

# Optimizacija rute korištenjem matematičkih metoda

---

**Turkalj, Helena**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Transport and Traffic Sciences / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:119:370986>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-12**



*Repository / Repozitorij:*

[Faculty of Transport and Traffic Sciences -  
Institutional Repository](#)



Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet prometnih znanosti

**DIPLOMSKI RAD**

**OPTIMIZACIJA RUTE KORIŠTENJEM  
MATEMATIČKIH METODA**

**ROUTE OPTIMIZATION USING  
MATHEMATICAL METHODS**

Mentor: prof. dr. sc. Jasmina Pašagić Škrinjar

Student: Helena Turkalj

JMBAG: 0135258475

Zagreb, rujan 2024.

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**FAKULTET PROMETNIH ZNANOSTI**  
POVJERENSTVO ZA DIPLOMSKI ISPIT

Zagreb, 9. srpnja 2024.

Zavod: **Zavod za transportnu logistiku**  
Predmet: **Prijevozna logistika II**

## DIPLOMSKI ZADATAK br. 7548

Pristupnik: **Helena Turkalj (0135258475)**  
Studij: **Inteligentni transportni sustavi i logistika**  
Smjer: **Logistika**

Zadatak: **Optimizacija rute korištenjem matematičkih metoda**

Opis zadatka:

U radu je potrebno navesti metode optimizacije ruta. Definirati prednosti provođenja optimizacije ruta. Prikazati na primjeru primjenu optimizacije ruta korištenjem matematičkih metoda i definirati prednosti.

Mentor:

Predsjednik povjerenstva za  
diplomski ispit:

---

prof. dr. sc. Jasmina Pašagić Škrinjar

## **SAŽETAK**

Svakom logističkom poduzeću u cilju je smanjiti troškove i poboljšati uslugu. Poduzeća koja nude uslugu transporta, a koriste vlastiti vozni park izložena su problemom velikih troškova ukoliko nemaju razrađen pravilan koncept ruta prijevoza. Mogućnost povećanja troškova i smanjenja usluge prijevoza događa se ukoliko poduzeća ne koriste određene softverske alate za optimizaciju ruta to jest određuju rute prijevoza intuitivno. Matematičke metode za optimizaciju ruta mogu prikazati problem poduzeća te usmjeriti isto na daljnje unaprjeđenje usluge transporta kako bi se i samim time postigla konkurentnost na tržištu. Određivanje ruta matematičkim metodama kompleksan je proces ukoliko se radi o velikom broju ruta no može uvelike pomoći u samom djelovanju poduzeća.

**KLJUČNE RIJEČI:** optimizacija rute; matematičke metode; logističko poduzeće; transport; prijevozna logistika

## **SUMMARY**

The goal of every logistics company is to reduce costs and improve service. Companies that offer transport services and use their own vehicle fleet are exposed to the problem of high costs if they do not have a proper concept of transport routes. The possibility of increasing costs and reducing transport services occurs if companies do not use certain software tools for route optimization, that is, they intuitively determine transport routes. Mathematical methods for route optimization can show the company's problem and direct it to the further improvement of the transport service in order to achieve competitiveness on the market at the same time. Determining routes using mathematical methods is a complex process if there are a large number of routes, but it can greatly help in the operation of the company itself.

**KEYWORDS:** route optimization; mathematical methods; logistics company; transport; transport logistics

## Sadržaj

1.	UVOD.....	1
2.	ULOGA PRIJEVOZNE LOGISTIKE U TRANSPORTNOM LANCU .....	3
2.1	Definicija i ciljevi prijevozne logistike.....	3
2.2	Pojam i struktura transportnog lanca .....	5
3.	MATEMATIČKE METODE ZA OPTIMIZACIJU RUTA .....	7
3.1	Clarke and Wrightov algoritam ušteda .....	10
3.1.1	Postupak rješavanja problema Clarke and Wrightovim algoritmom ušteda.....	10
3.1.2	Optimizacija ruta korištenjem Clarke and Wrightovim algoritmom ušteda na primjeru	11
3.2	Clarke and Wrightov algoritam – metoda s indikatorom T .....	14
3.2.1	Postupak rješavanja problema Clarke and Wrightovim algoritmom – metoda s indikatorom T	14
3.2.2	Optimizacija ruta korištenjem Clarke and Wrightovim algoritmom – metoda s indikatorom T na primjeru.....	15
3.3	Metoda najbližeg susjeda.....	19
3.3.1	Postupak rješavanja problema metodom najbližeg susjeda.....	20
3.3.2	Optimizacija ruta korištenjem metode najbližeg susjeda na primjeru .....	20
4.	ANALIZA TRENUTNIH RUTA DISTRIBUCIJSKOG PODUZEĆA I PROJEKTIRANJE NOVIH KORISTEĆI MATEMATIČKU METODU.....	22
4.1	Ukratko o poduzeću Stridon promet d.o.o. ....	22
4.2	Analiza trenutnih ruta logističko distribucijskog poduzeća .....	23
4.3	Projektiranje ruta dostavnog vozila.....	26
4.3.1	Projektiranje rute dostavnog vozila koristeći Clarke and Wrightov algoritam ušteda – ponedjeljak.....	26
4.3.2	Projektiranje rute dostavnog vozila koristeći Clarke and Wrightov algoritam s indikatorom T – ponedjeljak .....	28
4.3.3	Projektiranje rute dostavnog vozila koristeći metodu najbližeg susjeda – ponedjeljak	32

4.3.4	Projektiranje rute dostavnog vozila koristeći Clarke and Wrightov algoritam ušteda – utorak	34
4.3.5	Projektiranje rute dostavnog vozila koristeći Clarke and Wrightov algoritam s indikatorom T – utorak	36
4.3.6	Projektiranje rute dostavnog vozila koristeći metodu najbližeg susjeda – utorak	39
4.3.7	Projektiranje rute dostavnog vozila koristeći Clarke and Wrightov algoritam ušteda – srijeda	40
4.3.8	Projektiranje rute dostavnog vozila koristeći Clarke and Wrightov algoritam s indikatorom T – srijeda	42
4.3.9	Projektiranje rute dostavnog vozila koristeći metodu najbližeg susjeda – srijeda	43
4.3.10	Projektiranje rute dostavnog vozila koristeći Clarke and Wrightov algoritam ušteda – četvrtak	45
4.3.11	Projektiranje rute dostavnog vozila koristeći Clarke and Wrightov algoritam s indikatorom T – četvrtak	46
4.3.12	Projektiranje rute dostavnog vozila koristeći metodu najbližeg susjeda – četvrtak	47
4.3.13	Projektiranje rute dostavnog vozila koristeći Clarke and Wrightov algoritam ušteda – petak	49
4.3.14	Projektiranje rute dostavnog vozila koristeći Clarke and Wrightov algoritam s indikatorom T – petak	51
4.3.15	Projektiranje rute dostavnog vozila koristeći metodu najbližeg susjeda – petak	54
5.	USPOREDBA TRENUTNOG STANJA I DOBIVENIH REZULTATA ANALIZE ....	56
6.	ZAKLJUČAK.....	59
	LITERATURA .....	60
	POPIS SLIKA .....	62
	POPIS TABLICA .....	63
	POPIS GRAFIKONA.....	66
	POPIS DIJAGRAMA.....	66
	POPIS KRATICA .....	66

## 1. UVOD

U današnjem poslovnom okruženju učinkovitost i optimizacija operativnih procesa postali su ključni faktori uspjeha i postizanja konkurentnosti na tržištu. U prijevoznj logistici optimizacija se može značajno primijeniti na rute prijevoza. Optimizacija rute odnosi se na proces planiranja najkraće, najbrže to jest najisplativije rute za prijevoz robe ili usluga između različitih lokacija. Suvremeni način optimizacije ruta je korištenje raznih softverskih alata koji ukazuju na najbrže rute s najmanjim troškovima, no neka poduzeća određuju same rute intuitivno.

Matematičke metode izvrstan su način za ukazivanje mogućih nedostataka trenutnog stanja ruta poduzeća. Matematičkim metodama moguće je doći do najboljeg rješenja unošenjem u izračun različite potrebne vrijednosti kao što su broj vozila, udaljenost od polazišta vozila do svake točke u kilometrima, troškovi potrošnje goriva i vremena i slično ovisno o tome koji se rezultat želi ostvariti.

Manja poduzeća koja intuitivno određuju rute možda ne vide razlog za analizu ruta matematičkim metodama, također možda trenutno stanje ruta koje se odredilo intuitivno i jest najbolje rješenje za samo poduzeće no analizom se može doći do točnih rješenja te utvrditi je li trenutno stanje prijevoza idealno ili nije.

Rad je strukturiran u šest poglavlja:

1. Uvod,
2. Uloga prijevozne logistike u transportnom lancu,
3. Matematičke metode za optimizaciju ruta,
4. Analiza trenutnih ruta distribucijskog poduzeća i projektiranje novih koristeći matematičku metodu,
5. Usporedba trenutnog stanja i dobivenih rezultata analize i,
6. Zaključak.

U prvom poglavlju uvesti će se u temu rada te strukturu samog rada. U drugom poglavlju definirat će se uloga prijevozne logistike u transportnom lancu to jest definirat će se pojam prijevozne logistike, njena uloga i utjecaj na poslovanje. Definirat će se transportni lanac, te će se navesti elementi transportne usluge i čimbenici samog transportnog lanca. Također, pojasniti će se rizici u prijevoznj logistici. U trećem poglavlju, definirati će se

matematičke metode te detaljnije pojasniti. Navest će se vrste matematičkih metoda te će se prikazati primjeri matematičkih metoda koji će se koristiti dalje u radu. U četvrtom poglavlju provest će se analiza ruta logističkog poduzeća. Približiti će se poslovanje poduzeća te uvesti će se u optimizaciju poslovanja istog. Odrediti će se rute dostavnog vozila za svaki dan u tjednu te će svaka ruta biti projektirana koristeći tri različite matematičke metode. U petom poglavlju usporediti će se rezultati dobiveni u četvrtom poglavlju, također će se usporediti i način na koji je osmišljena optimizacija poslovanja poduzeća. U šestom poglavlju osvrnuti će se na cijeli rad i donijeti zaključak.

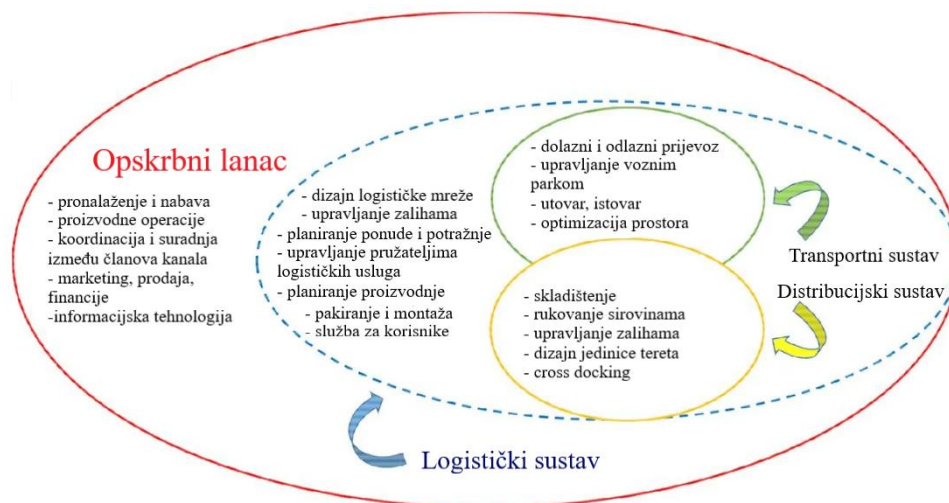


## 2. ULOGA PRIJEVOZNE LOGISTIKE U TRANSPORTNOM LANCU

Prijevozna usluga proizvodi se tako da ljudski kapital poduzeća uz pomoć transportne infrastrukture i suprastrukture prevozi transportni supstrat te stvara financijski kapital. Prijevoz je specijalizirana djelatnost koja uz prometnu infrastrukturu i suprastrukturu omogućuje prijevoz robe i ljudi od izvorišta do odredišta. Radnje koje su vezane uz transport su: ukrcaj, iskrcaj, prekrcaj, sortiranje, smještaj, slaganje, punjenje i pražnjenje kontejnera, signiranje koleta i slično. Za potrebe logističkih transportnih lanaca prijevoz mora biti neprekidan, mora omogućiti što kraće vrijeme dostave, uvažavati troškove i zadovoljiti kupca [1].

