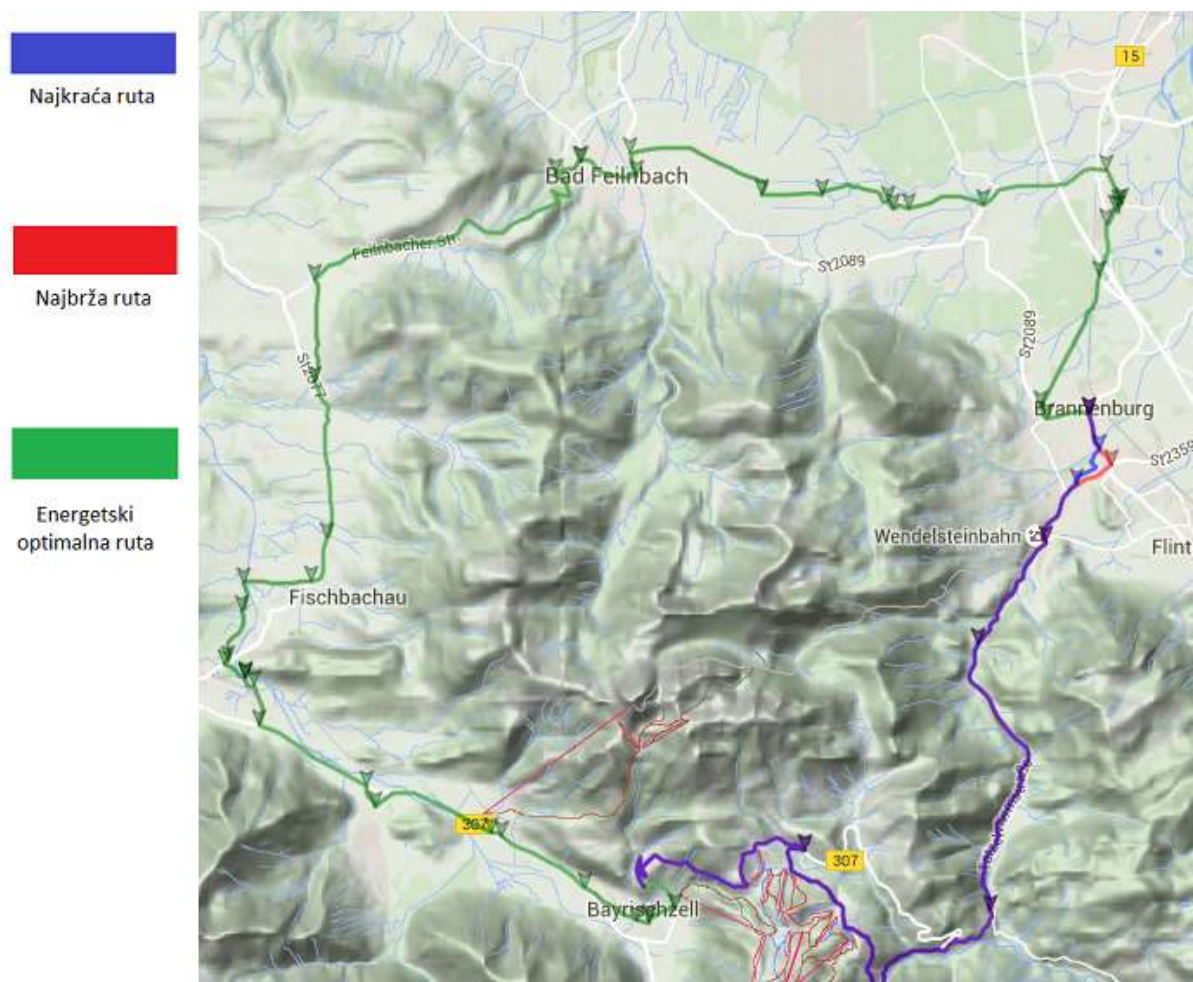


**Slika 4.6:** Primjer funkcioniranja Green Navigation sustava s obzirom na brdovitu konfiguraciju terena,[9]

Na slici 4.7, prikazana je isto kao i na prethodnoj slici, vizualna razlika između ruta po kojima se odvija putovanje za dvije unaprijed odabrane točke polazišta i odredišta (smjer Bayrischzell-Brannenburg). Zbog očite brdovite konfiguracije terena između dvije odabrane točke, promatrani sustav nije odabrao energetsku rutu, da ide preko takve konfiguracije, nego je zaduženi algoritam sustava za energetsku optimizaciju rute s obzirom na trošak energije izvora napajanja vozila, izabrao putovanje za segmente rute koji imaju manji nagib, a to je sukladno izloženoj tematici u 3. poglavlju kod definiranja optimizacijskog terena. Najkraća i najbrža ruta se kao i na prethodnoj



slici, gotovo poklapaju u svim segmentima tokom trajanja putovanja, te se uvelike razlikuju od energetske rute, jer kod njihovog izračunavanja, nagib prometnice se ne uzima u obzir, nego veličina vremena, odnosno brzine.



**Slika 4.7:** Detaljni prikaz funkcioniranja Green Navigation sustava s obzirom na brdovitu konfiguraciju terena,[9]

## 5. Izbor lokacija stanica za punjenje baterija

Zbog sve većeg interesa za zaštitu okoliša i nedostatka resursa, ušteda energije dolazi sve više do izražaja. Stoga, električna vozila zbog svojih obilježja kao što su ušteda energije i ekološka prihvatljivost, sve više dolaze u središte zanimanja državnih vlada, tvrtki, te međunarodnih ekoloških organizacija. Zbog sve toga, važnost izbora lokacija stanica za punjenje baterija su pretpostavka i temelj za širenje upotrebe električnih vozila.[10]

### 5.1 Matematički modeli

Da bi se moglo pristupiti izboru lokacija stanica za punjenje, moraju se prvo utvrditi modeli optimizacije poput troška, problem dimenzioniranja i lociranja, te ograničenja distribucijske mreže.

#### 5.1.1 Planiranje modela optimizacije

Kod planiranja potrebno je uzeti u obzir troškove izgradnje, ali i buduće društvene koristi od izgrađenih stanica za punjenje. Uzimajući u obzir interese elektroprivrednih subjekata i korisnika stanica za punjenje, društvena korist služi za planiranje modela optimizacije. Formula troška iznosi:

$$\min C = \sum_{i=1}^N (C_{1i} + C_{2i} + C_{3i} + C_{4i} + C_{5i}) \quad (5.1)$$

gdje je  $N$  broj stanica za punjenje, za  $i$  stanicu  $C_{1i}$  je trošak građevinskog ulaganja,  $C_{2i}$  trošak upravljanja i održavanja,  $C_{3i}$  su troškovi gubitaka,  $C_{4i}$  trošak punjenja za korisnike,  $C_{5i}$  trošak gubitka za korisnika na putu do stanice za punjenje.[10]

Troškovi građevinskog ulaganja, iznose:

$$C_{1i} = (e_i a_t + m_i b + c_i l_{ki} + \omega_i) \frac{r_0(1+r_0)^z}{(1+r_0) - 1} \quad (5.2)$$

gdje  $e_i$  broj transformatora,  $a_t$  cijena transformatora,  $m_i$  je broj stanica za punjenje,  $b$  cijena stanice za punjenje,  $l_{ki}$  je udaljenost kabela stanice od pristupa distribucijskoj mreži,  $c_i$  cijena

kabla po kilometru,  $\omega_i$  je trošak infrastrukture,  $r_0$  je diskontna stopa, a  $z$  predstavlja razdoblje izgradnje.

Troškovi upravljanja i održavanja izražavaju se sukladno postotku od početnog ulaganja. Uz pretpostavku da je  $\eta$  faktor postotka, troškovi za  $i$  stanicu izračunavaju se:

$$C_{2i} = (e_i a t + m_i b + c_i l_i + \omega_i) \eta \quad (5.3)$$

Troškovi gubitaka iznose  $i$  stanicu iznose:

$$C_{3i} = e_i (C_{Fe} + C_{Cu}) T_v 365 p + m_i (C_L + C_{Pu}) k_t T_v 365 p \quad (5.4)$$

gdje su veličine  $C_{Fe}$  i  $C_{Cu}$ , gubici u željezu i bakru od transformatora. Veličina  $C_L$  izražava gubitke u kabelu  $i$  stanice za punjenje,  $C_{Pu}$  je gubitak punjača,  $k_t$  je omjer punjača koji rade u isto vrijeme,  $T_v$  je efektivno vrijeme punjenja za pojedinu stanicu, a  $p$  je cijena punjenja. Ovi troškovi računaju se za godinu dana, zato se i pojavljuje broj dana za to razdoblje u gornjoj relaciji.[10]

Trošak punjenja za korisnike, iznosi:

$$C_{4i} = \sum_{j=1}^{N_{um}} p q_j P_v 365 \quad (5.5)$$

gdje su veličine,  $N_{um}$  broj čvorova u kojima se zahtjeva punjenje,  $q_j$  je broj električnih vozila u točki  $j$  u kojoj se zahtjeva punjenje, a  $P_v$  je prosječni kapacitet električnih vozila. Ovaj trošak je kao i prethodni iskazan za godišnju razinu.[10]

Trošak gubitaka za korisnike na putu do stanice, sastoji se dva dijela. Prvi dio je  $h_1$  trošak energije, a drugi je  $h_2$  trošak vremena. Ovaj trošak se formulira na slijedeći način:

$$C_{5i} = h_1 + h_2 = \frac{\sum L_i}{g_{kh}} p 365 + \frac{\sum L_i}{v} k 365 = \sum_{j=1}^{N_{um}} d_{ij} q_j \left( \frac{p}{g} + \frac{k_h}{v_e} \right) 365 \quad (5.6)$$

u ovoj relaciji  $g_{kh}$  je broj prijeđenih kilometara po kilovat-satu,  $k_h$  trošak vremena korisnika u jednom satu, a  $v_e$  je prosječna brzina električnih vozila,  $d_{ij}$  je udaljenost između čvora potražnje  $j$  i stanice za punjenje  $i$ ,  $\sum L_i$  je zbroj težinskih udaljenosti od stanice za punjenje  $i$  do čvorova potražnje u uslužnom području.[10]

## 5.1.2 Problem dimenzioniranja i lociranja

Kod izbora za lociranje stanica za punjenje, potrebno je uzeti u obzir zadovoljstvo korisnika i trošak kabela od stanice do pristupa na distribucijsku mrežu električne energije. Lociranje se može izraziti pomoću slijedeće relacije:

$$\min C_{stanica,i} = c_i l_i \frac{r_0(1+r_0)^z}{(1+r_0)^z - 1} + C_{5i} \quad (5.7)$$

Usluga punjenja na stanici je slučajni događaj. Stoga, se usluga punjenja može optimizirati pomoću teorije redova čekanja.[10]

## 5.1.3 Ograničenja distribucijske mreže

Ograničenja za ovu mrežu odnose se na relacije jednakosti i nejednakosti između njih. Ograničenje jednakosti se odnosi na jednadžbu toka, nejednakosti ograničenja, pak na druge čimbenike kao što su ograničenje kapaciteta i siguran rad distribucijske mreže.

Ograničenje kapaciteta trafostanice, iznosi:

$$S_i \leq S_{i,max} \quad (5.8)$$

gdje je u gornjoj nejednakosti,  $S_i$  opterećenje trafostanice, a  $S_{i,max}$  je maksimalno opterećenje kojim možemo opteretiti trafostanicu.

Ograničenje snage punjenja, iznosi:

$$\sum_{i=1}^N P_{Ci} \leq P_C^{max} \quad (5.9)$$

U ovoj nejednakosti, veličina  $P_{Ci}$  predstavlja snagu punjenja od stanice  $i$ , a  $P_C^{max}$  je maksimalna snaga punjenja kojom se distribucijska mreža može opteretiti.

Naponsko ograničenje čvora, iznosi:

$$U_i^{min} \leq U_i \leq U_i^{max}, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (5.10)$$

gdje je  $U$  napon pojedinog čvora  $i$ , a veličine  $U_i^{min}$  i  $U_i^{max}$  su minimum i maksimum napona od čvora  $i$ . Oznaka  $M$  je broj čvorova u distribucijskoj mreži.

Maksimalna ograničenje električne struje napajanja, iznosi:

$$|I_{ij}| \leq I_{ij,max} \quad i, j = 1, 2, \dots, M \quad (5.11)$$

gdje su veličine  $I_{ij}$  i  $I_{ij,max}$  struja i maksimalna vrijednost struje, koje teku kroz vodič napajanja  $ij$ .

Nadalje, ograničenje kapaciteta pristupne točke prema distribucijskoj mreži, iznosi:

$$P_{C,ij} \leq P_{j,max} \quad (5.12)$$

ovdje je  $P_{C,ij}$  snaga punjenja od stanice  $i$  koja povezuje mrežni čvor  $j$ . Veličina  $P_{j,max}$  je maksimalna snaga punjenja kojom se čvor  $j$  može opteretiti.[10]

## 5.2 Proces planiranja

U ovom dijelu prikazan je proces planiranja kroz nekoliko koraka. Analizom slučaja ilustrativno su objašnjeni prethodno opisani koraci.

### 5.2.1 Opis procesa

Proces planiranja se sastoji od slijedećih nekoliko koraka. Prvo, se minimalni i maksimalni broj ( $N_{min}$  i  $N_{max}$ ) stanica za punjenje procjenjuje u skladu sa maksimalnim i minimalnim kapacitetom ( $S_{max}$   $S_{min}$ ) ti istih stanica. Zato vrijedi odnos:  $N_{min} \leq N \leq N_{max}$ . U drugom koraku, se pronalazi optimalni plan planiranja za svaki  $N$ . Za vrijeme trajanja procesa, navedena ograničenja distribucijske mreže uzimaju se u obzir. Početne lokacije određuju se pomoću metode koordinata. Težinski *Voronoi* graf koristi se za raspodjelu prostora na uslužna područja. Lokacije su izabrane sa ciljem da se minimizira zbroj troškova gubitaka za korisnike na putu do stanice za punjenje i trošak ulaganja u izgradnju stanica. Optimizacija lokacija za stanice, obavlja se pomoću teorije redova čekanja. Na kraju se uzimaju u obzir interesi elektroprivrednih subjekata i korisnika, te se odabire optimalni program planiranja za stanice, počevši od veličine  $N_{max} - N_{min} + 1$ , minimizirajući trošak društvene koristi.[10]

## 5.2.2 Analiza slučaja

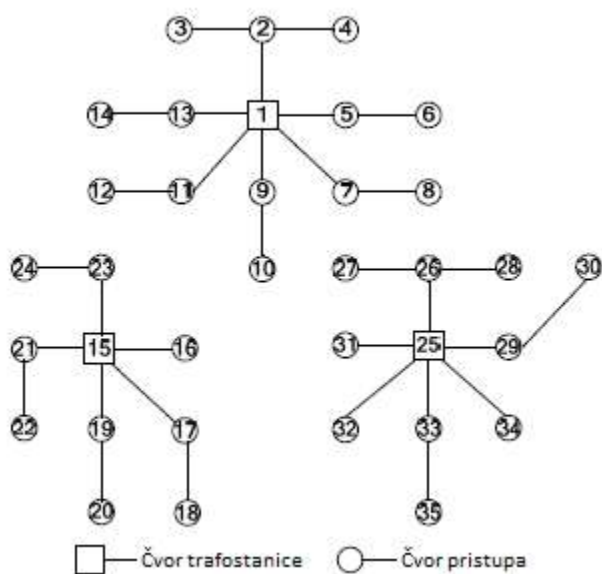
Kako bi se ilustrativno prikazali koraci opisani u prethodnoj točki, potrebno je načiniti analizu slučaja. Regionalna prometna mreža prikazana je na slici 5.1. Ona se sastoji od 48 točaka koja se presijecaju, te je planirano područje veličine od 63 četvorna kilometra. Koordinate navedenih točaka sa veličinom toka prometa, prikazani su u tablici 1. Nadalje, u ovoj analizi imamo tri trafostanice sa određenim karakteristikama (sa nazivnim vrijednostima od 35/10kv i  $2 \times 16\text{MVA}$ ) sa 32 čvora opterećenja u planiranom području. Struktura distribucijske mreže prikazana je na slici 5.2, a koordinate i veličine opterećenja svakog pojedinog distribucijskog čvora prikazani su u tablici 2. [10]

1	2	3	4	5	6	7	8
16	15	14	13	12	11	10	9
17	18	19	20	21	22	23	24
32	31	30	29	28	27	26	25
33	34	35	36	37	38	39	40
48	47	46	45	44	43	42	41

**Slika 5.1:** Prometna mreža za planirano područje,[10]

**Tablica 2.:** Koordinate i prometni tok za svaku točku prometne mreže,[10]

Br.	X	Y	Prometni tok	Br.	X	Y	Prometni tok	Br.	X	Y	Prometni tok
1	1	6	8990	17	1	4	4068	33	1	2	6110
2	2	6	5626	18	2	4	1918	34	2	2	4370
3	3	6	7190	19	3	4	2484	35	3	2	2654
4	4	6	6986	20	4	4	6080	36	4	2	5132
5	5	6	10940	21	5	4	5320	37	5	2	7052
6	6	6	8608	22	6	4	4198	38	6	2	8420
7	7	6	5368	23	7	4	2628	39	7	2	6802
8	8	6	8200	24	8	4	3424	40	8	2	8658
9	8	5	8658	25	8	3	4024	41	8	1	8400
10	7	5	4808	26	7	3	2870	42	7	1	5476
11	6	5	8420	27	6	3	4312	43	6	1	9022
12	5	5	6816	28	5	3	6422	44	5	1	6432
13	4	5	4530	29	4	3	5086	45	4	1	2986
14	3	5	2654	30	3	3	2484	46	3	1	7192
15	2	5	4170	31	2	3	2118	47	2	1	5686
16	1	5	6110	32	1	3	4264	48	1	1	10030



**Slika 5.2:** Struktura distribucijske mreže planiranog područja,[10]

**Tablica 3.:** Koordinate i opterećenje svakog čvora distribucijske mreže,[10]

Br.	X	Y	Opterećenje [MV]	Br.	X	Y	Opterećenje [MV]	Br.	X	Y	Opterećenje [MV]
1	4.5	5.5	0	13	3.5	5.5	0.70	25	6.5	2.5	0
2	4.5	6.5	0.90	14	2.5	5.5	1.25	26	6.5	3.5	0.85
3	3.5	6.5	1.15	15	2.5	2.5	0	27	5.5	3.5	0.95
4	5.5	6.5	1.05	16	3.5	2.5	2.40	28	7.5	3.5	0.75
5	5.5	6.5	1.10	17	3.5	1.5	1.15	29	7.5	2.5	1.35
6	6.5	4.5	1.20	18	3.5	0.5	1.35	30	8.5	3.5	0.65
7	5.5	4.5	0.75	19	2.5	1.5	1.60	31	5.5	2.5	2.10
8	6.5	4.5	1.35	20	2.5	0.5	2.20	32	5.5	1.5	2.20
9	4.5	4.5	0.85	21	1.5	2.5	1.50	33	6.5	1.5	1.05
10	4.5	3.5	1.15	22	1.5	1.5	0.60	34	7.5	1.5	0.85
11	3.5	4.5	0.65	23	2.5	3.5	1.50	35	6.5	0.5	0.55
12	2.5	4.5	1.40	24	1.5	3.5	0.40				

U ovoj analizi, dane su brojčane vrijednosti pojedinim parametrima i veličinama. Stoga, je kapacitet svakog vozila je  $50 kWh$ , a snaga svakog pojedinog punjača je  $96kw$ , te u svakoj stanici nalazi ih se najmanje šest, a najviše trideset. Učinkovitost punjača je 0.9, odnosno 90%, a faktor slučajnosti 0.9. Električno vozilo sa jednim kilovat satom može preći sedam kilometara, a cijena troška energije je 0.8 juana po kilometru. (kineska nacionala valuta, s obzirom na analiza slučaja provedena sa strane kineskim autora). Prosječna brzina električnih vozila je  $20 km/h$ , a vremenski trošak korisnika iskazuje se na način da se računa potrošen novac u jedinici vremena (ovdje 17 juana po jednom satu).[10]

Izračun se na osnovu opisanog procesa u dijelu 5.2.1, radi u nekoliko slijedećih koraka.

1. Procjena broja stanica za punjenje:  $N_{min} = 5, N_{max} = 20$ .
2. Izračun troškova za programe  $N_{max} - N_{min} + 1$ , prikazan je u tablici 3.
3. Iz tablice 3. (jedinica je deset tisuća juana), je vidljivo kada je broj stanica za punjenje jednak 7, da je onda trošak društvene koristi najmanji (72.92 milijuna juana)
4. U posljednjem koraku određuju se lokacije, broj punjača po jednoj stanici, uslužna područja za sedam stanica koje imaju najmanji trošak društvene koristi.

Iz tablice 4., može se očitati broj punjača za svaku stanicu, te koordinate odabranih lokacija za stanice i broj čvorova koji su se našli u određenom uslužnom prostoru. Na slici 5.3 prikazan je vizualni raspored stanica i granice uslužnih područja, a slika 5.4 prikazuje lokaciju povezivanja odabranih stanica na distribucijsku električnu mrežu.

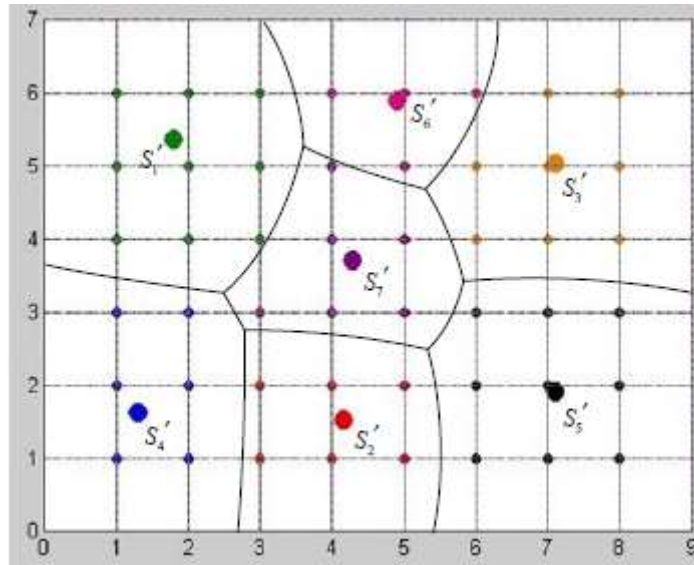


**Tablica 4.:** Trošak društvene koristi za svaki pojedini program planiranja,[10]

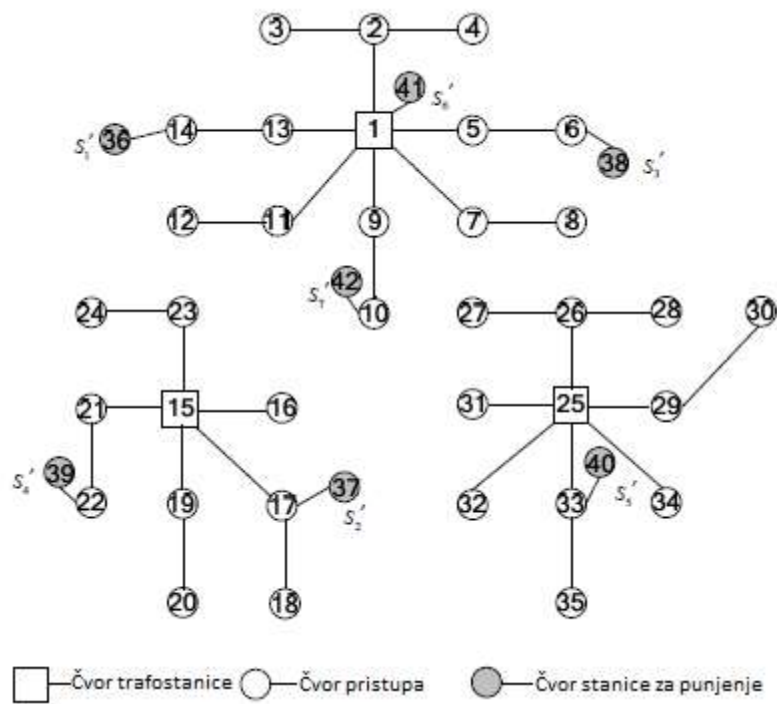
$N$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C$
5	160.30	151.11	800.31	6004.91	206.39	7323.03
6	171.86	162.01	801.20	6004.91	151.87	7291.85
7	169.95	160.21	816.83	6004.91	138.67	7290.58
8	192.17	181.16	825.75	6004.91	129.11	7333.10
9	201.52	189.97	834.23	6004.91	118.84	7349.47
10	204.06	192.36	835.12	6004.91	113.96	7350.41
11	222.13	209.40	835.56	6004.91	106.62	7378.63
12	229.60	216.44	850.30	6004.91	100.24	7401.51
13	244.17	230.18	851.19	6004.91	95.17	7425.62
14	240.62	226.83	859.23	6004.91	94.46	7426.04
15	256.95	242.23	866.82	6004.91	88.83	7459.75
16	261.14	246.18	874.41	6004.91	83.69	7470.34
17	276.64	260.79	882.89	6004.91	76.98	7502.22
18	291.69	274.97	876.63	6004.91	75.54	7523.74
19	298.67	281.55	883.78	6004.91	73.65	7542.57
20	303.14	285.77	898.52	6004.91	76.93	7569.26