### 2.1 Definicija i ciljevi prijevozne logistike

Prijevozna logistika znanstvena je disciplina i stručna djelatnost koja se bavi organizacijom i optimizacijom prijevoza robe i ljudi [2]. Općenito, to je proces dobavljanja sirovina, rukovanja materijalom i distribucije proizvoda od točke proizvodnje do točke potrošnje. Logistika je podskup i dio sustava opskrbnog lanca, a transportni i distribucijski sustav dijelovi su logističkog sustava. Slika 1. prikazuje odnos elemenata opskrbnog lanca, te gdje je smještena prijevozna logistika [3].



Slika 1. Položaj prijevozne logistike u opskrbnom lancu

Izvor: [3]

Glavni je zadatak prijevozne logistike „pravi proizvod u pravo vrijeme na pravom mjestu“. Ona obuhvaća aktivnosti kao što su upravljanje nabavom, skladištenje, transport i distribucija te obuhvaća i dodatne aktivnosti koje poduzeću omogućuju dodatnu vremensku ili prostornu vrijednost [4].

Prijevozna logistika ima mnogo zadataka, a jedan od njih je paralelno prostorno i vremenski približiti proizvođača i krajnjeg kupca. Udaljenost između proizvođača i kupca generira najveći trošak s obzirom na cijenu transporta, ali u isto vrijeme rezultira raznim drugim troškovima kao što su primjerice dugo tranzitno vrijeme isporuke robe kupcu, smanjena dostupnost robe krajnjem kupcu i drugo.

Prijevozna logistika temelji se na sustavu upravljanja prijevozom, koji uključuju tri ključna procesa [5]:

1. Planiranje i odlučivanje,
2. Realizacija prijevoza i,
3. Mjerenje izvedbenih pokazatelja.

Planiranje i odlučivanje bazira se da to da prilikom planiranja procesa određuje se projektirani cilj, a na temelju postavljenog cilja donosi se odluka o strategiji ili potrebnim akcijama. Realizacija prijevoza odnosi se na sustav koji omogućuje menadžeru praćenje prijevoza tereta, što znači da u svakom trenutku može točno znati gdje se nalaze pošiljke. Mjerenje izvedbenih pokazatelja odnosi se na ključne pokazatelje uspješnosti u sustavima upravljanja prijevozom koji se analiziraju mjerenjem performansi ili izlaznih pokazatelja.

Ciljevi prijevozne logistike smatraju se relativnim, a ovise o mnogo čimbenika no kao opće ciljeve prijevozne logistike spominju se [5]:

- Smanjenje relacije prijevoza,
- Smanjenje troškova prijevoza, smanjenje tranzitnog vremena isporuke robe,
- Smanjenje negativnog ekološkog utjecaja,
- Povećanje dostupnosti robe krajnjem kupcu,
- Povećanje sigurnosti i drugo.

Iz perspektive prijevozne logistike i pružatelja logističkih usluga, važno je pratiti trendove kako bi sustav mogao funkcionirati bez poteškoća.

Trendovi u prijevoznom sustavu mogu se obilježiti sljedećim karakteristikama [5]:

- Rast potražnje; za prijevozom kako putnika tako i tereta. Povećava se broj putnika i količina tereta, ali i udaljenost na kojoj se prevozi,
- Smanjenje troškova; troškovi u prijevozu bilježe pad tijekom nekoliko desetljeća pa čak i za skupe prijevoze zrakoplovom ili brodom;
- Proširenje infrastrukture; rast potražnje i smanjenje troškova uvjetuju zahtjeve za prometnom infrastrukturom, kvantitativno i kvalitativno.

## 2.2 Pojam i struktura transportnog lanca

Transportni lanac je niz međusobno povezanih karika, odnosno partnera i aktivnih sudionika koji omogućuju brze, sigurne i racionalne procese proizvodnje transportnih proizvoda. Svaku kariku u transportnom lancu predstavlja jedan aktivni sudionik u procesu proizvodnje transportnih proizvoda kao što su: pošiljatelj, prijevoznik, skladištar, komisionar, primatelj i slično.

Elementi proizvodnje transportnih usluga su [6]:

- transportna infrastruktura,
- transportna suprastruktura,
- intelektualni kapital,
- financijski kapital,
- energija i,
- transportni supstrat odnosno predmet transportiranja.

Transportni lanac predstavljaju svi aktivni sudionici. Sudionici transportnog lanca u pravilu imaju različite to jest suprotne interese no u transportnom lancu ti isti interesi ih međusobno povezuju.

Čimbenici pri kreiranju transportnog lanca su primjerice [6]:

- broj i vrsta karika,
- predmeti transportiranja,
- mogu biti: mali, veliki, lagani, teški, kratki, dugački, malo vrijedni i iznimno vrijedni, suhi, rasuti, tekući, plinoviti, opasni, na paletama, u kontejnerima, u vozilima i tako dalje,
- transportne tehnologije,

- paletizacija, kontejnerizacija, RO - RO, RO – LO, FO – FO, Huckepack i bimodalna,
- geografski položaj otpremnog i odredišnog mjesta,
- transportna infrastruktura i suprastruktura,
- transportni intelektualni kapital,
- brzina otpreme i dopreme robe,
- kvaliteta otpreme i dopreme robe,
- i mnogi drugi.

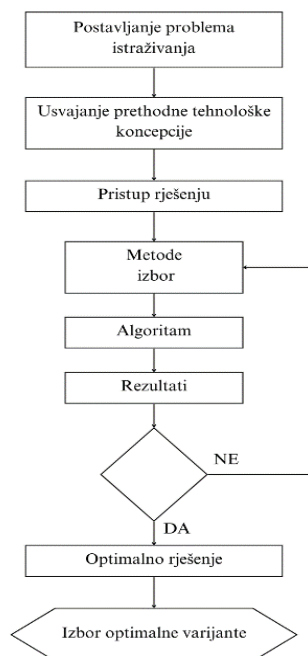
Duljina transportnog lanca ovisi o broju karika istog. Postoje kratki, dugački, veoma dugački i mega-transportni lanci. Karikama transportnog lanca koordinira jedan ili više poduzetnika, odnosno operatora transportnih pothvata, a to su u pravilu međunarodni špediteri to jest specijalisti za organizaciju otpreme, dopreme i prijevoza robe u međunarodnom prometu [6].

Rizici u transportnim lancima mijenjaju se kako poslovne strukture postaju sve globalnije, mreže sve složenije, a opskrbeni lanci i transport sve kompleksniji. Većina poduzeća u svojoj organizaciji ima odjele koji se bave analizom rizika i njihovim rješavanjem. Porast interesa za rizicima u opskrbnim lancima postao je trend u logistici, što je praćeno brojnim znanstvenim i stručnim radovima. Rizici u opskrbnim lancima obično se definiraju kao događaji koji negativno utječu na lanac, uzrokujući kašnjenja, poremećaje, zastoje ili potpuni prekid realizacije procesa. stoga, spektar rizika kojima su opskrbeni lanci izloženi vrlo je širok i može varirati od poremećaja unutar pojedinog procesa ili sudionika u lancu do prirodnih katastrofa koje mogu dovesti do prekida cijelog lanca. Rizici su jedan od osnovnih čimbenika koji utječu na izbor transportne usluge [5].

### 3. MATEMATIČKE METODE ZA OPTIMIZACIJU RUTA

Optimizacija ruta u logistici predstavlja proces planiranja najefikasnijih putanja za dostavu robe ili usluga, uzimajući u obzir različite faktore kao što su udaljenost, vrijeme, troškovi goriva, kapacitet vozila i vremenska ograničenja isporuke. Prioritet je minimizirati operativne troškove i vrijeme dostave, a istovremeno maksimizirati zadovoljstvo kupaca i efikasnost korištenja resursa. Tehnike optimizacije ruta često koriste napredne algoritme i softverska rješenja koja analiziraju sve relevantne podatke kako bi se generirale optimalne rute te stvaraju optimizacijski model. Optimizacijski modeli koriste se za analizu i odlučivanje o optimalnim rutama, a uzimaju u obzir skup zahtjeva kupaca, skup proizvodnih mogućnosti proizvođača, potencijalne posredničke točke, alternative transporta i time razvijaju optimalni sustav. Modeli mogu određivati informacije kao što su primjerice gdje bi trebala biti locirana skladišta, koje vrste transportnih opcija treba implementirati i slično [7].

Optimizacija ruta također pridonosi smanjenju varijabilnih troškova kao što su troškovi goriva. Da bi se takav trošak minimizirao, potrebno je u samom početku odrediti pravilan pristup poteškoćama s kojima se susreće, a na dijagramu 1. prikazan je opći pristup optimizaciji transportnog procesa [5].



Dijagram 1. Opći pristup optimizaciji transportnog procesa

Izvor: [5]

Kao tehnike optimizacije, klasificirane su metode matematičkog programiranja te su jedne od najšire korištenih alata za strateško i taktičko planiranje logistike. Matematičkim metodama moguće je provesti optimizaciju raznih procesa unutar lanca opskrbe primjerice određivanje optimalnih ruta, upravljanje zalihama, planiranje proizvodnje i slično. Matematički modeli predstavljaju problem u obliku matematičkih izraza koji opisuju različite aspekte logističkih procesa.

Matematičke metode uključuju algoritme kao što su primjerice linearno programiranje ili drugi matematički modeli za pronalaženje optimalnih rješenja problema. Te metode se često koriste kada problem nije pretjerano složen, kada su dostupni svi potrebni podaci te općenito kada nema prevelik broj podataka. Točnije, matematičke metode koriste da bi se problem definirao i razumio, a za rješavanje samog problema koriste se heurističke metode. Heurističke metode predstavljaju pristup korištenju iskustva, intuicije i vlastite procjene rješavanja problema.

Rješavanju problema usmjeravanja vozila to jest optimizaciji ruta može se pristupiti kao što je već navedeno heurističkim metodama, ali i egzaktnim i metaheurističkim metodama. Za razliku od egzaktnih metoda, heurističke metode ne predstavljaju znanje o strukturi ili odnosima unutar modela već predstavljaju pravila izbora, filtriranja i odbacivanja rješenja, a svrha im je smanjivanje broja mogućih puteva u postupku rješavanja problema. Heuristički algoritmi zasnivaju se na konstrukciji ruta gdje se optimizacija ruta vrši iterativno. Predstavnicima ovog pristupa konstruktivnim heurističkim metodama koji daju aproksimativne rezultate su Clarke and Wright, Sweep ili Christofias Mignosi Toth algoritmi. Metaheurističke metode upotrebljavaju se pri rješavanju velikog broja različitih problema. U praksi metaheuristika je skup algoritama gdje se algoritam vrlo malo mijenja ovisno o problemu koji se rješava. Metaheuristički pristup rješavanja zasniva se na lokalnoj pretrazi vođenoj procesima koji su preuzeti iz prirode kao što je simulirano kaljenje, genetički algoritmi i kolonije mravi. Svi pristupi rješavanju problema vozila prikazani su na slici 2 [8].