**Tablica 5.:** Lokacije i broj punjača za svaku odabranu stanicu,[10]

Br.	X-koordinata od stanice	Y-koordinata od stanice	Broj punjača	Čvorovi prometne mreže
$S_1^*$	1.79	5.37	18	1,2,3,14,15,16,17,18,19
$S_2^*$	4.16	1.53	14	35,36,37,44,45,46
$S_3^*$	7.10	5.05	19	7,8,9,10,11,22,23,24
$S_4^*$	1.30	1.63	14	31,32,33,34,47,48
$S_5^*$	7.00	1.92	24	25,26,27,38,39,40,41,42,43
$S_6^*$	5.00	6.00	15	4,5,6,12
$S_7^*$	4.29	3.72	13	13,20,21,28,29,30



Slika 5.3: Raspored stanica za punjenje i granice uslužnog područja,[10]



Slika 5.4: Prikaz lokacija povezivanja stanica za punjenje na distribucijsku mrežu,[10]

## 6. Analiza algoritama za optimizaciju ruta električnih vozila s ciljem povećanja efikasnosti i autonomije

Tradicionalni problem usmjeravanja vozila, bazirao se na pronalaženju najkraćeg puta u prometnoj mreži s pozitivnim i statičnim troškom brida koji predstavlja udaljenosti između dva vrha. Kod energetskog optimiziranja rute za električna vozila potrebno pribjeći modifikaciji postojećih algoritama, jer oni u svojim standardnim oblicima nisu prikladni za rješavanja problema optimizacije. Naime, kod električnih vozila trošak brida može biti negativan, zbog iznosa potencijalne energije u kojem se vozilo može naći tokom vožnje. Potrebno je još uzeti u obzir i ograničenje kapaciteta napajanja kod vozila, jer on nije neograničen, nego ovisi o inicijalnom stanju, te maksimalnom kapacitetu napunjenosti. Složenost algoritma se ovdje definira kao maksimalni broj potrebnih iteracija (ponavljanja) da bi se on mogao izvršiti.

### 6.1 Dijkstrin algoritam

Ovaj algoritam rješava problem najkraćeg puta u težinski usmjerenom grafu  $G = (V, E)$ , gdje bridovi predstavljaju određene, svojevrsne težine (npr. udaljenost između vrhova). Algoritam se može izvršavati samo, ako su pozitivne težine bridova. Iz početnog vrha  $s$ , računa udaljenost prema svim ostalim vrhovima. Postupak rješavanja odvija se način, da se u prvoj iteraciji izabere vrh koji je najbliži početnom. Zatim se, u slijedećoj iteraciji određuje drugi najbliži vrh, do kojeg se dolazi neposredno, bridom od početnog vrha ili pak bridom za koji je u prethodnoj iteraciji uspostavljeno da vodi ka najbližem vrhu. Nadalje, se širi skup vrhova do kojih su ustanovljeni najkraći putevi na način da se do nekog vrha najkraće može doći neposredno od početnog vrha ili preko drugog vrha za koji je već poznat najkraći put. Izvršavanje iteracija, odnosno algoritma završava kada se ustanovi najkraći put do krajnjeg vrha unutar grafa.[11]

Algoritam čuva u skupu  $S$ , vrhove za koje je već utvrđena najmanja težina na putu od polaznog vrha. Opetovano odabire vrhove  $u \in V \setminus S$  računajući brid s najmanjom težinom, te

dodaje vrh  $u$  skupu  $S$ . U pseudo kodu, koristi se red s minimalni prioriteto  $Q$  koji ima vrhove kao elemente s vrijednošću  $d$ . [11]

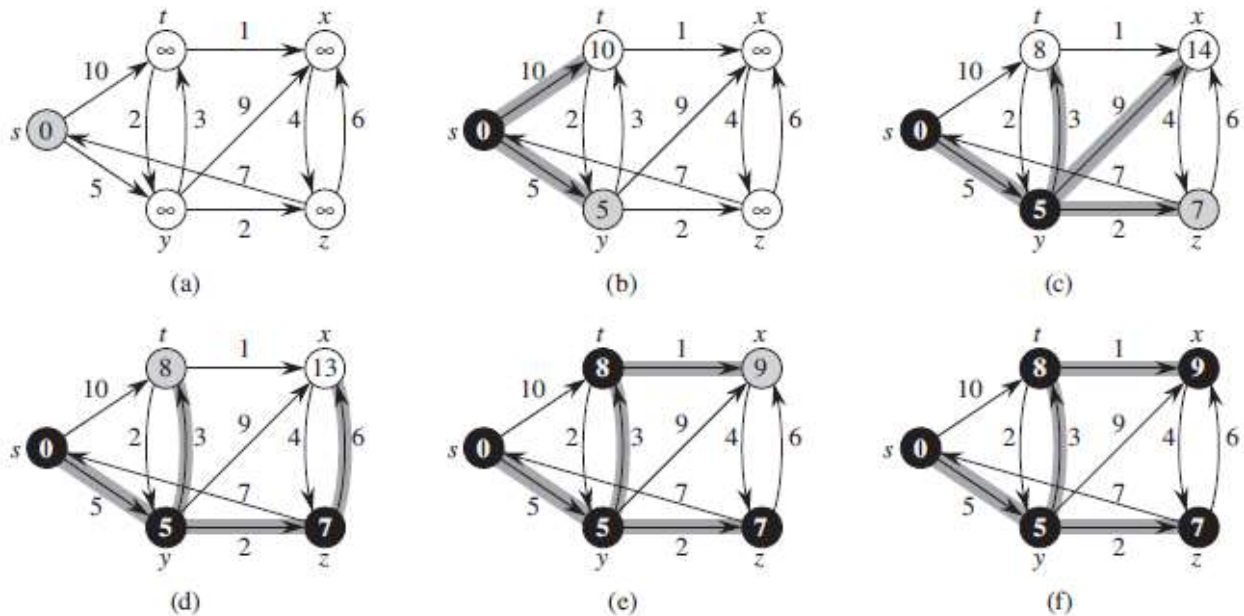
Pseudo kôd Dijkstrinog algoritma: [11]

1. Za svaki vrh od  $v \in G.V$
2.  $v.d = \infty$
3.  $v.\pi = NIL$
4.  $s.d = 0$
5.  $S = \emptyset$
6.  $Q = G.V$
7. **while**  $Q \neq \emptyset$
8.  $u = IZDVOJI.MIN(Q)$
9.  $S = S \cup \{u\}$
10. **for** za svaki  $v \in G.Lista\_susjedstva[u]$
11. **if**  $v.d > u.d + w(u, v)$
12.  $v.d = u.d + w(u, v)$
13.  $v.\pi = u$

Svaki vrh  $v \in V$  ima atribut za gornju granicu težine  $v.d$  najkraćeg puta od izvornog vrha  $s$  do vrha  $v$ . Linije u pseudo kodu od 1 do 3, predstavljaju inicijalizaciju potrebnih početnih vrijednosti, pa tako da poslije toga imamo,  $v.\pi = NIL$  (NIL je nedefinirana ili nepostojeća vrijednost) za sve vrhove  $v \in V$ ,  $s.d = 0$  i  $v = \infty$  za sve  $v \in V - \{s\}$ . U petoj liniji, skup  $S$  inicijaliziran je kao prazan skup. Kod linije 6, inicijaliziran je red  $Q$  s minimalnim prioriteto (izdvaja elemente sa najmanjom vrijednošću iz reda) koji sadrži sve vrhove iz skupa vrhova  $V$ . Nadalje, svaki prolaskom kroz 'while' petlju (linija od 7 do 14) u liniji 8, izdvaja se vrh  $u$  iz reda  $Q$ , te se u liniji 9 dodaje skupu  $S$ . Prvi prolaskom kroz petlju, vrijedi jednakost  $u = s$ . Zatim, se u linijama 10-14 provodi usporedba koji vrh ima manju težinu na puta do sebe, te se ažuriraju potrebne promjene, odnosno  $v.d$  i prethodni promatrani vrh  $v.\pi$ . To se radi, kako bi se dobio najkraći put do vrha  $v$ , prolazeći kroz vrh  $u$ . Algoritam prolazi onoliko puta kroz petlju 'while'

koliko ima vrhova, jer nakon linije 6, više se ne ubacuju vrhovi u prioritetni red  $Q$ , nego se izdvajaju iz reda, te dodaju u skup  $S$  samo jednom.[11]

Vizualni prikaz izvršavanja algoritma prikazuje slika 6.1. Polazišni vrh  $s$  nalazi se sa lijeve strane, te je njegova vrijednost jednaka nuli, a svi ostali vrhovi postavljeni su inicijalno na vrijednost beskonačnosti. Sivo označeni bridovi predstavljaju promatrane vrhove nad kojima se vrši usporedba, kako bi se ustanovilo koji od njih ima manju težinu u odnosu na početni, odnosno na dosegnuti vrh tokom kretanja po grafu. Crno označeni vrhovi predstavljaju elemente skupa  $S$ , a bijelo označeni vrhovi su elementi reda  $Q$  s minimalnim prioritetom. Slika 6.1.(a) prikazuje fazu u kojoj se nalazi algoritam prije početka izvršavanja petlje 'while' (linija u pseudo kodu 1-6). Osjenčan vrh ima minimalnu vrijednost  $d$ , te je u liniji koda 8, pridružen kao vrh koji sada ima oznaku  $u$ . Slike od (b) do (f) sa donjeg prikaza, vizualno opisuju uzastopne iteracije petlje 'while'. Tako da svaki osjenčan vrh predstavlja novu vrijednost  $u$  u tekućoj iteraciji.[11]



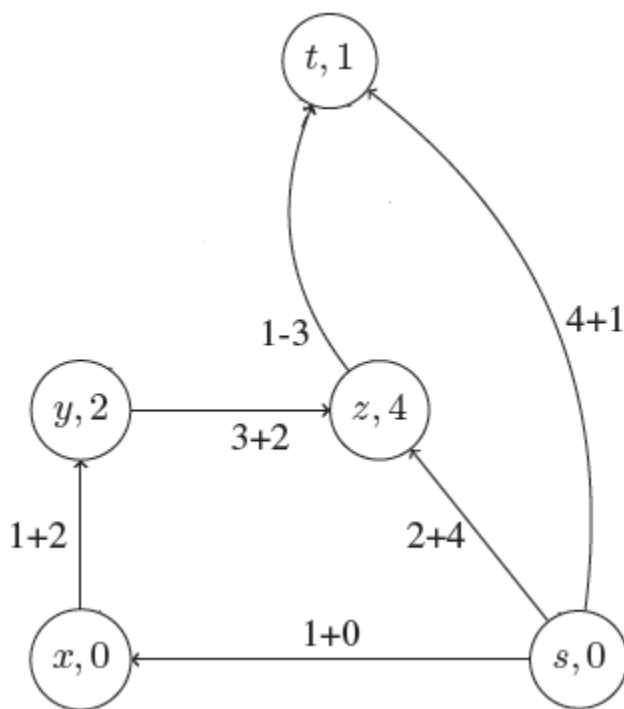
Slika 6.1: Prikaz izvršavanja Dijkstrinovog algoritma,[11]

## 6.2 Analiza A\* algoritma

Na osnovu objašnjenog problema optimizacije u dijelu 3.2, prikazati će se u ovoj dijelu izračun energetske optimalne rute koristeći A\* algoritam traženja. Prvo će se objasniti pojednostavljeno rješenje kod kojeg se ne uzima u obzir dinamički trošak brida i ograničenja kapaciteta punjenja.

### 6.2.1 Energetska optimalna ruta kao najkraća ruta

Da bi se objasnio problem, potrebno ga je razmotriti na primjeru jednostavnog grafa s nekoliko vrhova koji su međusobno povezani bridovima. Na slici 6.2 prikazan je graf na kojem je potrebno pronaći najkraći put između polazišta  $s$  i odredišta  $t$ .



Slika 6.2: Primjer grafa sa energetske težinama brida,[6]

Iz grafa sa slike, trošak brida se izražava relacijom  $c(u, v) = c_L(u, v) + c_P(u, v)$ , (slovo  $u$  označava prvi u nizu promatranja vrh, a slovo  $v$  slijedeći), u kojoj prvi izraz sa desne strane relacije

označava gubitak energije koji može biti jednak ili veći nule (gubici zbog aerodinamičkog otpora i otpora kotrljanja), a drugi izraz sa desne strane označava trošak potencijalne energije koji nastaje zbog otpora nagiba. Za potonji izraz vrijedi relacija  $c_p(u, v) = \pi(v) - \pi(u)$ , gdje parametar  $\pi$  predstavlja potencijalnu energiju nekog vrha u grafu. Brojčana vrijednost pored oznake čvora koji predstavlja vrh grafa, predstavlja potencijalnu energiju u odnosu na prethodnu točku. Primjerice vrh  $z$  ima iznos potencijalne energije  $\pi(z) = 4$  u odnosu na polazišni vrh  $s$ , a trošak brida između vrhova  $z$  i  $s$ , je jednak  $c(s, z) = 2 + 4 = 6$ . Prva znamenka na linijama koje označavaju bridove, predstavlja gubitak energije  $c_l(u, v)$  promatranih vrhova, a druga znamenka broja već spomenutu potencijalnu energiju.[6]

Ako se ne uzimaju u obzir ograničenja kapaciteta punjenja, problem energetske optimalne rute se rješava kao problem najkraćeg puta između promatranih vrhova polazišta i odredišta. Za rješenje je moguće koristiti Dijkstrinov algoritam sa najgorom vremenskom složenošću  $O(n^2)$ , ali zbog moguće negativne vrijednosti potencijalne energije između dva susjedna vrha, nije prihvatljiv za rješavanje. Primjerice, trošak brida između vrhova  $z$  i  $t$  iznosio bi negativnu vrijednost  $(1 + (1 - 4))$ . Algoritam Bellman-Ford se može primijeniti za rješavanje problema, zbog toga što kod njega vrijednosti bridova grafa mogu biti proizvoljnih vrijednosti, ali njegova složenost  $O(n^3)$ , čini ga neprikladnim za rješenje razmatranog problema.[6]

Za promjenu negativnih vrijednostima bridova u pozitivne, moguće je koristiti svojevrsnu transformaciju. Za to se koristi tzv. potencijalna funkcija  $\Pi$  koja pridružuje svakom vrhu određeni potencijal, odnosno trošak brida se izračunava po pomoć relacije:  $c_\Pi = c(u, v) + \Pi(u) + \Pi(v)$ , uz uvjet  $\Pi(v) - \Pi(u) \leq c(u, v)$ . Zamisao za transformaciju je preuzeta iz Johnsonov algoritma. Samo što ovdje taj algoritam nije korišten kao predradnja što se mora izvršiti prije primjene Bellman-Fordovog algoritma, nego se potencijalna funkcija dobila bez potreba za tim. Na taj način izbjegla se potreba za povećavanjem složenosti kod rješavanja problema, te ona ostaje pri vrijednosti  $O(n^2)$ . [6]

## 6.2.2 Opis A\* algoritma

Algoritam koji se koristi za energetske optimalno usmjeravanje električnih vozila prikazan je dolje u pseudo kôdu. To je neznatno modificira verzija A\* algoritma koji se koristi za određivanje najkraćeg puta između dvije točke.[6]

Pseudo kôd modificiranog A\* algoritma:[6]

```
1. begin
2.   foreach vrh  $v$  in  $V$  do
3.      $g(v) \leftarrow \infty, p(v) \leftarrow \text{null};$ 
4.      $g(s) \leftarrow C - J;$ 
5.      $Q \leftarrow \{s\};$ 
6.   while  $Q \neq \emptyset$  do
7.     izaberi  $u$  iz  $Q$  uz minimalnu  $g(u) + h(u, t);$ 
8.     if  $u = t$  then
9.       return  $p;$ 
10.     $Q \leftarrow Q \setminus \{u\};$ 
11.    foreach nasljednik  $v$  od  $u$  do
12.       $g' \leftarrow g(u) + c(u, v) + \hat{c}(u, v, g(u));$ 
13.      if  $g' < g(v)$  then
14.         $g(v) \leftarrow g', p(v) \leftarrow u;$ 
15.         $Q \leftarrow Q \cup \{v\};$ 
```

Ulazni podaci koje prima ovaj algoritam prije izvršavanja su: usmjereni težinski graf  $G = (V, E, c)$  gdje  $c$  predstavlja troškove energije, kapacitet napajanja  $C$ , početno stanje napunjenosti  $J$ , početni vrh  $s$ , odredišni vrh  $t$ . Kao izlazni podatak, odnosno rezultat izvršenja algoritma dobiva se najkraći put između polazišta i odredišta s obzirom na trošak energije. Trenutni troškovi rute između  $s$ - $t$  vrhova označeni su sa  $g(v)$ , a  $h(v)$  označava heurističku procjenu troškova na najkraćoj ruti od  $v$  do  $t$ . Algoritam inicijalizira sve troškove rute s vrijednošću beskonačnosti, izuzevši od toga polazišni vrh  $s$ . Iznosu troška rute  $g(s)$  u polazišnom vrhu  $s$  inicijalno je pridružena vrijednost ničice. U kasnijem iteracijama, taj iznos će poprimiti vrijednosti troška energije kako bude ta veličina rasla. Polazišni vrh  $s$  je dodan u prioritetni red  $Q$ . Nad prioritetnim redom moguće je izvršavati operacije: ubacivanja, brisanje i upita. U takav red se ubacuju određeni elementi, a brišu se najkvalitetniji, a upitom se dobiva najkvalitetniji element, ovisno o kvalitativnom kriteriju. U svakoj iteraciji, vrh  $u$  iz  $Q$  sa minimalnim zbrojem  $g(u) + c(u, v)$  (minimalni zbroj trenutnog i



procijenjenog troška) se briše iz reda  $Q$ . Za vrijeme toga, susljedni vrh  $v$  od  $u$ , se dodaje redu  $Q$ , ako je ispunjen uvjet da je trošak puta između tih promatranih vrhova, izražen relacijom  $g(u) + c(u, v)$  manji, nego do tada zadana vrijednost. Treći izraz po redu  $\hat{c}(u, v, g(u))$  koji se pojavljuje u relaciji kod linije 12 od promatranog algoritma, u ovom primjeru neće biti uzeti u obzir, te se računa da je ovdje njegova vrijednost jednaka nuli. Da, algoritam ne bi vraćao samo minimalnu vrijednost troška brida, nego i najkraći put, postavljene je u liniji 3 i 14 funkcija  $p$ . [6]

Korištena heuristika služi da se ne preračunavaju troškovi kada se dođe do odredišta, nego da se izvršavanje algoritma završi točno kada se dosegne vrh odredišta. Pomoćna varijabla  $p$  u liniji 9, služi za vraćanje najkraćeg puta, te time se prekida izvršavanje algoritma. Ako za heuristiku  $h$  vrijedi da je  $h(u, t) \leq c(u, v) + h(v, t)$  i  $h(t, t) = 0$  za sve  $u, v, t$ , onda algoritam završava u  $O(n^2)$  koraka. [6]

Algoritam  $A^*$  ima optimalnu učinkovitost u kontekstu da se pretražuje najmanji broj vrhova u odnosu na druge algoritme koji se koriste za traženje najmanje težine brida po nekom kriteriju. Heuristika koja se koristi kod ovoga algoritma, osigurava da se svaki vrh pretražuje najviše jednom. [6]

Učinak ograničena baterija biti će objašnjen na primjeru grafa koji je prikazan na slici 6.2. Ako bi kod početnog vrh  $s$ , napunjenost baterija bila jednaka  $J = C = 5$  energetske jedinice, najkraći put  $(s, z, t)$  sa ukupnim troškom iznosa od 4 jedinice, ne bi bio više moguć. Zato što iznos troška rute između vrhova  $s$  i  $z$ , iznosi 6 energetske jedinice, a to nije moguće ostvariti sa navedenom napunjenošću baterije. Optimalni energetski trošak puta mora imati trošak od 5 jedinica. Ideja je da se ograničenje baterije stavi u  $A^*$  algoritam, te da se taj način ostvari energetski optimalna ruta, mijenjajući težinsku funkciju troška  $c$ . Sada troškovi rute  $g$  ovise i o ograničenjima baterije.[6]

Za navedeni primjer ograničenja baterije, trošak brida  $(s, z)$  iznosi 6 energetske jedinice, te ovaj brid ne može koristiti za optimizaciju rute, jer vozilo ne bi imalo dovoljno energije za vožnju po istom (punjenje ima 5 jedinica). Ista stvar vrijedi kada bi za navedena ograničenja baterije, algoritam počeo računati iteracije iz vrha  $z$ . Ovdje izračunati trošak puta do odredišta  $t$ ,

iznosi  $c(z, t) = 1 + (1 - 4) = 1 - 3 = -2$ . Stoga, regenerirana energija na ovom dijelu puta iznosi  $-2$  energetske jedinice. S obzirom da, baterija može spremati dodatno najviše 1 energetske regenerirane jedinice ( $C - J = 5 - 4 = 1$ ), nastaje gubitak od  $-1$  jedinice zbog baterijskog ograničenja.[6]

Za algoritam  $A^*$ , gore navedeni troškovi zbog baterijskog ograničenja iskazani su u liniji broj 12 pseudo koda. Ti troškovi označavaju se sa  $\hat{c}$ , te su izraženi na slijedeći način ( $\hat{c}: V \times V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ):

$$(u, v, k) \mapsto \begin{cases} -\Delta(u, v, k) & \text{ako je } \Delta(u, v, k) < 0 \\ 0 & \text{ako je } 0 \leq \Delta(u, v, k) \leq C \\ \infty & \text{ako je } \Delta(u, v, k) > C \end{cases} \quad (6.1)$$

uz  $\Delta(u, v, k) := k + c(u, v)$ . Za ovo proširenje algoritma, složenost ostaje kvadratna, odnosno  $O(n^2)$ . [6]

U znanstvenom članku pod izvorom [6], analiziran je gore prikazan  $A^*$  algoritam u usporedbi sa Dijkstrin algoritmom. Usporedba je provedena na softverskom sustavu koji je bio preteča kasnije razvijenom sustavu nazvanom Green Navigation, koji je prikazan u četvrtom poglavlju. U tablici 6. prikazani su dobiveni podaci na osnovu izračunavanja energetske optimalne rute, odnosno najkraćeg puta između njih. Podaci sadrže vrijeme izvršavanja uz standardnu devijaciju za različite udaljenosti. Na osnovu toga, proizlazi da je  $A^*$  algoritam je brži, nego Dijkstrin, a pogotovo pri manjim udaljenostima.

**Tablica 6.:** Prosječno vrijeme izvršavanja algoritma (uz standardnu devijaciju) izraženo u sekundama kod izračunavanja energetski optimalnih ruta,[6]

Udaljenost (zračna linija)	Modificarni A* algoritam	Dijkstrin algoritam
[0,10]	0.03 ± 0.01	1.55 ± 0.43
]10,20]	0.04 ± 0.01	1.60 ± 0.41
]20,30]	0.07 ± 0.02	1.55 ± 0.43
]30,40]	0.11 ± 0.04	1.62 ± 0.42
]40,50]	0.17 ± 0.05	1.59 ± 0.41
]50,60]	0.24 ± 0.07	1.70 ± 0.41
]60,70]	0.31 ± 0.09	1.66 ± 0.49
]70,80]	0.41 ± 0.10	1.62 ± 0.41
]80,90]	0.52 ± 0.14	1.62 ± 0.40
]90,100]	0.60 ± 0.16	1.65 ± 0.42

## 6.3 Energetsko-vremenski algoritam

Ovaj algoritam ne uzima samo trošak energije, nego i vrijeme putovanja između dvije određene točke, kao bitan element kod optimiziranja rute električnog vozila.