Slika 2. Pristupi rješavanju problema usmjeravanja vozila

Izvor: [8]

Heurističke metode rješavaju probleme kao što su problem usmjeravanja vozila (eng. *Vehicle Route Problem*, skraćeno VRP) i problem putujućeg trgovačkog putnika (eng. *Travelling Salesman Problem*, skraćeno TSP).

Problem putujućeg trgovačkog putnika (TSP) pronaći je rutu trgovca koji kreće od matične lokacije, posjećuje propisani skup gradova i vraća se na izvornu lokaciju na takav način da je ukupna prijeđena udaljenost minimalna i svaki grad posjećuje se točno jednom. Iako se poslovna tura modernog trgovačkog putnika ne može činiti previše složenom u smislu planiranja rute, TSP u svojoj općenitosti predstavlja tipičan „teški“ problem kombinatorne optimizacije [9].

Problem usmjeravanja vozila (VRP) jedan je od poznatijih problema u kombinatornoj optimizaciji, a njegovo proučavanje utjecalo je na istraživanje nekih egzaktnih i heurističkih rješenja opće primjenjivosti. U ovom problemu svaka ruta se sastoji od niza lokacija koje vozilo mora obići. Udaljenosti između lokacija kupaca, pa tako i između kupaca i početnog odredišta unaprijed su izračunate i poznate. Za svaku rutu vozilo kreće iz početnog odredišta i vraća se kada završi sve isporuke. Cilj VRP-a osmisliti je rutu koja minimizira ukupno prijeđenu udaljenost ili broj korištenih vozila uzimajući u obzir moguća ograničenja [10].

VRP dijeli se na više podvrsta, a one su [11]:

- Problem usmjeravanja vozila s ograničenjem kapaciteta vozila (eng. *Capacitated Vehicle Routing Problem*, skraćeno CVRP),

- Problem usmjeravanja vozila s ograničenjem kapaciteta vozila i udaljenosti (eng. *Distance Constrained Capacitated Vehicle Routing Problem*, skraćeno DCVRP),
- Problem usmjeravanja vozila s povratnim utovarom (eng. *Vehicle Routing Problem With Backhauls*, skraćeno VRPB),
- Problem usmjeravanja vozila s vremenskim prozorima (eng. *Vehicle Routing Problem With Time Windows*, skraćeno VRPTW),
- Problem usmjeravanja vozila s preuzimanjem i dostavom (eng. *Vehicle Routing Problem With Pick-Up And Delivering*, skraćeno VRPPD),
- Problem usmjeravanja vozila s povratnim utovarom i vremenskim prozorima (eng. *Vehicle Routing Problem With Backhauls And Time Windows*, skraćeno VRPBTW) i,
- Problem usmjeravanja vozila s preuzimanjem i dostavom unutar vremenskih prozora (eng. *Vehicle Routing Problem With Pick – Up And Delivery With Time Windows*, skraćeno VRPPDTW)

U ovom radu koristiti i pojasnit će se optimizacija ruta korištenjem heurističkih Clarke and Wrightovog algoritma ušteda, Clarke and Wrightovog algoritma - metoda s indikatorom T i korištenjem metode najbližeg susjeda.

### 3.1 Clarke and Wrightov algoritam ušteda

Clarke and Wrightova metoda razvijena je za probleme gdje je broj vozila neograničen. Bazira se na pojmu ušteda. Algoritam počinje od rješenja gdje svaka ruta ima samo početno odredište primjerice skladište i jednog korisnika. U svakoj iteraciji algoritma pokušavaju se ujediniti dvije rute prema kriteriju maksimalne uštede. Ušteda udaljenosti se ostvaruje prema formuli (1), a kada se dvije rute  $(0, \dots, i, 0)$  i  $(0, j, \dots, 0)$  mogu spojiti u jednu rutu  $(0, \dots, i, j, \dots, 0)$  [8].

$$s_{ij} = d_{0i} + d_{0j} - d_{ij} \quad (1)$$

#### 3.1.1 Postupak rješavanja problema Clarke and Wrightovim algoritmom ušteda

Postupak rješavanja problema Clarke and Wrightovim algoritmom ušteda može se prikazati u koracima.



### **Korak 1 (inicijalizacija)**

Svako vozilo kreće iz početne točke primjerice centralnog skladišta, posjećuje jednog kupca i vraća se u početnu točku. To prikazuje da je broj ruta koji se prevozi jednak broju kupaca [12].

### **Korak 2 (izračunavanje ušteta)**

Za svaku moguću iteraciju između dva kupca  $i$  i  $j$ , izračunava se ušteta  $s_{ij}$  korištenjem formule  $s_{ij} = d_{0i} + d_{0j} - d_{ij}(1)$  gdje je [12]:

- $d_{0i}$  udaljenost između početne točke i kupca  $i$ ,
- $d_{0j}$  udaljenost između početne točke i kupca  $j$ ,
- $d_{ij}$  udaljenost između kupaca  $i$  i  $j$ .

### **Korak 3 (sortiranje ušteta)**

Sve uštete sortiraju se u padajućem redoslijedu.

### **Korak 4 (formiranje ruta)**

Formiranje ruta vrši se na osnovu ušteta, počevši od najveće. Ako su kupci  $i$  i  $j$  u različitim rutama, i ako spojene rute ne prelaze kapacitet vozila, te rute se spajaju. Potrebno je da kupac  $i$  bude posljednji u svojoj ruti, a kupac  $j$  prvi u svojoj ruti, ili obrnuto.

### **Korak 5 (provjera ograničenja kapaciteta)**

Nakon svakog spajanja ruta, provjerava se da li ukupna količina robe u spojenoj ruti ne prelazi kapacitet vozila. Ako količina robe ne prelazi kapacitet vozila te u vozilu postoji još slobodnih paletnih mjesta ponavljaju se koraci 4 i 5 dok više nije moguće spojiti rute.

#### **3.1.2 Optimizacija ruta korištenjem Clarke and Wrightovim algoritmom ušteta na primjeru**

Ruta vozila 1 započinje iz početnog čvora u Mariboru te kreće prema Italiji. Prikuplja se roba sa sedam lokacija te se vraća natrag na početnu lokaciju. Tablicom 1. prikazane su sve lokacije i njihove udaljenosti od početnog čvora. Tablicom 2. prikazana je potpuna matrica udaljenosti za prikazane lokacije na temelju koje će se vršiti izračun [5].

Tablica 1. Podaci o ruti vozila 1

Čvor	Lokacija	Poštanski broj	Udaljenost od početnog čvora (km)
x <sub>0</sub>	Maribor (Slovenija)	2000	0
x <sub>1</sub>	Parma	43010	661
x <sub>2</sub>	PoggioRenatico	44028	478
x <sub>3</sub>	Monzabano	46040	499
x <sub>4</sub>	ReggioEmilia	42124	573
x <sub>5</sub>	Nonantola	41015	528
x <sub>6</sub>	S. Girolamo - Guastalla	42016	543
x <sub>7</sub>	Albeina	42020	583

Izvor: [5]

Tablica 2. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila 1

	x <sub>0</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>7</sub>
x <sub>0</sub>	0	661	478	499	573	528	543	583
x <sub>1</sub>	661	0	182	157	85	123	104	75
x <sub>2</sub>	478	182	0	116	92	49	74	99
x <sub>3</sub>	499	157	116	0	89	115	66	103
x <sub>4</sub>	573	85	92	89	0	44	28	17
x <sub>5</sub>	528	123	49	115	44	0	55	45
x <sub>6</sub>	543	104	74	66	28	55	0	42
x <sub>7</sub>	583	75	99	103	17	45	42	0

Izvor: [5]

Kao što je navedeno ranije u radu prvi korak optimizacije ruta koristeći ovu metodu je izračun ušteda između svakog para pojedinačno korištenjem formule (1) [5]:

- $s_{12} = d(0,1) + d(0,2) - d(1,2) = 661 + 478 - 182 = 957,$
- $s_{13} = d(0,1) + d(0,3) - d(1,3) = 661 + 499 - 157 = 1003,$
- $s_{14} = d(0,1) + d(0,4) - d(1,4) = 661 + 573 - 85 = 1149,$
- $s_{15} = d(0,1) + d(0,5) - d(1,5) = 661 + 528 - 123 = 1066,$
- $s_{16} = d(0,1) + d(0,6) - d(1,6) = 661 + 543 - 104 = 1100,$
- $s_{17} = d(0,1) + d(0,7) - d(1,7) = 661 + 583 - 75 = 1169,$
- $s_{23} = d(0,2) + d(0,3) - d(2,3) = 478 + 499 - 116 = 861,$
- $s_{24} = d(0,2) + d(0,4) - d(2,4) = 478 + 573 - 92 = 959,$
- $s_{25} = d(0,2) + d(0,5) - d(2,5) = 478 + 528 - 49 = 957,$
- $s_{26} = d(0,2) + d(0,6) - d(2,6) = 478 + 543 - 74 = 947,$
- $s_{27} = d(0,2) + d(0,7) - d(2,7) = 478 + 583 - 99 = 962,$
- $s_{34} = d(0,3) + d(0,4) - d(3,4) = 499 + 573 - 89 = 983,$

- $s_{35} = d(0,3) + d(0,5) - d(3,5) = 499 + 528 - 115 = 912,$
- $s_{36} = d(0,3) + d(0,6) - d(3,6) = 499 + 543 - 66 = 976,$
- $s_{37} = d(0,3) + d(0,7) - d(3,7) = 499 + 583 - 103 = 979,$
- $s_{45} = d(0,4) + d(0,5) - d(4,5) = 573 + 528 - 44 = 1057,$
- $s_{46} = d(0,4) + d(0,6) - d(4,6) = 573 + 543 - 28 = 1088,$
- $s_{47} = d(0,4) + d(0,7) - d(4,7) = 573 + 583 - 17 = 1139,$
- $s_{56} = d(0,5) + d(0,6) - d(5,6) = 528 + 543 - 55 = 1016,$
- $s_{57} = d(0,5) + d(0,7) - d(5,7) = 528 + 583 - 45 = 1066,$
- $s_{67} = d(0,6) + d(0,7) - d(6,7) = 543 + 583 - 42 = 1084.$

Sljedeći korak je rangirati dobivene uštede prema količini uštede od najveće do najmanje kao što je prikazano u tablici 3.