### 6.3.1 Problem ograničene optimalne rute

Rješenje problema optimalnog usmjeravanja koje predstavljeno u trećem poglavlju, ne uzima u obzir vrijeme putovanja, nego samo konfiguraciju rute po kojoj se vozilo kreće. Međutim, vrijeme putovanja je bitan element za mnogo subjekte u prometu, te kao takvo ne može biti ignorirano. Postoji mogućnost da se problem optimalnog usmjeravanja, riješi na način da se vrijeme putovanja uzme kao ograničenje, čija vrijednost ovisi o određenoj situaciji u kojoj bi se vozač mogao naći. Moguće rješenje ne ovisi samo o vremenskim ograničenjima, nego i o baterijskim. U rješenje mora biti uključeno vremenskog ograničenje, kada je ono primarni kriterij vozača električnog vozila. Tako da se definiranje problema sastoji u minimiziranju vremena putovanja uz ograničenje troška energije. [4]

Problem ograničene optimalne rute definira se kao: za zadani graf  $G = (V, E, w)$ , svaki brid  $(v_i, v_j) \in E$  određen je težinskim vektorom s  $m$  zbrojivih težina brida  $w_l(v_i, v_j) \geq 0$ , za svaki  $l, 1 \leq l \leq m$ . Za iskazane  $m$  ograničenja  $L_l (1 \leq l \leq m)$  potrebno je pronaći put  $(P_{s \rightarrow t}^j)$  od polazišnog vrha  $s$  do odredišnog vrha  $t$ , tako da je trošak  $c(P_{s \rightarrow t}^j)$  minimiziran slijedećim ograničenjem:

$$w_l(P_{s \rightarrow t}^j) = \sum_{(v_i, v_k) \in P_{s \rightarrow t}^j} w_l(v_i, v_j) \leq L_l (1 \leq l \leq m) \quad (6.2)$$

Težinski vektor  $w_l(v_i, v_j)$  za gore iskazani problem, predstavlja vrijeme putovanja ili energetska trošak za segment rute  $(v_i, v_j)$ . Dok trošak  $c$  predstavlja energiju ili vrijeme potrebno za dolazak do odredišta. [4]

Iz formulacije problema, proizlazi da se trošak energije segmenta rute i vremensko ograničenje mogu iskazati pomoću troška definiranog u trećem poglavlju, odnosno:

$$c(v_i, v_j) = c_e^m(v_i, v_j) \quad (6.3)$$

$$w(v_i, v_j) = c_t(v_i, v_j) \quad (6.4)$$

$$L = \beta c_t(P_{s \rightarrow t}^j) \quad (6.5)$$

gdje  $c_t(v_i, v_j)$  je trošak vremenskog putovanja za segment rute,  $c_t(P_{s \rightarrow t}^j)$  je najkraća duljina puta od polazišta  $s$  do odredišta, iskazana kroz vremenski trošak. To je ustvari, najkraće moguće vrijeme u kojem vozač može doći iz polazišta do odredišta, te se naziva donjom vremenskom granicom. Maksimalna vremenska granica označena je sa  $L$  i naziva se gornjom vremenskom granicom ili jednostavno vremensko ograničenje. Parametar  $\beta$  omogućuje da se dobije  $L$ , množeći gornju vremensku granicu sa donjom vremenskom granicom. Ovaj parametar iskazuje koliko mnogo puta vozač želi iskoristiti vrijeme potrebno da se kreće najkraćim putem. Inače, parametar

$\beta$  je pokazatelj razine riješenosti problema usmjeravanja. Stoga, ako je vrijednost parametra  $\beta = 1$ , onda je to optimalno vremenski riješen problem usmjeravanja za gore predočen problem. Naprotiv, ako je  $\beta = \infty$  onda je to optimalno energetska rješenje za iskazni problem.[4]

### 6.3.2 Opis algoritma uz vremensko ograničenje

Sada je moguće predstaviti energetska-vremenski algoritam koji pronalazi energetska optimalnu rutu i čiji je vremenski trošak uz parametar  $\beta$ , vremenski optimalna ruta. Ovaj algoritam temelji se na modifikaciji Dijkstrin algoritma koji pronalazi najkraće rute, uz mnogo alternativnih ruta koje se u provizorno pohranjene. Još se koristi A\* algoritam pretrage za ubrzanje tehnike koja računa donju granicu s klasičnim Dijkstrinim algoritmom koji se izvršava unatraske.[4]

Izračunavanje donje vremenske granice moguće je dobiti pomoću koncepta zvanog pogledaj–naprijed. Koncept pogledaj-naprijed koristi se kao dodatni mehanizam koji smanjuje potragu za moguće puteve. Ideja je da ograniči skup mogućih puteva koristeći informacije preostalih ruta koje vode ka odredištu. Sa ovim konceptom traži se najkraći put na način da pretražuje stablo koje ima korijen u odredištu, prema svim ostalim vrhovima u grafu. Ovaj koncept izračunava po svojoj definiciji donju granicu vremenskog troška prema svakom vrhu. Međutim, zbog prevelikog broja vrhova u grafu nije moguće provesti računanje prema svakom od njih, jer bi se moralo provesti računanje Dijkstrinovog algoritma za cijeli graf. Takva predradnja trajala bi duže, nego glavni dio programa. Zato se koristi uvjet stopiranja koji kod izvršavanja Dijkstrinovog algoritma, osigurava da se računaju samo oni vrhovi koji se mogu dosegnuti unutar zadanog vremenskog ograničenja. Računanje za dolje napisan algoritam u pseudo kôdu, počinje iz odredišnog vrha  $t$  prema polaznom vrhu  $s$ . Ulazni podaci su za ovaj algoritam su: težinski graf  $G = (V, E)$ , polazišni vrh  $v$ , odredišni vrh  $s$ , funkcija troška  $c$ . Izlazni podaci su: donje granice od skupa  $h$  koje predstavljaju predviđeni trošak od odredišta  $t$  do svih vrhova  $v \in V$  koji imaju trošak uz uvjet  $c(P_{v \rightarrow t}) \leq C(P_{s \rightarrow t})$ . Kada se računanje izvrši, odnosno kada se dosegne polazni vrh, onda se pohranjuju izračunati troškovi koji predstavljaju minimalno vrijeme koje potrebno za putovanje između vrhova  $s$  i  $t$ . To je vremenski trošak  $c_t(P_{s \rightarrow t}^{SP})$  za najkraći put. Računanje se ne prekida, nego se nastavlja sve dok zbroj troška  $c_t(P_{v \rightarrow t})$  za neke vrhove  $v \in V$ , ne postane veći nego  $\beta c_t(P_{s \rightarrow t}^{SP})$  ili dok se ne obrade svi vrhovi. Nakon završetka računanja, dobije se skup donjih

granica koji se sastoji od izračunatih minimalnih vrijednosti od odredišta prema svim ostalim izračunatim vrhovima. Taj skup se označava kao  $\bar{w}(t)$ , te sadrži udaljenosti svakog vrha  $v$  koji zadovoljava slijedeći uvjet:[4]

$$c_t(P_{v \rightarrow t}) \leq c_t(P_{s \rightarrow t}^{SP}) \quad (6.6)$$

Zamisao gore pokazanog ide za tim da se računaju samo one udaljenosti rute za koje bi skup vrhova mogao biti dio konačnog rješenja. Ako neki vrh nije dio rješenja, onda se ne može dosegnuti ciljani odredišni vrh  $t$  uz dano vremensko ograničenje. Za izračunavanje skupa vrhova koristi se Dijkstrin algoritam koji se izvršava unatrag. On se temelji na prioritetnom redu  $Q$  koji je inicijaliziran sa odredišnim vrhom  $t$ . Svakom vrhu  $u$  je pridružena provizorna udaljenost  $h(u)$  do vrha  $t$ , koja je jedini kriterij za izlazak iz prioritetnog reda  $Q$ . Nadalje, algoritam sa slike 6.4, izvršava se kao i klasični Dijkstrin algoritam, te se računaju udaljenosti za sve vrhove  $v \in V$  koji imaju trošak za koji vrijedi uvjet  $c_t(P_{v \rightarrow t}) \leq c_t(P_{s \rightarrow t}^{SP})$  prema odredišnom vrhu  $t$ . [4]

Pseudo kôd Dijkstrinog algoritma s povratnom heuristikom istraživanja:[4]

```

1. procedure DIJKSTRA ( $G, s, t, c$ )
2.      $h(t) \leftarrow 0$ ;
3.      $Q \leftarrow \{t\}$ ;
4.     while  $Q \neq \emptyset$  do
5.          $u \leftarrow$  izaberi vrh s minimalnim  $h(u)$  iz  $Q$ 
6.          $Q \leftarrow Q \setminus u$ ;
7.         if  $u = s$  then
8.             return  $h$ ;
9.         end if
10.        for all za sve bridove  $(v, u)$  iz vrha  $u$  do
11.             $h' \leftarrow h(u) + c(v, u)$ ;
12.            if  $v \notin Q$  then
13.                 $h(v) \leftarrow h'$ ;
14.                 $Q \leftarrow Q \cup v$ ;
15.            else if  $h(v) > h'$  then
16.                 $h(v) \leftarrow h'$ ;
17.            end if
18.        end for
19.    end while
20. end procedure

```

Kod računanja energetske heuristike koristi se A\* algoritam koji donje granice za energetske rute računajući već spomenutu verziju Dijkstrinovog algoritma koji se izvršava unutrašnje. Energetsko-vremenski algoritam prikazan dolje u pseudo kôdu. Njegovi ulazni podaci su: težinski graf  $G = (V, E)$ , polazišni vrh  $v$ , odredišni vrh  $s$ , množitelj ograničenja  $\beta$ , vremenska funkcija troška  $c$  i funkcija troška energije  $c_e$ . Izlazni podaci su: najkraći put između  $s$  i  $t$  uz vremensko ograničenje. Ukupni ili previđeni trošak energije iskazan je pomoću relacije  $\vec{h}(P_{v \rightarrow t}) + \vec{h}(v)$ . Ta relacija predstavlja potrošenu energiju od polazišnog vrha  $s$  do trenutnog vrha  $v$  i trošak energije do odredišnog vrha  $t$ . Dijkstrin algoritam koristi se ovdje na isti način kao i kod prethodno iskazanog algoritma. Međutim, razlika se sastoji u tome da se ne koristi vremenski trošak  $c_t$ , nego se umjesto toga koristi energetski trošak  $c_e^m$ . Ovdje ne može biti poznato stanje napunjenosti baterije u odredišnom vrhu, jer to nije moguće izračunati prema iskazanim relacijama koje se obrađene u 3.poglavlju. Jedino je poznato stanje napunjenosti baterije u polazišnom vrhu, te se izračunavanje stanja napunjenosti u drugim vrhovima može provesti samo nakon što bude pronađena energetski optimalna ruta. [4]

Pseudo kôd energetsko-vremenskog algoritma za traženje optimalne rute s vremenskim ograničenjem:[4]

1. **procedure** PronadiPut( $G, s, t, \beta, c_t, c_e$ )
2.      $\vec{w} \leftarrow$  Dijkstra( $G, s, t, c_t$ ); napomena  $\vec{w}(a) = \vec{w}(P_{a \rightarrow t})$
3.      $\vec{h} \leftarrow$  Dijkstra( $G, s, t, c_e$ ); napomena  $\vec{h}(a) = \vec{h}(P_{a \rightarrow t})$
4.      $\vec{w}(P_{s \rightarrow s}) \leftarrow \emptyset$ ;
5.      $\vec{h}(P_{s \rightarrow s}) \leftarrow \emptyset$ ;
6.      $S \leftarrow \emptyset$ ;
7.      $Q \leftarrow \{P_{s \rightarrow s}\}$ ;
8.     **while**  $Q \neq \emptyset$  **do**
9.          $P_{s \rightarrow u} \leftarrow$  izaberi put s minimalnim  $\vec{h}(P_{s \rightarrow u}) + \vec{h}(u)$  iz  $Q$ ;
10.         $Q \leftarrow Q \setminus P_{s \rightarrow u}$ ;
11.        **if**  $u = t$  **then**
12.            **return**  $P_{s \rightarrow u}$ ;
13.        **end if**
14.        **for all** izlazne bridove  $(u, v)$  vrha  $u$  **do**
15.            **if**  $v \notin \vec{w}$  **then**
16.                 $\vec{w}(v) \leftarrow \vec{w}(s)$
17.            **end if**
18.            **if**  $\vec{w}(P_{s \rightarrow u}) + c_t(u, v) + \vec{w}(v) > \beta \cdot \vec{w}(s)$  **then**

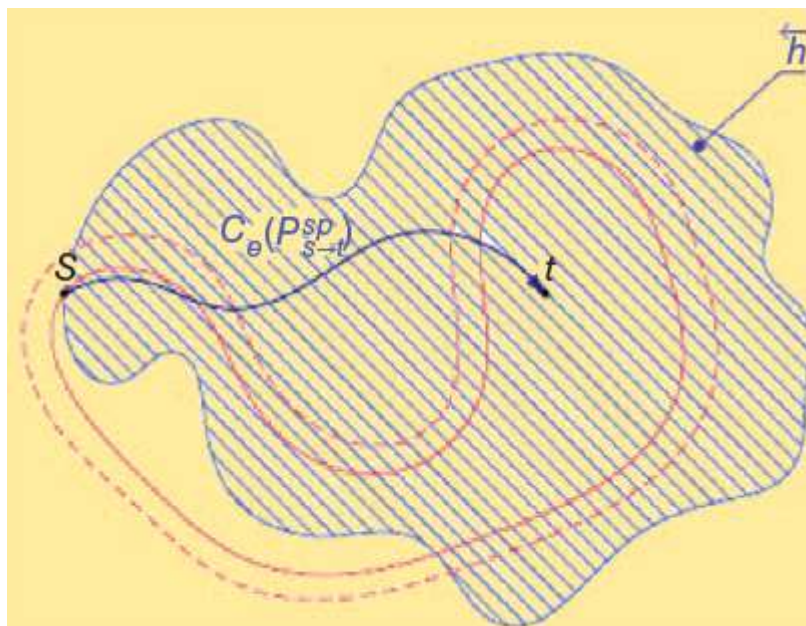
```

19.           continue; odbaci ovaj put kao neostvariv
20.       end if
21.        $P_{S \rightarrow v} \leftarrow \text{proširi } P_{S \rightarrow v} \text{ s bridom } (u, v);$ 
22.        $\vec{w}(P_{S \rightarrow v}) \leftarrow \vec{w}(P_{S \rightarrow u}) + c_t(u, v);$ 
23.        $\vec{h}(P_{S \rightarrow v}) \leftarrow \vec{h}(P_{S \rightarrow u}) + c_e(u, v);$ 
24.       if Dominira( $S, \vec{h}, \vec{w}, P_{S \rightarrow v}$ ) then
25.           continue; odbaci ovaj put kao dominatan
26.       end if
27.       Put  $P_{S \rightarrow v}$  s obzirom da je moguć, dodaj ga u red
28.       if  $v \notin \tilde{h}$  then
29.            $\tilde{h}(v) \leftarrow \tilde{h}(s);$ 
30.       end if
31.        $Q \leftarrow Q \cup P_{S \rightarrow v}$ 
32.       end for
33.   end while
34. end procedure

```

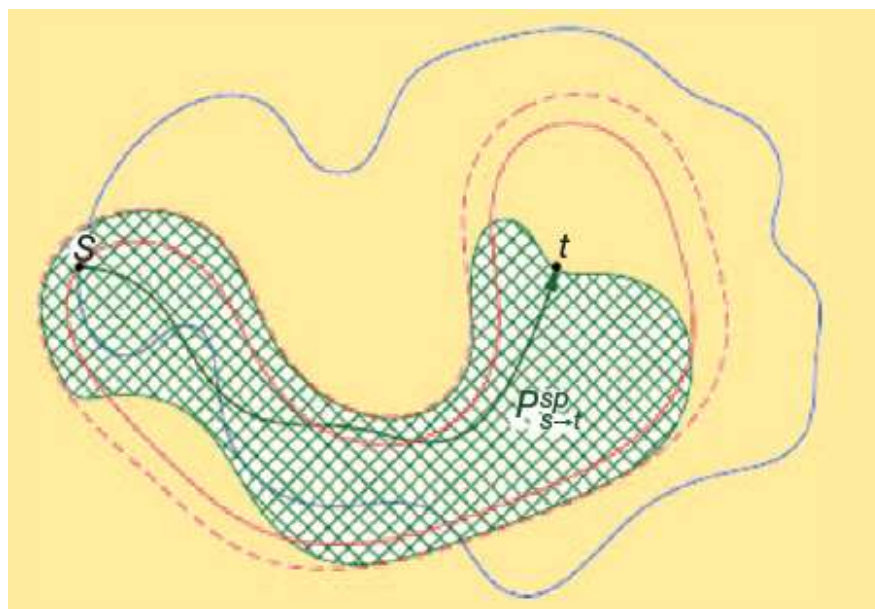
Stoga je potrebno iz razmatranja i računanja ukloniti ovisnosti o stanju napunjenosti. Stanje napunjenosti baterije ne bi smjelo preći razinu prepunjenosti, te ne bi smjelo pasti ispod razine ispražnjenosti zbog svojih karakteristika. Pored toga u tim stanjima, samo bi rastao trošak energije. Uklanjanje tih ograničenja baterije neće utjecati na izračun energetske optimalne rute, jer korištena heuristika ne preračunava troškove puta. Na slici 6.3 prikazan je primjer koji pokazuje da prostor pretraživanja odgovara danoj energetskej metrici, odnosno da je to prostor unutar kojeg se vozilo može kretati s obzirom na svoj kapacitet napunjenosti baterije. Vrhovi unutar iscrtanog područja imaju trošak glavnog puta izračunatog na osnovu skupa  $\tilde{h}$ . U slijedećem koraku izvršavanja algoritma vrši se pretraga za prostor gdje je pronađen optimalni put s obzirom na vremensko ograničenje. Traženi put je ostvariv ako je zbroj potrošenog vremena na dijelu puta  $\vec{w}(P_{S \rightarrow v})$  i predviđeni trošak na glavnom dijelu puta  $\vec{w}(v)$  (put između promatranog vrha  $v$  i ciljanog odredišnog vrha  $t$ ) niži od vremenskog ograničenja iskazanog relacijom:  $\vec{w}(P_{S \rightarrow v}) + \vec{w}(v) \leq L$ . Nadalje, potencijalni putevi su u skladu sa takvim putem koji ima najniži previđeni trošak  $\vec{h}(P_{v \rightarrow t}) + \vec{h}(v)$ . Tražnje se prekida ako se pronađe najkraći put koji zadovoljava vremensko ograničenje ili ako nema više vrhova koji bi se mogli ispitati.[3.]





Slika 6.3: Prostor pretraživanja[4]

Slika 6.4 prikazuje kako bi mogao izgledati dobiveni put za korake gore opisanih predradnji, a prostor pretrage je obuhvaćen zelenom linijom koja nikada ne prelazi crvenu isprekidanu liniju koja predstavlja granice vremenskog ograničenja. Ako se bilo koji čvor nađe izvana tih granica, on ne može biti dio konačnog rješenja, jer ne zadovoljava uvjet vremenskog ograničenja. Stoga, svaki put koji prelazi tu granicu se odbacuje kao potencijalno rješenje.[4]



Slika 6.4: Omeđeno područje pretrage[4]

## 7. Zaključak

Vozač koji sjedi za upravljačem električnog vozila stječe skori isti dojam kao da vozi konvencionalno vozilo koje za pogon koristi motor s unutarnjim sagorijevanjem. Razlika je u broju papučica, gdje za električno vozilo ne postoji potreba za mjenjačem brzina zbog velike iskoristivosti električnog motora čak i pri malim brzinama, nego ono ima papučice ubrzanja i kočenja. Mada se za neke slučajeve može opravdati potreba za mjenjačem brzina zbog smanjenog okretnog momenta, pri većim brzinama vrtnje motora.

Izbor elektromotornog pogona mora se promatrati sa razine sustava, na način da se uzmu u obzir očekivanja vozača, karakteristike električnih motora i ograničenja napajanja koje daje energiju za kretanje električnog vozila. Za pogon vozila se koriste elektromotori koji su po svojoj definiciji jednostavnije izvedbe i imaju manje rotirajućih dijelova, te su zbog toga trajniji i lakše ih je održavati u odnosu na motore s unutarnjim sagorijevanjem. Zbog usavršene tehnologije i lakoće upravljanja istosmjerni motori nalaze svoju primjenu prilikom izbora elektromotornog pogona, tamo gdje je potrebno često pokretanje i zaustavljanje, te dobra regulacija brzine. U usporedbi sa potonjom navedenom vrstom motora, indukcijski motor ima dodatne prednosti kao što su manja težina, manji volumen, niža cijena i veća iskoristivost. Takve karakteristike bitne su za električno vozilo, jer smanjuju njegovu masu koja je ionako uvećana doprinosom mase baterijskog punjenja. Reluktantni motori iako su nešto drugačije izvedbe, nego istosmjerni i indukcijski, a odlikuju se karakteristikama koje su bitne za pogone koji rade pri različitim brzinama. Osim već spomenutih karakteristika za druge vrste elektromotora, reluktantni motori nude i visoke radne brzine.

Elektromotori imaju značajnu karakteristiku da mogu raditi i kao generatori, te pri tome vraćaju električnu energiju u napajanje vozila. Takva sposobnost motora naziva se regenerativno kočenje, te dolazi do izražaja prilikom spuštanja niz nagib prometnice i prilikom kočenja, odnosno usporavanja. Uzimajući to u obzir i gubitke energije koji se kod električnog vozila javljaju zbog otpora kotrljanja, otpora nagiba, otpora ubrzanja i aerodinamičkog otpora moguće je iskazati problem energetske optimalnosti usmjerenja vozila. Cilj je riješiti problem da bi električno vozilo

ima minimalnu potrošnju energije prilikom kretanja između dvije odabrane točke, te da bi se na taj način povećala njegova autonomija i radijus kretanja. Ovaj problem je još bitan sa gledišta životnog vijeka baterije, koju je potrebno puniti što rjeđe i pri nižim razinama napunjenosti. Problem energetske optimalnosti usmjerenosti vozila proširen je i na vremensko ograničenje, jer sami parametar troška energije nije dovoljan kako bi ispunila očekivanja vozača.

Objašnjen je sustav EORTNS koji ima mogućnost odabira sa strane korisnika kriterije po kojem želi stići od polazišta do odredišta. Bilo da se radi o najbržem, najkraćem ili o energetske najprihvatljivijem kriteriju. Korisnik ima mogućnost odabira energetske prihvatljive rute uz biranje vremenskog ograničenja kada mu je ono primarniji kriterij, nego trošak energije. Vizualizacijom koju omogućuje prototipni sustav Green Navigation, predložena je razlika odabira energetske optimalne rute u odnosu na onu najkraću i najbržu. Na način da grafičko sučelje prikazuje da sustav ne bira energetske rute preko konfiguracije terena koji ima veći nagib, nego sukladno fizikalnim danostima, odabiru se rute sa što manjim nagibom, radi veće uštede energije. Za pravilno usmjerenje vozila, osim proračuna ruta na osnovu algoritama, takvi sustavi uzimaju u obzir i stvarne promjene u prometu, kako bi vozač imao što pregledniju situaciju koja ga očekuje, ako krene nekom planiranom rutom.

Za energetske usmjerenosti vozila uz kvalitetno napisane algoritme, potrebno je provesti i optimizaciju plana izbora lokacija stanica za punjenje napajanja električnih vozila. Izbor lokacije neposredno ovisi o veličini prometa koji se odvija po nekoj prometnici, dostupnosti distribucijske električne mreže i njezinim ograničenjima, zadovoljstvu korisnika i cijeni izgradnje takvih stanica.

Klasični algoritmi za pronalaženje najkraće rute, prilagođeni su rješavanju problema energetske optimiziranja, jer oni u svojim standardnim oblicima nisu prikladni za tu namjenu. Pribjeglo se modifikaciji A\* algoritma, kako bi se na osnovu njega moglo izračunati trošak energije uz ograničenja baterije (stanje početne i maksimalne napunjenosti) koja uzrokuju negativne vrijednosti prilikom računanja. Iako su modificirani ili su korišteni samo za jedan dio unutar nekog većeg algoritma poput Dijkstrinog algoritma, oni u takvim oblicima zadržavaju istu složenost, odnosno ne povećavaju složenost algoritma u kojima se koriste. Novostvoreni energetske

algoritmi prilikom svojega izvršavanja nisu ništa sporiji od onih klasičnih, nego su čak i brži od algoritma koji se koriste za pronalazak najkraće i najbrže rute.

Zaključno, na temelju sve obrađenoga, proizlazi da će u budućnosti pored svojih opće poznatih ekoloških prednosti radi manjeg zagađenja okoliša, električno vozilo imati sve veću ulogu u odvijanju prometa. Zbog razvoja tehnologije koja sve više prodire u svakodnevni život, krajnji korisnici imati će još više mogućnosti za korištenje informacijski sustava. Pri izradi informacijskih sustava u budućnosti morala bi se posvetiti veća pažnja i pružiti veća uloga krajnjem korisniku koji može poslužiti kao vjerodostojan izvor podataka koji bi se kasnije unutar sustava obrađivao, te na osnovu toga pružiti što relevantnije informacije o stanju prometa u realnom vremenu. Nadalje, uz plan optimalnog energetskeg usmjeravanja vozila usporedno bi trebalo planirati i izbor lokacija za punjenje kako bi se ostvarila što bliža povezanost između ta dva procesa, da se dobiju što bolji rezultati u cilju ekonomičnijeg putovanja, bilo da se radi o gradskim ili međugradskim relacijama.