Tablica 3. Rangirane dobivene uštede od najveće do najmanje

Relacija (i,j)	Ušteta (i,j)	Relacija (i,j)	Ušteta (i,j)	Relacija (i,j)	Ušteta (i,j)
(1,7)	1169	(5,7)	1066	(2,7)	962
(1,4)	1149	(4,5)	1057	(2,4)	959
(4,7)	1139	(5,6)	1016	(1,2)	957
(1,6)	1100	(1,3)	1003	(2,5)	957
(4,6)	1088	(3,4)	983	(2,6)	947
(6,7)	1084	(3,7)	979	(3,5)	912
(1,5)	1066	(3,6)	976	(2,3)	861

Izvor: [5]

Posljednji korak u ovoj metodi formiranje je ruta prema dobivenim uštedama. Prilikom određivanja rute potrebno je zadovoljiti sva ograničenja koja je potrebno ispuniti. U nastavku je prikazan postupak i opis određivanja rute [5]:

- $(1,7) \Rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \rightarrow 0$ ; relacija  $(1,7)$  predstavlja najveću uštedu te se postavlja na početak rute,
- $(1,4) \Rightarrow 0 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \rightarrow 0$ ; iduća najveća ušteta je  $(1,4)$  te se može uključiti u rutu pošto je čvor 1 vanjski u ruti,
- $(4,7)$  i  $(1,6) \Rightarrow$  nije moguće pridružiti ruti pošto se čvor  $(4,7)$  već nalazi na ruti, a čvor 1 je unutarnji čvor u ruti te nije moguće spajanje,
- $(4,6) \Rightarrow 0 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \rightarrow 0$ ; iduća najveća ušteta je  $(4,6)$  te se može uvrstiti u rutu pošto je čvor 4 vanjski čvor u ruti,
- $(6,7) \Rightarrow$  nije moguće pridružiti u rutu pošto su točke već uključene u rutu i nije moguće spajanje,

- $(1,5) \Rightarrow$  ne može se pridružiti ruti jer je točka 1 unutarnji čvor u ruti,
- $(5,7) \Rightarrow 0 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \rightarrow 5 \rightarrow 0$ ; iduća najveća ušteda je  $(5,7)$  te se može uvrstiti u rutu jer je čvor 7 vanjski čvor u ruti,
- $(4,5)$  i  $(5,6) \Rightarrow$  iduće su najveće uštede, no već se nalaze u ruti pa se mogu zanemariti,
- $(1,3) \Rightarrow$  iduća je najveća ušteda, no ne može se uključiti u rutu pošto je čvor 1 unutarnji čvor i nisu zadovoljeni uvjeti ograničenja,
- $(3,4)$  i  $(3,7) \Rightarrow$  su iduće najveće uštede, ali nisu zadovoljeni uvjeti pošto su čvorovi 4 i 7 unutarnji čvorovi u ruti te nije moguće priključenje,
- $(3,6) \Rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \rightarrow 5 \rightarrow 0$ ; relacija  $(3,6)$  je iduća najveća ušteda te pošto je točka 6 vanjski čvor, moguće je uključenje,
- $(2,7)$ ,  $(2,4)$  i  $(1,2) \Rightarrow$  iduće su najveće uštede no nisu zadovoljeni svi uvjeti pa se preskaču i,
- $(2,5) \Rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 0$ ;  $(2,5)$  zadnja je najveća ušteda i ovim se uvrštavanjem kompletira ruta.

### 3.2 Clarke and Wrightov algoritam – metoda s indikatorom T

Metoda s indikatorom T varijacija je osnovnog Clarke and Wrightovog algoritma koji je pojašnjen ranije u radu. Ova metoda uvodi se radi dodatne fleksibilnosti i prilagodbe u procesu odlučivanja o spajanju ruta. Cilj metode s indikatorom T je kontrolirati koje rute mogu biti spojene na temelju specifičnih ograničenja. Metoda omogućuje detaljniju kontrolu nad formiranjem konačnih ruta, što može biti korisno u praktičnim primjerima gdje postoje dodatni operativni zahtjevi [13].

#### 3.2.1 Postupak rješavanja problema Clarke and Wrightovim algoritmom – metoda s indikatorom T

Postupak rješavanja problema Clarke and Wrightovim algoritmom – metoda s indikatorom T može se također prikazati u koracima, a prva dva koraka ista su kao i u prethodno opisanom Clarke and Wright-ovom algoritmu ušteda.

### **Korak 1 (inicijalizacija)**

Svako vozilo kreće iz početne točke primjerice centralnog skladišta, posjećuje jednog kupca i vraća se u početnu točku. To prikazuje da je broj ruta koji se prevozi jednak broju kupaca [13].

### **Korak 2 (izračunavanje ušteta)**

Za svaku moguću iteraciju između dva kupca  $i$  i  $j$ , izračunava se ušteta  $s_{ij}$  korištenjem formule  $s_{ij} = d_{0i} + d_{0j} - d_{ij}(1)$  gdje je [13]:

- $d_{0i}$  udaljenost između početne točke i kupca  $i$ ,
- $d_{0j}$  udaljenost između početne točke i kupca  $j$ ,
- $d_{ij}$  udaljenost između kupaca  $i$  i  $j$ .

### **Korak 3 (primjena indikatora T)**

Indikator T binarna je varijabla koja omogućuje ili onemogućuje spajanje određenih ruta. Definira se kao  $T_{ij} = 1 \rightarrow$  ako je spajanje dopušteno,  $T_{ij} = 0 \rightarrow$  ako spajanje nije dopušteno. Uštede se modificiraju prema formuli (2) [13]:

$$s_{ij} = T_{ij} (d_{0i} + d_{0j} - d_{ij}) \quad (2)$$

### **Korak 4 (sortiranje ušteta)**

Kao i u prethodnoj metodi uštete se sortiraju u padajućem redoslijedu od najveće do najmanje vrijednosti.

### **Korak 5 (formiranje ruta)**

Formiranje ruta obavlja se na temelju modificiranih ušteta. Rute se spajaju počevši od najvećih ušteta, pod uvjetom da spojene rute ne prelaze kapacitet vozila i da je indikator T pozitivan. Ako su sva ograničenja zadovoljena ponavljaju se koraci sve dok se ne iscrpe mogućnosti spajanja čvorova [13].

## 3.2.2 Optimizacija ruta korištenjem Clarke and Wrightovim algoritmom – metoda s indikatorom T na primjeru

Koristit će se isti primjer kao i u prethodnoj metodi optimizacije Clarke and Wrightovim algoritmom ušteta, te podaci iz tablice 1. koja prikazuje rute vozila 1.

U ovoj metodi neće biti potreban potpuni matrični prikaz udaljenosti to jest tablica 2. već samo polovica iste pošto je mreža simetrična što znači da su udaljenosti od točke A do točke B jednake kao od točke B do točke A. Tablica 4. prikazuje vrijednosti u gornjoj polovici matrice iznad dijagonale s izračunatim uštedama između svakog čvora [5].

Tablica 4. Matrica ušteta rute vozila 1 dobivene Clarke and Wright-ovim algoritmom s indikatorom T

Stupac1	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>	X <sub>7</sub>
X <sub>0</sub>	2	2	2	2	2	2	2
	X <sub>1</sub>	957	1003	1149	1066	1100	1169
		X <sub>2</sub>	861	959	957	947	962
			X <sub>3</sub>	983	912	976	979
				X <sub>4</sub>	1057	1088	1139
					X <sub>5</sub>	1016	1066
						X <sub>6</sub>	1084
							X <sub>7</sub>

Izvor: [5]

Vrijednosti indikatora T davat će informacije ako su dvije lokacije izravno povezane te može imati iduće vrijednosti [5]:

- $T = 0$  → indikator da vozilo neće ići izravno u čvorove  $i$  i  $j$ ,
- $T = 1$  → indikator da vozilo ide izravno u čvorove  $i$  i  $j$  te da se radi o jednosmjernom putovanju, odnosno da se vozilo ne vraća u početni čvor kao u prijašnjoj iteraciji  $i$ ,
- $T = 2$  → indikator da vozilo iz početnog čvora ide do određene lokacije te se vraća.

Nakon definirane polu-matrice potrebno je pronaći najveću uštedu između čvorova. Taj čvor može se priključiti u rutu jedino ako su zadovoljeni svi uvjeti. Bitno je da oba čvora nisu dio rute, te da je indikator T za oba čvora veći od 0. najveća ušteta nalazi se na čvorovima (1,7). Niti jedan čvor nije dio rute te je indikator za oba čvora veći od 0. Oba uvjeta su zadovoljena te se čvor (1,7) može priključiti ruti, a indikatore na svakom čvoru treba smanjiti na 1. Novonastala ruta je:  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \rightarrow 0$  [5].

Na tablici 5. prikazana je matrica uštete ruta vozila 1 dobivene Clarke and Wright-ovim algoritmom s indikatorom T poslije prve promjene vrijednosti indikatora.

Tablica 5. Matrica ušteda rute vozila 1 dobivene Clarke and Wright-ovim algoritmom s indikatorom T poslije prve promjene

	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>	X <sub>7</sub>
X <sub>0</sub>	1	2	2	2	2	2	1
X <sub>1</sub>							1
X <sub>2</sub>		957	1003	1149	1066	1100	1169
X <sub>3</sub>			861	959	957	947	962
X <sub>4</sub>				983	912	976	979
X <sub>5</sub>					1057	1088	1139
X <sub>6</sub>						1016	1066
X <sub>7</sub>							1084

Izvor: [5]

Iduća najveća ušteda nalazi se u čvoru (1,4), a uvjeti su zadovoljeni pošto su na oba čvora indikator T veći od 0. indikator se smanjuje za 1 te je novonastala ruta: 0 → 4 → 1 → 7 → 0 [5]. Tablica 6. prikazuje matricu sa drugom promjenom indikatora T ovog primjera.

Tablica 6. Matrica ušteda rute vozila 1 dobivene Clarke and Wright-ovim algoritmom s indikatorom T poslije druge promjene

	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>	X <sub>7</sub>
X <sub>0</sub>	0	2	2	1	2	2	1
X <sub>1</sub>				1			1
X <sub>2</sub>		957	1003	1149	1066	1100	1169
X <sub>3</sub>			861	959	957	947	962
X <sub>4</sub>				983	912	976	979
X <sub>5</sub>					1057	1088	1139
X <sub>6</sub>						1016	1066
X <sub>7</sub>							1084

Izvor: [5]

Iduće najveće uštede su čvorovi (4,7) i (1,6). oba čvora ne zadovoljavaju uvjete te ih se preskače. Nakon njih iduća najveća ušteda je u čvoru (4,6). U tom čvoru svi uvjeti su zadovoljeni, indikator se smanjuje za jedan te novonastala ruta je: 0 → 6 → 4 → 1 → 7 → 0 [5]. Tablica 7. prikazuje matricu sa trećom promjenom indikatora T ovog primjera.

Tablica 7. Matrica ušteda rute vozila 1 dobivene Clarke and Wright-ovim algoritmom s indikatorom T poslije treće promjene

	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>	X <sub>7</sub>	
X <sub>0</sub>	0	2	2	0	2	1	1	
	X <sub>1</sub>			1			1	
		X <sub>2</sub>	957	1003	1149	1066	1100	1169
			X <sub>3</sub>	861	959	957	947	962
				X <sub>4</sub>	983	912	976	979
						1		
					X <sub>5</sub>	1057	1088	1139
						X <sub>6</sub>	1016	1066
							X <sub>7</sub>	1084
								X <sub>7</sub>

Izvor: [5]

Iduće najveće uštede su u čvorovima (1,5) i (6,7), no ne zadovoljavaju se uvjeti te ih se zanemaruje i preskače. Iduća najveća ušteda je čvor (5,7) te zadovoljava sve uvjete, indikatori čvorova smanjuju se za 1, a novonastala ruta je: 0 → 6 → 4 → 1 → 7 → 5 → 0 [5].

Tablica 8. prikazuje matricu sa četvrtom promjenom indikatora T ovog primjera.

Tablica 8. Matrica ušteda rute vozila 1 dobivene Clarke and Wright-ovim algoritmom s indikatorom T poslije četvrte promjene

	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>	X <sub>7</sub>	
X <sub>0</sub>	0	2	2	0	1	1	0	
	X <sub>1</sub>			1			1	
		X <sub>2</sub>	957	1003	1149	1066	1100	1169
			X <sub>3</sub>	861	959	957	947	962
				X <sub>4</sub>	983	912	976	979
						1		
					X <sub>5</sub>	1057	1088	1139
							1	
						X <sub>6</sub>	1016	1066
							X <sub>7</sub>	1084
								X <sub>7</sub>

Izvor: [5]

Iduće najveće uštede su u čvorovima (4,5), (5,6), (1,3), (3,4) i (3,7). Pošto niti jedan čvor ne ispunjava uvjete preskaču se i zanemaruju. Iduća najveća ušteda koja zadovoljava uvjete je čvor (3,6), indikatori od svakog čvora smanjuju se za 1, a novonastala ruta je: 0 → 3 → 6 → 4 → 1 → 7 → 5 → 0 [5]. Tablica 9. prikazuje matricu sa petom promjenom indikatora T ovog primjera.



Tablica 9. Matrica ušteda rute vozila 1 dobivene Clarke and Wright-ovim algoritmom s indikatorom T poslije pete promjene

	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>	X <sub>7</sub>
X <sub>0</sub>	0	2	1	0	1	0	0
				1			1
	X <sub>1</sub>	957	1003	1149	1066	1100	1169
		X <sub>2</sub>	861	959	957	947	962
			X <sub>3</sub>			1	
				983	912	976	979
				X <sub>4</sub>		1	
					1057	1088	1139
					X <sub>5</sub>		1
						1016	1066
						X <sub>6</sub>	1084
							X <sub>7</sub>

Izvor: [5]

Iduća najveća ušteda koja ispunjava sve uvjete je čvor (2,5), indikatori se smanjuju za 1 i novonastala i optimalna ruta je: 0 → 3 → 6 → 4 → 1 → 7 → 5 → 2 → 0. Ovime je kompletirana ruta, a na to ukazuju i indikatori svakog čvora. Naime, svi čvorovi imaju vrijednost 0, osim dva vanjska čvora koji su u ovom primjeru x<sub>2</sub> i x<sub>3</sub> [5]. Na tablici 10. prikazana je finalna matrica uštede rute vozila 1.

Tablica 10. Finalna matrica ušteda rute vozila 1 dobivene Clarke and Wright-ovim algoritmom s indikatorom T

	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>	X <sub>7</sub>
X <sub>0</sub>	0	1	1	0	0	0	0
				1			1
	X <sub>1</sub>	957	1003	1149	1066	1100	1169
		X <sub>2</sub>			1		
			861	959	957	947	962
			X <sub>3</sub>			1	
				983	912	976	979
				X <sub>4</sub>		1	
					1057	1088	1139
					X <sub>5</sub>		1
						1016	1066
						X <sub>6</sub>	1084
							X <sub>7</sub>

Izvor: [5]

### 3.3 Metoda najbližeg susjeda

Metoda najbližeg susjeda (eng. *Nearest neighbor method*) heuristički je pristup rješavanju problema trgovačkog putnika i sličnih problema u logistici. Algoritam započinje s

proizvoljnim početnim čvorom i iterativno bira najbližeg susjeda, koji još nije posjećen sve dok se ne obiđu svi čvorovi. Algoritam završava povratkom u početni čvor [9].

### 3.3.1 Postupak rješavanja problema metodom najbližeg susjeda

Rješavanje metode najbližeg susjeda može se prikazati u pet koraka [9]:

1. **korak** → odabire se početni čvor, primjerice centralno skladište ili određena lokacija,
2. **korak** → iz odabranog početnog čvora pronalazi se najbliži neposjećeni susjed,
3. **korak** → najbliži susjed dodaje se u rutu i označuje se kao posjećeni,
4. **korak** → postupak se ponavlja dok se svi čvorovi ne posjete i,
5. **korak** → nakon obilaska svih čvorova, potrebno se vratiti u početni čvor.

### 3.3.2 Optimizacija ruta korištenjem metode najbližeg susjeda na primjeru

Zadana je matrica s udaljenostima između svakog čvora, te je prikazana u tablici 11.

Tablica 11. Matrica udaljenosti između svakog čvora s pronađenim prvim najbližim čvorom

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_0$	0	661	478	499	573	528	543	583
$x_1$	661	0	182	157	85	123	104	75
$x_2$	478	182	0	116	92	49	74	99
$x_3$	499	157	116	0	89	115	66	103
$x_4$	573	85	92	89	0	44	28	17
$x_5$	528	123	49	115	44	0	55	45
$x_6$	543	104	74	66	28	55	0	42
$x_7$	583	75	99	103	17	45	42	0

Izvor: [5]

Prvi najbliži čvor početnoj točki  $x_0$  je  $x_2$ . Uzimajući u obzir taj čvor u rutu, križaju se navedeni stupac i redak gdje se sijeku, te novonastala ruta je:  $0 \rightarrow 2 \rightarrow 0$ . Idući najbliži čvor prošlom je  $x_5$  te se također uvrštava u rutu što je prikazano na tablici 2, a novonastala ruta je:  $0 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 0$  [5].

Tablica 12. Matrica udaljenosti između svakog čvora s pronađenim drugim najbližim čvorom

	x <sub>0</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>7</sub>
x <sub>0</sub>	0	661	478	499	573	528	543	583
x <sub>1</sub>	661	0	182	157	85	123	104	75
x <sub>2</sub>	478	182	0	116	92	49	74	99
x <sub>3</sub>	499	157	116	0	89	115	66	103
x <sub>4</sub>	573	85	92	89	0	44	28	17
x <sub>5</sub>	528	123	49	115	44	0	55	45
x <sub>6</sub>	543	104	74	66	28	55	0	42
x <sub>7</sub>	583	75	99	103	17	45	42	0

Izvor: [5]

Nakon toga, najbliži čvor je x<sub>4</sub>, te novonastala ruta izgleda: 0 → 2 → 5 → 4 → 0. prikazani koraci ponavljaju se sve dok se ne dođe do zadnjeg čvora koji se spaja s početnim čvorom.

Tablica 13. prikazuje kompletnu matricu za ovaj primjer, a krajnji oblik rute je: 0 → 2 → 5 → 4 → 7 → 6 → 3 → 1 → 0 [5].

Tablica 13. Kompletna matrica metode najbližeg susjeda

	x <sub>0</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>7</sub>
x <sub>0</sub>	0	661	478	499	573	528	543	583
x <sub>1</sub>	661	0	182	157	85	123	104	75
x <sub>2</sub>	478	182	0	116	92	49	74	99
x <sub>3</sub>	499	157	116	0	89	115	66	103
x <sub>4</sub>	573	85	92	89	0	44	28	17
x <sub>5</sub>	528	123	49	115	44	0	55	45
x <sub>6</sub>	543	104	74	66	28	55	0	42
x <sub>7</sub>	583	75	99	103	17	45	42	0

Izvor: [5]

## 4. ANALIZA TRENUTNIH RUTA DISTRIBUCIJSKOG PODUZEĆA I PROJEKTIRANJE NOVIH KORISTEĆI MATEMATIČKU METODU

U ovom poglavlju opisano je poduzeće čiji će se podaci o vozilima i rutama dostava koristiti za analizu i izradu matematičkih metoda. Analizirat će se trenutni način obavljanja prijevoza u poduzeću Stridon promet d.o.o. te će se projektirati nove rute koristeći metode: Clarke and Wrightov algoritam ušteda, Clarke and Wrightov algoritam s metodom indikatora T te metoda najbližeg susjeda.

### 4.1 Ukratko o poduzeću Stridon promet d.o.o.

Poduzeće Stridon promet d.o.o. osnovana je 1991. godine te glavna djelatnost poduzeća je prodaja i distribucija alkoholnih i bezalkoholnih pića te prehrambenih i neprehrambenih proizvoda namijenjenih ugostiteljstvu i trgovini. Glavni cilj poduzeća zadovoljenje je potreba kupca ponudom kvalitetnih proizvoda i odlične usluge. Poduzeće Stridon promet d.o.o. tijekom godina usmjerava se na HoReCa (hoteli, restorani i kafići) sektor, veleprodaju i maloprodaju te uvoz robe, a svoju djelatnost obavlja kroz lanac maloprodajnih objekata i distributivne centre diljem Republike Hrvatske, pa i u inozemstvu, te na slici 7. je prikazana zgrada uprave gdje se također nalazi i centralno skladište [14].



Slika 3. Uprava poduzeća Stridon promet d.o.o.

Izvor: [14]

#### 4.2 Analiza trenutnih ruta logističko distribucijskog poduzeća

Poduzeće Stridon promet d.o.o. kao i mnoga poduzeća u sektoru prijevozne logistike u regiji, suočava se s izazovima optimizacije svojih prijevoznih ruta kako bi se povećala operativna efikasnost i smanjili troškovi. Poduzeće trenutno upravlja sa 45 prodajnih mjesta, od kojih je 20 marketa i 25 diskonta te su prikazani u tablici 14 te dodatno ima četiri veleprodajna centra uz centralno skladište.

Tablica 14. Prikaz prodajnih mjesta Stridon prometa d.o.o.

<b>Naziv prodajnog mjesta</b>	<b>Lokacija / Grad</b>
Market Stridon Knežija	Zagreb
Market Stridon Siget	Zagreb
Market Stridon Sesevski Kraljevec	Sesv. Kraljevec
Market Stridon Plaški	Plaški
Market Stridon Samobor	Samobor
Market Stridon Kvatrić	Zagreb
Market Stridon Orešje	Orešje
Market Stridon Virovitica	Virovitica
Market Stridon Maksimir	Zagreb
Market Stridon Ksaver	Zagreb
Market Stridon Grahorova	Zagreb
Market Stridon Mala Gorica	Sveta Nedjelja
Market Stridon Križpolje	Križpolje
Market Stridon Lučko	Lučko
Diskont Stridon Dugo Selo	Dugo Selo
Diskont Stridon Savica	Zagreb
Diskont Stridon Velika Gorica	Velika Gorica
Diskont Stridon Retkovec	Zagreb
Diskont Stridon Ivanić Grad	Ivanić Grad
Diskont Stridon Vrbovec	Vrbovec
Diskont Stridon Prečko	Zagreb
Diskont Stridon Zelina	Sv. Ivan Zelina
Diskont Stridon Kutina	Kutina
Diskont Stridon Novska	Novska
Diskont Stridon Čakovec	Čakovec
Diskont Stridon Daruvar	Daruvar
Diskont Stridon Oroslavlje	Oroslavlje
Diskont Stridon Glina	Glina
Diskont Stridon Zaprešić	Zaprešić
Diskont Stridon Velika Mlaka	Velika Mlaka
Diskont Stridon Slunj	Slunj