## Literatura

- [1] Ehsani M., Gao Y., Gay S.E., Emadi A. Modern Electric, Hybrid Electric, and Fuel Cell Vehicles[Internet]. Boca Raton: CRC Press LCC; 2005. [pristupljeno: 6.lipnja. 2015.] Dostupno na:<http://www.google.hr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=18&ved=0CEYQFjAHOAo&url=http%3A%2F%2Fdata.autorepairmanuals.ws%2F3ecdbe2a96337589d528642599a25238&ei=WZ6iVcK7MMn6Uur0tjA&usg=AFQjCNEOwGx4dIeoLK4KIhj6GNAGADNvgw&bv=bv.97653015,d.d24>
- [2] Šunjić L., Mužić I. Simulacija prekidačko-reluktantnog motora, Eng. Rev. 30-1 (2010) 105-116 [Internet]. [pristupljeno: 7.lipnja.2015.] Dostupno na: <http://hrcak.srce.hr/56114>
- [3] Hasemnia Naser M., Asaei B. Comparative study of using different electric motors in the electric vehicles[Internet]. IEEE Xplore, 10.1109/ICELMACH.2008.4800157. [pristupljeno 5.srpnja.2015] Dostupno na: [http://www.researchgate.net/profile/Mohammad\\_Naser\\_Hashemnia/publication/224394177\\_Comparative\\_study\\_of\\_using\\_different\\_electric\\_motors\\_in\\_the\\_electric\\_vehicles/links/00b7d529ef1b342acb000000.pdf?disableCoverPage=true](http://www.researchgate.net/profile/Mohammad_Naser_Hashemnia/publication/224394177_Comparative_study_of_using_different_electric_motors_in_the_electric_vehicles/links/00b7d529ef1b342acb000000.pdf?disableCoverPage=true)
- [4] Jurik T., Cela A., Hamouche R., Natowicz R., Reama A., Niculescu S.I., Julien J. Energy Optimal Real-Time Navigation System, IEEE Intelligent transportation systems magazine, 2014 DOI: 10.1109/MITS.2014.2324000. Dostupno: 23.srpanj.2014
- [5] Jurik T., Cela A., Hamouche R., Natowicz R., Reama A., Niculescu S.I., Villedieu Ch., Pachetau D. Energy Optimal Real-Time Navigation System: Application to a Hybrid Electrical Vehicle, 16. međunarodna IEEE Annual on Intelligent Transportation Systems (ITSC 2013), The Hague, Nizozemska, 2013.
- [6] Sachenbacher M., Leucker M., Artmeier A., Haselmayr J. Efficient Energy-Optimal Routing for Electric Vehicles [Internet]. 25. AAAI Conference on Artificial Intelligence, Association for

the Advancement of Artificial Intelligence 2011. [pristupljeno 12.lipnja.2015] Dostupno na : <https://www.aaai.org/ocs/index.php/AAAI/AAAI11/paper/viewFile/3735/4092>

[7] Mehar S., Senouci S.M., Rémy G. EV-Planning: Electric Vehicle Itinerary Planning [Internet]. Smart Communications in Network Technologies (SaCoNeT), 2013 International Conference on (Volume:01 ),17.-19.lipanj 2013, Paris, IEEE. [pristupljeno 15.lipnja.2015] Dostupno na: [http://bentley.u-bourgogne.fr/jnct2013/proceedings/JNCT13\\_MEHAR2-UB.pdf](http://bentley.u-bourgogne.fr/jnct2013/proceedings/JNCT13_MEHAR2-UB.pdf)

[8] Mrežni link: <https://www.isp.uni-luebeck.de/research/projects/green-navigation> [pristupljeno 18.lipnja.2015]

[9] Mrežni link: <http://www.isp.uni-luebeck.de/greennav/> [pristupljeno 18.lipnja.2015]

[10] Shao-yun GE, Liang F., Hong L., Long W., The Planning of Electric Vehicle Charging Stations in the Urban Area[Internet], 2nd International Conference on Electronic & Mechanical Engineering and Information Technology, Atlantis Press, Paris 2012. [pristupljeno 16.lipanj.2015]. Dostupno na:

[http://www.google.hr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CB0QFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.atlantis-press.com%2Fphp%2Fdownload\\_paper.php%3Fid%3D3574&ei=4LiiVdWME4GAUeLVgYAL&usg=AFQjCNHBboWUv577KbdTPDC-S\\_x9OELSPQ&bvm=bv.97653015,d.d24&cad=rja](http://www.google.hr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CB0QFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.atlantis-press.com%2Fphp%2Fdownload_paper.php%3Fid%3D3574&ei=4LiiVdWME4GAUeLVgYAL&usg=AFQjCNHBboWUv577KbdTPDC-S_x9OELSPQ&bvm=bv.97653015,d.d24&cad=rja)

[11] Cormen T.H., Leiserson C.E., Rivest R.L., Stein C., Introduction To Algorithms, 3.izdanje, MIT Press, London, 2009. [pristupljeno 17.lipnja.2015]

Dostupno na: <https://robot.bolink.org/ebooks/Introduction%20to%20Algorithms%203e%20-%20Thomas%20Cormen,%20Charles%20Leiserson%20and%20Ronald%20Rivest.pdf>

## Popis kratica

**EORTNS** (Energy Optimal Real-Time Navigation System) sustav za energetska usmjeravanje električnog vozila u realnom vremenu

**GSM** (Global System for Mobile Communications) najkorišteniji standard za mobilne telefone u svijetu

**GPRS** (General Packet Radio Service) paketna, bežična podatkovna komunikacijska usluga

**OSM** (Open Street Map) projekt virtualne zajednice s ciljem stvaranja slobodne, svima dostupne karte koju svatko može sam i doradivati

**NASA** (National Aeronautics and Space Administration) svemirska agencija Sjedinjenih Američkih Država

**SYTADIN** (Synoptique du Trafic Autoroutier D'Île-de-Franc) mrežna stranica koja emitira u stvarnom vremenu podatke o cestovnom prometu na glavnim cestama francuskih gradova

## Popis slika

Slika 2.1.: Osnovni pogonski sklop električnog vozila

Slika 2. 2.: Opći prikaz strukture električnog vozila

Slika 2.3.: Karakteristika elektromotora sa promjenjivom brzinom

Slika 2.4: Prikaz ovisnosti momenta o brzini za 60kW elektromotor s omjerom brzine  $x=2, 4$  i  $6$

Slika 2.5: Karakteristike učinkovitosti elektromotora

Slika 2.6: Blok dijagram električkog pogonskog sustava

Slika 2.7: Podjela električnih motora

Slika 2.8: Princip rada istosmjernog motora

Slika 2.9: Presjek indukcijskog motora

Slika 2.10: Ovisnost momenta o klizanju za indukcijski motor

Slika 2.11: Pogonski sustav reluktantnog motora

Slika 2.12: Prikaz presjeka reluktantnog motora i njegovog napajanja

Slika 2.13: Presjek reluktantnog motora za odnos polova statora i rotora (a)  $8/6$  i (b)  $6/4$

Slika 2.14: Ovisnost induktiviteta i momenta o položaju rotora pri konstantnoj struji zavojnice

Slika 2.15: Ovisnost momenta u odnosu na brzinu za reluktantni motor

Slika 2.16.: Elektrokemijska baterijska ćelije

Slika 2.17.: Stanje ispražnjenosti baterije

Slika 2.18.: Karakteristika pražnjenja baterije

Slika 2.19: Korisnost baterije tokom pražnjenja i punjenja

Slika 2.20.: Osnovni koncept dvoslojnog kondenzatora

Slika 3.1.: Sile koje djeluju na vozilo

Slika 3.2: Deformacija kotača i otpor kotrljanja na (a) tvrdoj i (b) mekoj podlozi

Slika 3.3: Otpor sredstva

Slika 3.4: Vozilo pri kretanju nagibom

Slika 4.1: Arhitektura EORTNS sustava

Slika 4.2: Dijagram toka za sustav EORTNS

Slika 4.3: Modul RTEMA prikazan kao funkcionalni dijagram toka

Slika 4.4: Prikaz arhitekture za upravljanje električnim vozilima



Slika 4.5: Primjer funkcioniranja Green Navigation sustava za odabrane točke

Slika 4.6: Primjer funkcioniranja Green Navigation sustava s obzirom na brdovitu konfiguraciju terena

Slika 4.7: Detaljni prikaz funkcioniranja Green Navigation sustava s obzirom na brdovitu konfiguraciju terena

Slika 5.1: Prometna mreža za planirano područje

Slika 5.2: Struktura distribucijske mreže planiranog područja

Slika 5.3: Raspored stanica za punjenje i granice uslužnog područja

Slika 5.4: Prikaz lokacija povezivanja stanica za punjenje na distribucijsku mrežu

Slika 6.1: Prikaz izvršavanja Dijkstrinovog algoritma

Slika 6.2: Primjer grafa sa energetske težinama brida

Slika 6.3: Prostor pretraživanja

Slika 6.4: Omeđeno područje pretrage

## **Popis tablica**

Tablica 1.: Procjena različitih vrsta elektromotora za elektromotorni pogon

Tablica 2.: Koordinate i prometni tok za svaku točku prometne mreže

Tablica 3.: Koordinate i opterećenje svakog čvora distribucijske mreže

Tablica 4.: Trošak društvene koristi za svaki pojedini program planiranja

Tablica 5.: Lokacije i broj punjača za svaku odabranu stanicu

Tablica 6.: Prosječno vrijeme izvršavanja algoritma (uz standardnu devijaciju) izraženo u sekundama kod izračunavanja energetski optimalnih ruta.

## Popis oznaka

Oznaka	Jedinica	Opis
$x$	–	omjer brzine
$P_{b-izlaz}$	$W$	izlazna snaga baterije
$\eta_t$	%	korisnost prijenosa
$\eta_m$	%	Korisnost motora
$v$	$m/s$	brzina vozila
$M_v$	$kg$	ukupna masa vozila
$g$	$9,81 m/s^2$	ubrzanje Zemljine sile teže
$f_r$	-	koeficijent otpora kotrljanja
$i$	°	nagib
$\rho$	$kg/m^3$	gustoća zraka
$C_D$	–	koeficijent aerodinamičkog otpora
$A_f$	$m^2$	površina prednje strane vozila
$\delta_{eqm}$	–	ekvivalentna veličina momenta tromosti
$\frac{dv}{dt}$	$m/s^2$	ubrzanje vozila
$\gamma$	%	postotak od ukupne energije kočenja
$P_{b-ulaz}$	$W$	ulazna snaga baterije
$E_{izlaz}$	$J$	potrošena energija baterije
$F_L$	$N$	Loretznova sila(magnetska sila)
$B$	$T$	magnetsko polje(magnetska indukcija)
$I$	$A$	električna struja
$l$	$m$	duljina vodiča
$\alpha$	°	prostorni kut
$T$	$Nm$	moment istosmjernog motora
SOC	%	stanje napunjenosti baterije
$i_b$	$A$	struja punjenja ili pražnjenja baterije
$Q(i_b)$	$Ah$	kapacitet baterije uz struju punjenja ili pražnjenja
$SOC_0$	%	početno stanje napunjenosti baterije
EC	$J$	energija dobivena iz baterije
$V(i_b, SOC)$	$V$	napon na baterijskim priključcima
$t$	$s$	vrijeme

$\eta_b$	%	energetska korisnost baterije
$V$	$V$	napon
$V_0$	$V$	termodinamički napon baterije
$E_{kap}$	$J$	uskladištena energije kondenzatora
$C_k$	$F$	kapacitet kondenzatora
$F_t$	$N$	vučna sila
$F_{tr}$	$N$	ukupni otpor vozila
$T_r$	$Nm$	moment otpora kotrljanja
$P$	$Pa$	sila reakcije podloge
$a$	$m$	udaljenost pravca sile reakcije podloge od osi kotača
$r_d$	$m$	dinamički polumjer gume
$F_r$	$N$	otpor kotrljanja(sila otpora kotrljanja)
$v_m$	$m/s$	komponenta brzine vjetra u smjeru kretanja vozila
$F_w$	$N$	aerodinamički otpor
$F_g$	$N$	otpor nagiba
$H$	$m$	visina nagiba
$L$	$m$	dužina nagiba
$F_{rd}$	$N$	otpor prometnice
$F_a$	$N$	otpor ubrzanja
$\dot{v}$	$m/s^2$	ubrzanje vozila
$s$	$m$	put
$P_D(t)$	$W$	snaga vozila u ovisnosti o vremenu
$P_D(s)$	$W$	snaga vozila u ovisnosti o položaju
$E_D(i)$	$J$	utrošena energija za kretanje vozila između dva segmenta prometnice
$E_R(i)$	$J$	trošak energije zbog otpora kotrljanja i aerodinamičkog otpora
$E_P(i)$	$J$	trošak energije zbog otpora nagiba
$c_e(i)$	$J$	trošak energije za segment rute
$c_e^m(i)$	$J$	trošak energije za segment rute koji poprima samo pozitivne vrijednosti
$c \left( P_{v_0^j \rightarrow v_{i+1}^j}^j \right)$	$J$	trošak segmenta rute koji je promijenjen zbrojem

		potrošene i obnovljene energije
$P_{v_0^j \rightarrow v_{i+1}^j}^j$	$m$	niz segmenata rute
$\Delta^i$	$J$	pomoćna veličina za izračunavanje troška energije uz ograničenja kapaciteta baterije
$C_{max}$	%	maksimalno stanje napunjenosti baterije
$C_{min}$	%	minimalno stanje napunjenosti baterije
$\widehat{E}_D(i)$	$J$	trošak energije za segmente rute koji uzima u obzir ograničenja baterijskog punjenja
$\varphi$	—	koeficijent regeneracije potencijalne energije kod nizbrdice
$\min C$	—	trošak društvene koristi
$C_{1i}$	—	trošak građevinskog ulaganja
$C_{2i}$	—	trošak upravljanja
$C_{3i}$	—	troškovi gubitaka
$C_{4i}$	—	trošak punjenja za korisnike
$C_{5i}$	—	trošak gubitka za korisnika na putu do stanice za punjenje
$e_i$	—	broj transformatora
$a_t$	—	cijena transformatora
$m_i$	—	broj stanica za punjenje
$b$	—	cijena stanice za punjenje
$l_{ki}$	$m$	udaljenost kabela stanice od pristupa distribucijskoj mreži
$c_i$	—	cijena kabla po kilometru
$\omega_i$	—	trošak infrastrukture
$r_0$	%	diskontna stopa
$z$	—	razdoblje izgradnje
$\eta$	%	faktor postotka
$C_{Fe}$	$W$	gubici u željezu transformatora
$C_{Cu}$	$W$	gubici u bakru transformatora