Izvor: autor

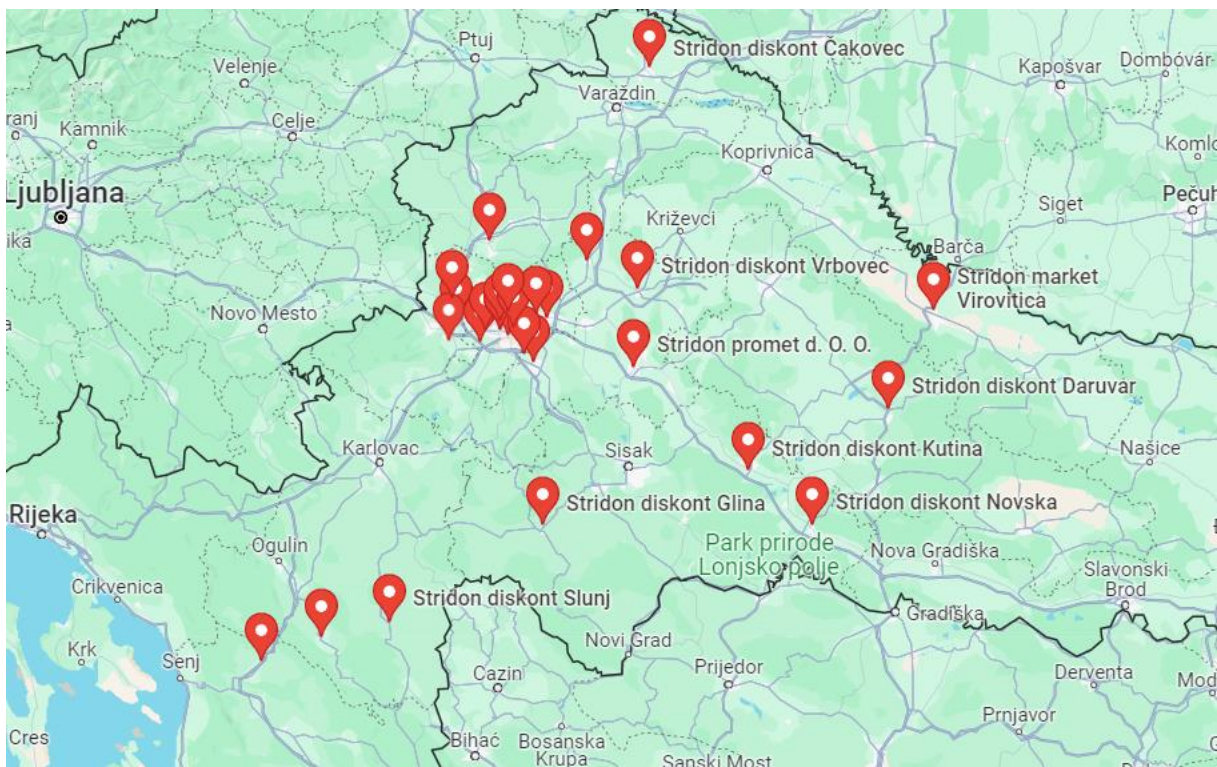
Također, Stridon promet d.o.o. ima vlastiti vozni park te raspolaže sa 11 vozila od kojih su:

- dva kamiona nosivosti od 12 paletnih mjesta,
- dva kamiona nosivosti od 16 paletnih mjesta,
- dva kamiona nosivosti od 7 paletnih mjesta,
- tri tegljača nosivost od 32 paletna mjesta i,
- dva vozila nosivosti od 4 paletna mjesta.

Iz centralnog skladišta prevozi se roba za skoro sva prodajna mjesta kamionima nosivosti od 16 paletnih mjesta, a za veleprodajne centre roba se prevozi tegljačima nosivosti od 32 paletna mjesta. Neki od prodajnih centara koji su u blizini veleprodajnih centara naručuju robu od njih umjesto s centralnog skladišta kako bi se isto rasteretilo. Također, Stridon promet d.o.o. obavlja distribuciju i za vanjske kupce koji se u ovom radu neće uzeti u obzir zbog nepredvidivosti narudžbi kupaca. S druge strane, prodajna mjesta Stridon prometa naručuju robu na tjednoj bazi, često čak i istim danima što omogućuje dosljedniji i predvidljiviji raspored isporuka. Stoga će se analiza fokusirati isključivo na distribuciju unutar mreže prodajnih mjesta Stridon prometa kako bi se postigla preciznija optimizacija logističkih procesa.

Trenutni sustav odabira ruta prijevoza u Stridon prometu temelji se na intuitivnom pristupu. Takav pristup, iako je fleksibilan, može rezultirati neoptimalnim korištenjem resursa te povećanim troškovima prijevoza. Intuitivno planiranje često ne uzima u obzir sve relevantne faktore kao što su prometna opterećenja, udaljenosti između skladišta i prodajnih mjesta, te specifične potrebe različitih prodajnih objekata. Jedna od glavnih slabosti trenutnog pristupa je nedostatak sustavnog pregleda i analize podataka, što otežava identifikaciju potencijalnih poboljšanja i implementaciju optimalnih ruta. Također, trenutno prijevozna logistika u Stridon prometu temelji se na praksi u kojoj svaki vozač mora obaviti tri odvojene rute i nakon svake vratiti se u centralno skladište, na način da prva ruta je dostava prodajnim centrima Stridon prometa, a ostale dvije rute su vanjskim kupcima, što možda nije najefikasniji pristup. Također, ukoliko se ne stigne prevesti svi potrebni vanjski kupci koji su prioritetniji šalje se vozače na četvrti izlaz koji je naknadno plaćen. U analizi matematičkim metodama predložiti će se da prijevozne operacije baziraju se na jednom izlazu dnevno po vozaču, ali s duljom i optimiziranom rutom. Ovaj pristup bi mogao smanjiti nepotrebne povratke u skladište, povećati produktivnost i smanjiti operativne troškove.

Tablica 14. prikazuje sva prodajna mjesta Stridon prometa koji naručuju robu direktno od centralnog skladišta. Kao što je vidljivo u tablici, svako prodajno mjesto ima broj dana koliko puta tjedno naručuje robu. Za potrebe izračuna matematičkim metodama, uvjeti koji će se morati ispuniti su kapacitet vozila i da je broj dana isporuke tjedno ispunjen. Prodajna mjesta market Stridon Sesevetski Kraljevec, market Stridon Samobor i diskont Stridon Dugo Selo naručuju veće količine narudžbe kako je prikazano u tablici 14. Ta prodajna mjesta se neće uzimati u obzir u računanju zbog toga što im veličina narudžbe ispunjava kapacitet vozila nosivosti do 16 paletnih mjesta, a s većim vozilom nije moguće dostaviti zbog neadekvatnog prilaza samom prodajnom mjestu. Na slici 5. prikazane su lokacije prodajnih mjesta po Republici Hrvatskoj koji će biti uzeti u obzir računanja.



Slika 4. Lokacije prodajnih mjesta Stridon prometa

Izvor: [16]

Za optimiziranje ruta te smanjenje troškova prijevoza planirano je na tjednoj bazi rasporediti i zadužiti vozilo koje će obavljati dostavu za prodajna mjesta Stridon prometa, tako da se ostalim resursima može fokusirati na vanjske kupce te samim time i poboljšati razina usluge dostave u smislu smanjenja vremena čekanja na narudžbu. Naime, analiza će se

izraditi za jedno vozilo veće nosivosti koje dostavlja na udaljenija i zahtjevnija mjesta za dostavu.

#### 4.3 Projektiranje ruta dostavnog vozila

Vozilo nosivosti 16 paletnih mjesta voziti će udaljenija prodajna mjesta te će raditi po jednu rutu dnevno to jest dostavljati će na prodajna mjesta koja naručuju robu jednom tjedno, osim petkom kada će voziti 2 rute dnevno na bliže lokacije koje imaju češće narudžbe. Analizirati će se svaki dan u tjednu zasebno.

##### 4.3.1 Projektiranje rute dostavnog vozila koristeći Clarke and Wrightov algoritam ušteta – ponedjeljak

Ruta dostavnog vozila ponedjeljkom započinje u centralnom skladištu Stridon prometa koji je lociran u naselju Sesvete u gradu Zagrebu. Dostavlja se pet lokacija te se vozilo vraća u centralno skladište. Tablicom 16. prikazani su podaci te udaljenosti od početnog čvora svake lokacije, a tablicom 17. prikazana je matrica udaljenosti za rutu dostavnog vozila ponedjeljkom.

Tablica 15. Prikaz podataka rute za dostavnog vozilo ponedjeljkom

Čvor	Lokacija	Udaljenost od početne točke [km]	Udaljenost od prethodne točke [km]
X <sub>0</sub>	Sesvete	0	0
X <sub>1</sub>	Zelina	29	29
X <sub>2</sub>	Vrbovec	33	19
X <sub>3</sub>	Ivanić grad	31	30
X <sub>4</sub>	Čakovec	94	102
X <sub>5</sub>	Oroslavlje	60	91

Ukupna duljina rute                      271 km

Izvor: autor



Tablica 16. Matrični prikaz udaljenosti za rutu dostavnog vozila za projektiranje pomoću Clarke and Wrightovog algoritma ušteta

	X <sub>0</sub>	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>
X <sub>0</sub>	0	29	33	31	94	60
X <sub>1</sub>	29	0	19	52	70	42
X <sub>2</sub>	33	19	0	30	84	56
X <sub>3</sub>	31	52	30	0	116	88
X <sub>4</sub>	94	70	84	116	0	92
X <sub>5</sub>	60	42	56	88	92	0

Izvor: autor

Prvi korak projektiranja rute izračunati je uštede za svaki par čvorova pomoću matrice udaljenosti. Dobivena vrijednost iz formule (1) prikazuje vrijednost uštete između dva čvora.

Uštede se računaju po formuli (1):

$$s_{ij} = d_{0i} + d_{0j} - d_{ij}$$

- $s_{12} = d(0,1) + d(0,2) - d(1,2) = 29 + 33 - 19 = 43,$
- $s_{13} = d(0,1) + d(0,3) - d(1,3) = 29 + 31 - 52 = 8,$
- $s_{14} = d(0,1) + d(0,4) - d(1,4) = 29 + 94 - 70 = 53,$
- $s_{15} = d(0,1) + d(0,5) - d(1,5) = 29 + 60 - 42 = 47,$
- $s_{23} = d(0,2) + d(0,3) - d(2,3) = 33 + 31 - 30 = 34,$
- $s_{24} = d(0,2) + d(0,4) - d(2,4) = 33 + 94 - 84 = 43,$
- $s_{25} = d(0,2) + d(0,5) - d(2,5) = 33 + 60 - 56 = 37,$
- $s_{34} = d(0,3) + d(0,4) - d(3,4) = 31 + 94 - 116 = 9,$
- $s_{35} = d(0,3) + d(0,5) - d(3,5) = 31 + 60 - 88 = 3,$
- $s_{45} = d(0,4) + d(0,5) - d(4,5) = 94 + 60 - 92 = 62,$

Nakon izračuna ušteta potrebno ih je smjestiti u tablicu po padajućem redosljedju od najveće prema najmanjoj, kao što je prikazano u tablici 18.

Tablica 17. Uštede za rutu dostavnog vozila po padajućem redosljedju – ponedjeljak

Relacija (i,j)	Ušteta (i,j)	Relacija (i,j)	Ušteta (i,j)
(4,5)	62	(2,5)	37
(1,4)	53	(2,3)	34
(1,5)	47	(3,4)	9
(1,2)	43	(1,3)	8
(2,4)	43	(3,5)	3

Izvor: autor

U posljednjem koraku Clarke and Wrightovog algoritma ušteda projektira se ruta prema uštedama danim u tablici 17. uz zahtjev da su sva operativna ograničenja i uvjeti ispunjeni. Izračun je prikazan u nastavku:

- $(4,5) \Rightarrow 0 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 0$ ; relacija  $(4,5)$  predstavlja najveću uštedu te se postavlja na početak rute,
- $(1,4) \Rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 0$ ; iduća najveća ušteda je  $(1,4)$  te se može uključiti u rutu pošto je čvor 4 vanjski u ruti,
- $(1,5) \Rightarrow$ čvor  $(1,5)$  već se nalazi na ruti te nije moguće spajanje,
- $(1,2) \Rightarrow 0 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 0$ ; iduća najveća ušteda je  $(1,2)$  te se može uvrstiti u rutu pošto je čvor 1 vanjski čvor u ruti,
- $(2,4)$  i  $(2,5) \Rightarrow$ čvorovi  $(2,4)$  i  $(2,5)$  već se nalaze na ruti te nije moguće spajanje,
- $(2,3) \Rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 0$ ; iduća najveća ušteda je  $(2,3)$  te se može uvrstiti u rutu pošto je čvor 2 vanjski čvor u ruti te je samim time iskorištena zadnja moguća ušteda i algoritam završava.

Optimalna dobivena ruta projektiranjem koristeći Clarke and Wrightov algoritam ušteda glasi:  $0 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 0 = 300$  km.

#### 4.3.2 Projektiranje rute dostavnog vozila koristeći Clarke and Wrightov algoritam s indikatorom T – ponedjeljak

Projektiranje rute Clarke and Wrightovim algoritmom s indikatorom T započinje izračivanjem polu matrice ušteda. Potpuna matrica nije potrebna pošto je njezina mreža simetrična. U tablici 19. prikazana je matrica ušteda rute vozila.

Tablica 18. Matrični prikaz izračuna rute dostavnog vozila ponedjeljkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T

	X1	X2	X3	X4	X5
X0	2	2	2	2	2
	X1	43	8	53	47
		X2	34	43	37
			X3	9	3
				X4	62
					X5

Izvor: autor

Drugi korak u projektiranju rute ovom metodom je definirati najveću uštedu čvorova. Čvor se može priključiti u rutu ukoliko su uvjeti zadovoljeni to jest bitno je da oba čvora nisu dio rute i da je indikator T veći od 0. Iz tablice 18. vidljivo je da je najveća ušteda u čvoru (4,5) i iznosi 62 kilometra. Oba uvjeta su zadovoljena te novonastala ruta je:  $0 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 0$ . Indikator T se smanjuje za vrijednost 1 kao što prikazuje tablica 20.

Tablica 19. Matrični prikaz izračuna rute dostavnog vozila ponedjeljkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T

	X1	X2	X3	X4	X5
X0	2	2	2	1	1
	X1	43	8	53	47
		X2	34	43	37
			X3	9	3
				X4	1 62
					X5

Izvor: autor

Iduća najveća ušteda nalazi se u čvoru (1,4). Svi uvjeti su zadovoljeni, indikator T se smanjuje za 1 te novonastala ruta glasi:  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 0$ . Ovaj korak prikazan je u tablici 21.

Tablica 20. Matrični prikaz izračuna rute dostavnog vozila ponedjeljkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T

	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>
X <sub>0</sub>	1	2	2	0	1
X <sub>1</sub>		43	8	1 53	47
X <sub>2</sub>			34	43	37
X <sub>3</sub>				9	3
X <sub>4</sub>					1 62
X <sub>5</sub>					

Izvor: autor

Iduća najveća ušteda nalazi se u čvoru (1,5) no čvor ne zadovoljava uvjete pošto su oba čvora već unutar rute te se zanemaruju. Iduća najveća ušteda je u čvorovima (1,2) i (2,4), a za oba čvora ušteda iznosi 43 kilometra. Čvor (2,4) mora se zanemariti pošto točka 4 je unutarnja točka rute. Čvor (1,2) zadovoljava sve uvjete te se njihov indikator T smanjuje za 1, a novonastala ruta je:  $0 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 0$ . Ovaj korak prikazan je u tablici 22.

Tablica 21. Matrični prikaz izračuna rute vozila ponedjeljkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T

	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>
X <sub>0</sub>	0	1	2	0	1
X <sub>1</sub>		1 43	8	1 53	47
X <sub>2</sub>			34	43	37
X <sub>3</sub>				9	3
X <sub>4</sub>					1 62
X <sub>5</sub>					

Izvor: autor

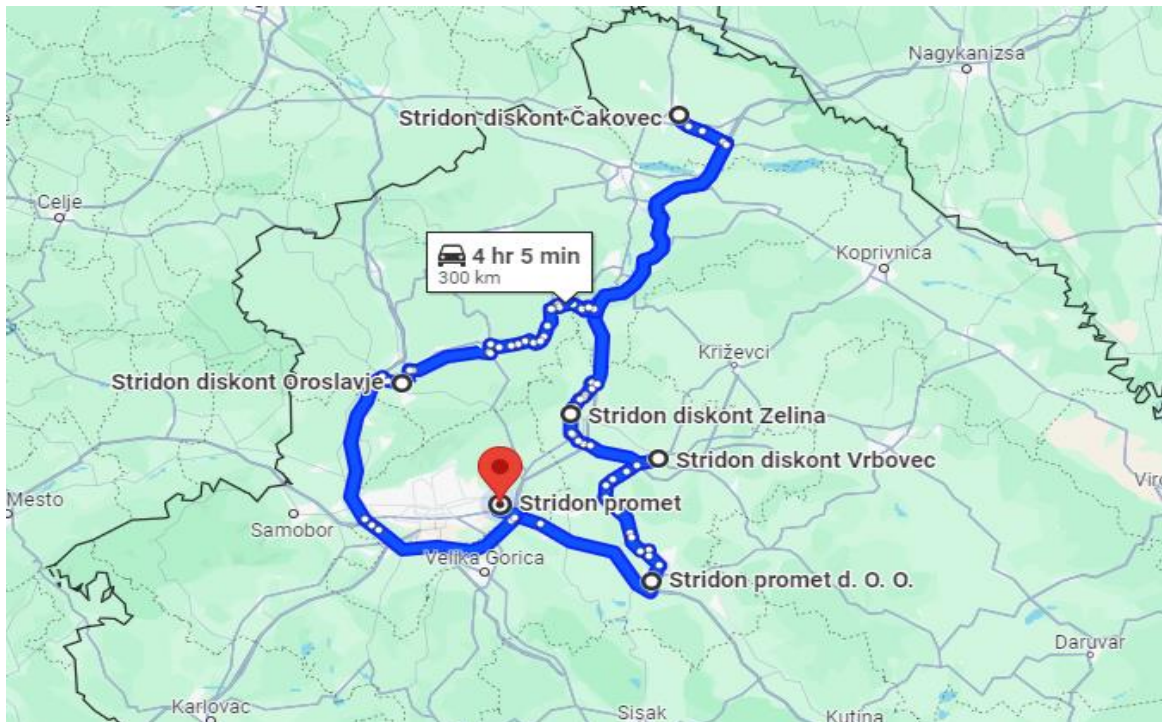
Iduća najveća ušteda je u čvoru (2,5) no pošto su obje točke već uključene u rutu, taj čvor se zanemaruje. Sljedeća najveća ušteda je u čvoru (2,3), taj čvor zadovoljava sve uvjete, indikator T je veći od 0 te se uključuje u rutu. Ovime se kompletira ruta i glasi:  $0 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 0 = 300 \text{ km}$ .

Tablica 22. Matrični prikaz izračuna rute vozila ponedjeljkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T

	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>
X <sub>0</sub>	0	0	1	0	1
X <sub>1</sub>	1 43	8	1 53	47	
X <sub>2</sub>		1 34	43	37	
X <sub>3</sub>			9	3	
X <sub>4</sub>				1 62	
X <sub>5</sub>					

Izvor: autor

U tablici 23. vidljivo je kako je indikator T jednak nuli za sve točke osim x<sub>3</sub> i x<sub>5</sub>. U tim točkama indikator T iznosi 1 zbog toga što su to vanjske točke rute. Udaljenost kompletirane rute iznosi isto kao i analiza rute koristeći prethodnu metodu to jest Clarke and Wrightov algoritam uštede te je ruta prikazana na slici 5.



Slika 5. Prikaz kompletne rute vozila ponedjeljkom dobiveno projektiranjem ruta koristeći Clarke and Wrightov algoritam ušteda i algoritam s indikatorom T

Izvor: [16]

#### 4.3.3 Projektiranje rute dostavnog vozila koristeći metodu najbližeg susjeda – ponedjeljak

Metoda najbližeg susjeda započinje tako da se definira najbliža točka početnoj točki  $x_0$ . Za potrebe projektiranja rute ovom metodom koristi se matični prikaz udaljenosti između točaka koji je vidljiv u tablici 24.

Tablica 23. Matični prikaz udaljenosti za rutu vozila za projektiranje rute metodom najbližeg susjeda - ponedjeljak

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_0$	0	29	33	31	94	60
$x_1$	29	0	19	52	70	42
$x_2$	33	19	0	30	84	56
$x_3$	31	52	30	0	116	88
$x_4$	94	70	84	116	0	92
$x_5$	60	42	56	88	92	0

Izvor: autor

Prvi najbliži čvor početnoj točki je čvor  $x_1$  međusobne udaljenosti 29 kilometara. Uzimajući taj čvor u rutu, potrebno je prekriziti navedeni stupac najbliže točke i redak početne točke te novonastala ruta je:  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ . Nakon toga potražuje se točka najmanje

međusobne udaljenosti s prethodnom točkom. Najbliža točka prethodnoj definira se promatrajući redak od prethodne točke te u ovom slučaju to je točka  $x_2$  s međusobnom udaljenosti od 19 kilometara, nakon čega se precrtava stupac točke  $x_2$  i redak točke  $x_1$ . Novonastala ruta je:  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 0$ . Nadalje, točka s najmanjom međusobnom udaljenosti sa točkom  $x_2$  je  $x_3$ . Kao i u prethodnim slučajevima, precrtavaju se redak i stupac tablice na isti način te novonastala ruta glasi:  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 0$ . Iduća najbliža točka prethodnoj, a da nije početna točka je  $x_5$  sa međusobnom udaljenosti od 88 kilometara. Precrtavaju se redak i stupac, te novonastala ruta je:  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 0$ . Iduća najbliža točka prethodnoj je točka  $x_4$  te ujedno time i zadnja točka. Iz točke  $x_4$  vraća se u početnu točku te se time kompletira optimizirana ruta koja glasi:  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 0 = 349$  km. Tablica 25. prikazuje izgled matrice nakon križanja, prateći korake rješavanja, a slika 6. prikazuje kompletiranu rutu.

Tablica 24. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila za projektiranje rute metodom najbližeg susjeda

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_0$	0	29	33	31	94	60
$x_1$	29	0	19	52	70	42
$x_2$	33	19	0	30	84	56
$x_3$	31	52	30	0	116	88
$x_4$	94	70	84	116	0	92
$x_5$	60	42	56	88	92	0

Izvor: autor



Slika 6. Prikaz kompletne rute vozila ponedjeljkom dobiveno projektiranjem ruta koristeći metodu najbližeg susjeda

Izvor: [16]

#### 4.3.4 Projektiranje rute dostavnog vozila koristeći Clarke and Wrightov algoritam ušteta – utarak

Ruta dostavnog vozila utorkom započinje u centralnom skladištu Stridon prometa. Dostavlja se pet lokacija te se vozilo vraća u centralno skladište. Tablicom 26. prikazani su podaci te udaljenosti od početnog čvora svake lokacije, a tablicom 27. prikazana je matrica udaljenosti za rutu vozila utorkom.