$C_L$	$W$	gubitci u kabelu pojedinačne stanice za punjenje
$C_{Pu}$	$W$	gubitak punjača
$k_t$	–	omjer punjača koji rade u isto vrijeme
$T_v$	$s$	efektivno vrijeme punjenja za pojedinu stanicu
$p$	–	cijena punjenja
$N_{um}$	–	broj čvorova u kojima se zahtjeva punjenje
$q_j$	–	broj električnih vozila u točki $j$ u kojoj se zahtjeva punjenje
$P_v$	$J$	prosječni kapacitet električnih vozila
$g_{kh}$	$km/kWh$	broj prijeđenih kilometara po kilovat-satu
$k_h$	–	trošak vremena korisnika u jednom satu
$v_e$	$m/s$	prosječna brzina električnih vozila
$d_{ij}$	$m$	je udaljenost između čvora potražnje $j$ i stanice za punjenje $i$
$\sum L_i$	$m$	zbroy težinskih udaljenosti od stanice za punjenje $i$ do čvorova potražnje u uslužnom području
$\min C_{stanica,i}$	–	trošak lociranja stanice za punjenje
$S_i$	$W$	opterećenje trafostanice
$S_{i,max}$	$W$	maksimalno opterećenje trafostanice
$P_{Ci}$	$W$	Snaga punjenja pojedinačne stanice
$p_C^{max}$	$W$	maksimalna snaga punjenja kojom se distribucijska mreža može opteretiti
$U_i$	$V$	napon pojedinačnog čvora
$U_i^{min}$	$V$	minimalni napon pojedinačnog čvora
$U_i^{max}$	$V$	maksimalni napon pojedinačnog čvora
$M$		broj čvorova u distribucijskoj mreži

$I_{ij}$	$A$	električna struja kroz vodič napajanja
$I_{ij,max}$	$A$	maksimalna električna struja kroz vodič napajanja
$P_{C,ij}$	$W$	snaga punjenja od stanice $i$ koja povezuje mrežni čvor $j$
$P_{j,max}$	$W$	maksimalna snaga punjenja kojom se čvor $j$ može opteretiti
$(u, v, k)$	$J$	trošak energije baterijskog punjenja kod izračunavanja algoritma
$w_l(P_{s \rightarrow t}^j)$	—	
$w_l(v_i, v_j)$	—	težina brida između dva vrha uz ograničenje
$L_l$	—	
$c(v_i, v_j)$	$J$	trošak energije između dva vrha
$c_e^m(v_i, v_j)$	$J$	trošak energije između dva vrha koji poprima samo pozitivne vrijednosti
$w(v_i, v_j)$	—	težina brida između dva vrha bez ograničenja
$c_t(v_i, v_j)$	$s$	trošak vremenskog putovanja za segment rute
$L$	$s$	gornja vremenska granica (vremensko ograničenje)
$\beta$	—	pokazatelj razine riješenosti problema usmjeravanja
$c_t(P_{s \rightarrow t}^j)$	$s$	najkraća duljina puta od polazišta do odredišta, iskazana vremenskim troškom
$c_t(P_{v \rightarrow t})$	$s$	najkraća duljina puta između polazišnog i promatranog vrha iskazana vremenskim troškom
$c_t(P_{s \rightarrow t}^{SP})$	$s$	najkraća duljina puta od polazišta do odredišta, iskazana vremenskim troškom

## Popis relacija

$$P_{b-izlaz} = \frac{v}{\eta_t \eta_m} \left( M_v g (f_r + i) + \frac{1}{2} \rho_a C_D A_f v^2 + M_v \delta_{eqm} \frac{dv}{dt} \right) \quad (2.1)$$

$$P_{b-ulaz} = \frac{\alpha v}{\eta_t \eta_m} \left( M_v g (f_r + i) + \frac{1}{2} \rho C_D A_f v^2 + M \delta_{eqm} \frac{dv}{dt} \right) \quad (2.2)$$

$$E_{izlaz} = \int_{vuča} P_{b-izlaz} dt + \int_{kočenje} P_{b-ulaz} dt \quad (2.3)$$

$$F_L = BIl \quad (2.4)$$

$$T = BIl \cos \alpha \quad (2.5)$$

$$\Delta SOC = \frac{i_b dt}{Q(i_b)} \quad (2.6)$$

$$SOC = SOC_0 - \int \frac{i_b dt}{Q(i_b)} \quad (2.7)$$

$$EC = \int_0^t V(i_b, SOC) i_b(t) dt \quad (2.8)$$

$$\eta_b = \frac{V}{V_0} \quad (2.9)$$

$$\eta_b = \frac{V_0}{V} \quad (2.10)$$

$$E_{kap} = \frac{1}{2} CV^2 \quad (2.11)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sum F_t - \sum F_{tr}}{\delta_{eqm} M_v} \quad (3.1)$$

$$T_r = Pa \quad (3.2)$$

$$F = \frac{T_r}{r_d} = \frac{Pa}{r_d} = P f_r \quad (3.3)$$

$$F_r = P f_r \quad (3.4)$$

$$F_r = P f_r \cos \alpha \quad (3.5)$$

$$F_w = \frac{1}{2} \rho A_f C_D (v + v_m)^2 \quad (3.6)$$

$$F_g = M_v g \sin \alpha \quad (3.7)$$

$$i = \frac{H}{L} = \tan \alpha \approx \sin \alpha \quad (3.8)$$

$$F_{rd} = F_r + F_g = M_v g (f_r \cos \alpha + \sin \alpha) \quad (3.9)$$

$$F_{rd} = F_r + F_g = M_v g (f_r + i) \quad (3.10)$$

$$F_a = M_v (1 + \delta_{eqm}) \frac{dv}{dt} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} P_D(t) &= f_{P_D}(v, \dot{v}, M_v, \alpha) = (F_w + F_r + F_g + F_a)v \\ &= \frac{\rho}{2} A_f C_D v^3 + M_v g v (f_r \cos \alpha + \sin \alpha) \\ &\quad + M_v (1 + \delta_{eqm}) \dot{v} v \end{aligned} \quad (3.12)$$



$$v = \frac{ds}{dt} \quad (3.13)$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{v} \frac{dv}{dt}, v \neq 0 \quad (3.14)$$

$$P_D(s) = \frac{\rho}{2} A_f C_D v^3 + M_v g f_r v \cos \alpha + M_v g v \sin \alpha + M_v (1 + \delta_{eqm}) v^2 \frac{dv}{ds} \quad (3.15)$$

$$E_D(i) = \frac{\rho}{2} A_f C_D v^2 l_i + M_v g f_r l_i \cos \alpha_i + M_v g l_i \sin \alpha_i \quad (3.16)$$

$$E_R(i) = \frac{\rho}{2} A_f C_D v^2 l_i + M g f_r l_i \cos \alpha_i \quad (3.17)$$

$$E_P(i) = M g l_i \sin \alpha_i \quad (3.18)$$

$$c_e(i) = E_R(i) + E_P(i) \quad (3.20)$$

$$c_e(i) = \begin{cases} E_R(i) + \varphi E_P(i) & \text{ako je } E_P(i) \leq 0 \\ E_R(i) + E_P(i) & \text{ako je } E_P(i) > 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

$$c_e^m(i) = \begin{cases} E_R(i) + (\varphi - 1) E_P(i) & \text{ako je } E_P(i) \leq 0 \\ E_R(i) & \text{ako je } E_P(i) > 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

$$c \left( P_{v_0^j \rightarrow v_{i+1}^j}^j \right) = \sum_{k=0}^{k=i} c_e^m(k) \quad (3.23)$$

$$\Delta^i = C \left( P_{v_0^j \rightarrow v_{i+1}^j}^j \right) + c_e(i), \quad (i = 1, \dots, N) \quad (3.24)$$

$$C \left( P_{v_0^j \rightarrow v_{i+1}^j}^j \right) \quad (3.25)$$

$$= \begin{cases} C_{max} - C_{min} & \text{ako je } i = 0 \\ 0 & \text{ako je } i > 0, \Delta^i < 0 \\ \Delta^i & \text{ako je } i > 0, 0 \leq \Delta^i \leq C_{max} \\ \infty & \text{ako je } i > 0, \Delta^i > C_{max} \end{cases} \quad (3.26)$$

$$\widehat{E}_D(i) = \begin{cases} -\Delta^i & \text{ako je } i > 0, \Delta^i < 0 \\ 0 & \text{ako je } i > 0, 0 \leq \Delta^i \leq C_{max} \\ \infty & \text{ako je } i > 0, \Delta^i > C_{max} \end{cases} \quad (3.27)$$

$$c_e^m(i) = E_R(i) + (\varphi - 1) E_P(i) + \widehat{E}_D(i) \iff (E_P(i) \leq 0) \wedge (\Delta^i < 0) \quad (3.27)$$

$$c_e^m(i) = E_R(i) + \widehat{E}_D(i) \iff (E_P(i) \geq 0) \wedge (\Delta^i \geq 0) \quad (3.28)$$

$$\min C = \sum_{i=1}^N (C_{1i} + C_{2i} + C_{3i} + C_{4i} + C_{5i}) \quad (5.1)$$

$$C_{1i} = (e_i a_t + m_i b + c_i l_i + \omega_i) \frac{r_0(1 + r_0)^z}{(1 + r_0) - 1} \quad (5.2)$$

$$C_{2i} = (e_i a_t + m_i b + c_i l_{ki} + \omega_i) \eta \quad (5.3)$$

$$C_{3i} = e_i (C_{Fe} + C_{Cu}) T_v 365 p + m_i (C_L + C) k_t T_v 365 p \quad (5.4)$$

$$C_{4i} = \sum_{j=1}^{Num} p q_j P_v 365 \quad (5.5)$$

$$C_{5i} = h_1 + h_2 = \frac{\sum L_i}{g_{kh}} p 365 + \frac{\sum L_i}{v} k 365 = \sum_{j=1}^{Num} d_{ij} q_j \left( \frac{p}{g} + \frac{k_h}{v_e} \right) 365 \quad (5.6)$$

$$\min C_{station,i} = c_i l_i \frac{r_0(1+r_0)^z}{(1+r_0)^z - 1} + C_{5i} \quad (5.7)$$

$$S_i \leq S_{i,max} \quad (5.8)$$

$$\sum_{i=1}^N P_{Ci} \leq P_C^{max} \quad (5.9)$$

$$U_i^{min} \leq U_i \leq U_i^{max}, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (5.10)$$

$$|I_{ij}| \leq I_{ij,max} \quad i, j = 1, 2, \dots, M \quad (5.11)$$

$$P_{C,ij} \leq P_{j,max} \quad (5.12)$$

$$(u, v, k) \mapsto \begin{cases} -\Delta(u, v, k) & \text{ako je } \Delta(u, v, k) < 0 \\ 0 & \text{ako je } 0 \leq \Delta(u, v, k) \leq C \\ \infty & \text{ako je } \Delta(u, v, k) > C \end{cases} \quad (6.1)$$

$$w_l(P_{s \rightarrow t}^j) = \sum_{(v_i, v_k) \in P_{s \rightarrow t}^j} w_l(v_i, v_j) \leq L_l \quad (1 \leq l \leq m) \quad (6.2)$$

$$c(v_i, v_j) = c_e^m(v_i, v_j) \quad (6.3)$$

$$w(v_i, v_j) = c_t(v_i, v_j) \quad (6.4)$$

$$L = \beta c_t(P_{s \rightarrow t}^j) \quad (6.5)$$

$$c_t(P_{v \rightarrow t}) \leq c_t(P_{s \rightarrow t}^{SP}) \quad (6.6)$$