Tablica 25. Prikaz podataka rute za vozilo utorkom

Čvor	Lokacija	Udaljenost od početne točke [km]	Udaljenost od prethodne točke [km]
X <sub>0</sub>	Sesvete	0	0
X <sub>1</sub>	Kutina	71	71
X <sub>2</sub>	Glina	83	76
X <sub>3</sub>	Novska	95	103
X <sub>4</sub>	Daruvar	122	49
X <sub>5</sub>	Virovitica	146	45

Ukupna duljina rute 344 km

Izvor: autor

Tablica 26. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila za projektiranje pomoću Clarke and Wrightovog algoritma ušteta

	X <sub>0</sub>	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>
X <sub>0</sub>	0	71	83	95	122	146
X <sub>1</sub>	71	0	76	28	51	75
X <sub>2</sub>	83	76	0	103	129	153
X <sub>3</sub>	95	28	103	0	49	86
X <sub>4</sub>	122	51	129	49	0	49
X <sub>5</sub>	146	75	153	86	49	0

Izvor: autor

Prvi korak projektiranja rute izračunati je uštete za svaki par čvorova pomoću matrice udaljenosti. Dobivena vrijednost iz formule (1) prikazuje vrijednost uštete između dva čvora.

Uštete se računaju po formuli (1):

$$s_{ij} = d_{0i} + d_{0j} - d_{ij}$$

- $s_{12} = d(0,1) + d(0,2) - d(1,2) = 71 + 83 - 76 = 78,$
- $s_{13} = d(0,1) + d(0,3) - d(1,3) = 71 + 95 - 28 = 138,$



- $s_{14} = d(0,1) + d(0,4) - d(1,4) = 71 + 122 - 51 = 142,$
- $s_{15} = d(0,1) + d(0,5) - d(1,5) = 71 + 146 - 75 = 142,$
- $s_{23} = d(0,2) + d(0,3) - d(2,3) = 83 + 95 - 103 = 75,$
- $s_{24} = d(0,2) + d(0,4) - d(2,4) = 83 + 122 - 129 = 76,$
- $s_{25} = d(0,2) + d(0,5) - d(2,5) = 83 + 146 - 153 = 76,$
- $s_{34} = d(0,3) + d(0,4) - d(3,4) = 95 + 122 - 49 = 168,$
- $s_{35} = d(0,3) + d(0,5) - d(3,5) = 95 + 146 - 86 = 155,$
- $s_{45} = d(0,4) + d(0,5) - d(4,5) = 122 + 146 - 49 = 219,$

Nakon izračuna ušteda potrebno ih je smjestiti u tablicu po padajućem redosljedju od najveće prema najmanjoj, kao što je prikazano u tablici 28.

Tablica 27. Uštede za rutu vozila po padajućem redosljedju – utorak

Relacija (i,j)	Ušteda (i,j)	Relacija (i,j)	Ušteda (i,j)
(4,5)	219	(1,3)	138
(3,4)	168	(1,2)	78
(3,5)	155	(2,4)	76
(1,4)	142	(2,5)	76
(1,5)	142	(2,3)	75

Izvor: autor

U posljednjem koraku Clarke and Wrightovog algoritma ušteda projektira se ruta prema uštedama danim u tablici 28. uz zahtjev da su sva operativna ograničenja i uvjeti ispunjeni. Izračun je prikazan u nastavku:

- (4,5) => 0 → 4 → 5 → 0; relacija (4,5) predstavlja najveću uštedu od 219 kilometara te se postavlja na početak rute,
- (3,4) => 0 → 3 → 4 → 5 → 0; iduća najveća ušteda je (3,4) s udaljenosti od 168 kilometara te se može uključiti u rutu pošto je čvor 4 vanjski u rutu,
- (3,5) i (1,4) => čvor (3,5) već se nalazi na rutu te nije moguće spajanje, a čvor (1,4) nije moguće spojiti pošto je točka 4 unutarnja točka rute
- (1,5) => 0 → 3 → 4 → 5 → 1 → 0; iduća najveća ušteda je (1,5) te se može uvrstiti u rutu pošto je čvor 5 vanjski čvor u rutu,
- (1,3) => čvor (1,3) nalazi se na rutu te nije moguće spajanje,
- (1,2) => 0 → 3 → 4 → 5 → 1 → 2 → 0; iduća najveća ušteda je (1,2) s vrijednosti od 78 kilometara te se može uvrstiti u rutu pošto je čvor 1 vanjski čvor u rutu te je samim time iskorištena zadnja moguća ušteda i algoritam završava.

Optimalna dobivena ruta projektiranjem koristeći Clarke and Wrightov algoritam ušteda glasi:  $0 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 0 = 342$  km.

#### 4.3.5 Projektiranje rute dostavnog vozila koristeći Clarke and Wrightov algoritam s indikatorom T – utorak

Kao što je navedeno ranije u radu projektiranje rute Clarke and Wrightovim algoritmom s indikatorom T započinje izrađivanjem polu matrice ušteda. Tablica 29. prikazuje matricu ušteda rute vozila 1 utorkom prije ikakvih promjena.

Tablica 28. Matrični prikaz izračuna rute vozila utorkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T

	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>
X <sub>0</sub>	2	2	2	2	2
	X <sub>1</sub>	78	138	142	142
		X <sub>2</sub>	75	76	76
			X <sub>3</sub>	168	155
				X <sub>4</sub>	219
					X <sub>5</sub>

Izvor: autor

Iz tablice 28. prikazano je da je najveća ušteda u čvoru (4,5) i iznosi 219 kilometra. Oba uvjeta su zadovoljena te novonastala ruta je:  $0 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 0$ . Indikator T se smanjuje za vrijednost 1 kao što prikazuje tablica 30.

Tablica 29. Matrični prikaz izračuna rute vozila utorkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T

	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>
X <sub>0</sub>	2	2	2	1	1
	X <sub>1</sub>	78	138	142	142
		X <sub>2</sub>	75	76	76
			X <sub>3</sub>	168	155
				X <sub>4</sub>	1 219
					X <sub>5</sub>

Izvor: autor

Nakon toga, najveća sljedeća ušteda je u čvoru (3,4) koja iznosi međusobnu udaljenost od 168 kilometara. Ovaj čvor, također zadovoljava sve uvjete te se uzima u rutu koja sada

glasi:  $0 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 0$ . Indikatori T na točkama se smanje za 1 te je ovaj korak prikazan u tablici 31.

Tablica 30. Matrični prikaz izračuna rute vozila utorkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T

	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>
X <sub>0</sub>	2	2	1	0	1
	X <sub>1</sub>	78	138	142	142
		X <sub>2</sub>	75	76	76
			X <sub>3</sub>	1 168	155
				X <sub>4</sub>	1 219
					X <sub>5</sub>

Izvor: autor

Nadalje, iduća najveća ušteda je u čvoru (3,5) no njega nije moguće implementirati pošto su obje točke već uvrštene u rutu. Dalje, iduća najveća ušteda je 142 kilometra međusobne udaljenosti u čvoru (1,4) koji također nije moguće uvrstiti u rutu zbog toga što je točka x<sub>4</sub> unutarnja točka rute. S istim iznosom kao i prethodni je čvor (1,5) koji zadovoljava sve uvjete te je moguće uvrstiti ga u rutu. Indikatori točaka se smanjuju za 1 te se dobiva novonastala ruta koja glasi:  $0 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ . Postupak smanjivanja indikatora i trenutno stanje čvorova prikazano je u tablici 32.

Tablica 31. Matrični prikaz izračuna rute vozila utorkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T

	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>
X <sub>0</sub>	1	2	1	0	0
	X <sub>1</sub>	78	138	142	1 142
		X <sub>2</sub>	75	76	76
			X <sub>3</sub>	1 168	155
				X <sub>4</sub>	1 219
					X <sub>5</sub>

Izvor: autor

Zatim, iduća najveća ušteda iznosi 138 kilometara udaljenosti, a nalazi se u čvoru (1,3) koji nije moguće uvrstiti zbog toga što obje točke već pripadaju ruti. Nakon toga, najveća ušteda je 78 kilometara u čvoru (1,2) koji ispunjava sve zahtjeve te ga se moguće

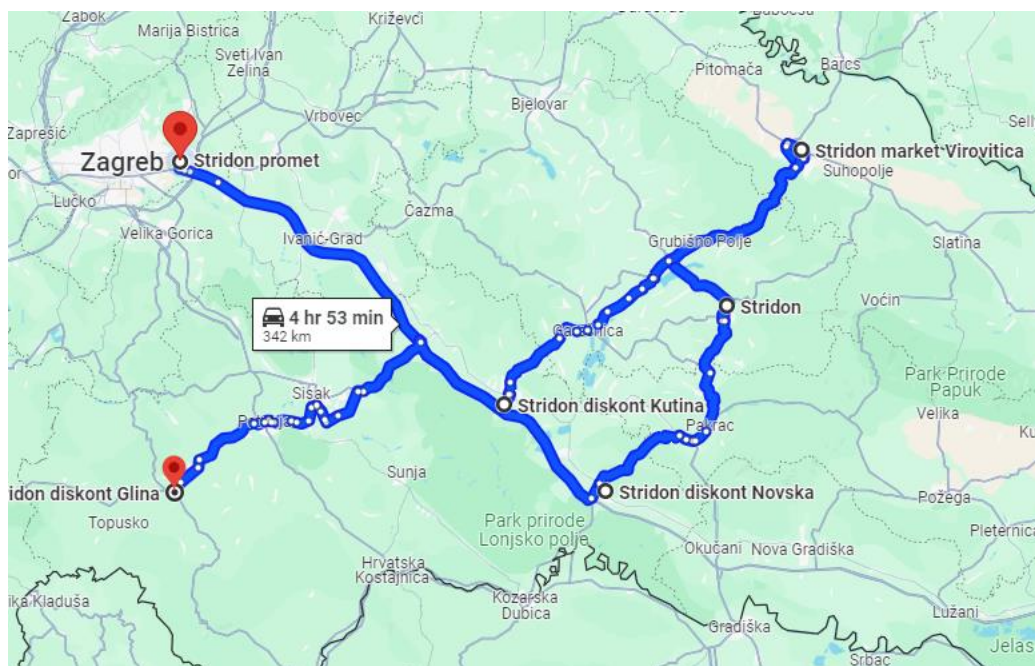
implementirati u rutu. S ovim čvorom ruta je kompletirana te glasi:  $0 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 0 = 342$  kilometra. Indikatori su vrijednosti 0, osim na vanjskim točkama rute što je vidljivo na tablici 33.

Tablica 32. Matrični prikaz izračuna rute vozila utorkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T

	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>
X <sub>0</sub>	0	1	1	0	0
X <sub>1</sub>	1	78	138	142	1
		X <sub>2</sub>	75	76	76
		X <sub>3</sub>	1	155	
				168	
			X <sub>4</sub>	1	
					219
				X <sub>5</sub>	

Izvor: autor

Udaljenost kompletirane rute iznosi isto kao i analiza rute koristeći prethodnu metodu to jest Clarke and Wrightov algoritam uštede te je ruta prikazana na slici 7.



Slika 7. Prikaz kompletne rute vozila utorkom dobiveno projektiranjem ruta koristeći Clarke and Wrightov algoritam uštede i algoritam s indikatorom T

Izvor: [16]

#### 4.3.6 Projektiranje rute dostavnog vozila koristeći metodu najbližeg susjeda – utarak

Rješavanje koristeći metodu najbližeg susjeda započinje definiranjem najbliže točke početnoj točki  $x_0$ . Za potrebe projektiranja rute ovom metodom koristi se matrični prikaz udaljenosti između točaka koji je vidljiv u tablici 34.

Tablica 33. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila za projektiranje rute metodom najbližeg susjeda - utarak

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_0$	0	71	83	95	122	146
$x_1$	71	0	76	28	51	75
$x_2$	83	76	0	103	129	153
$x_3$	95	28	103	0	49	86
$x_4$	122	51	129	49	0	49
$x_5$	146	75	153	86	49	0

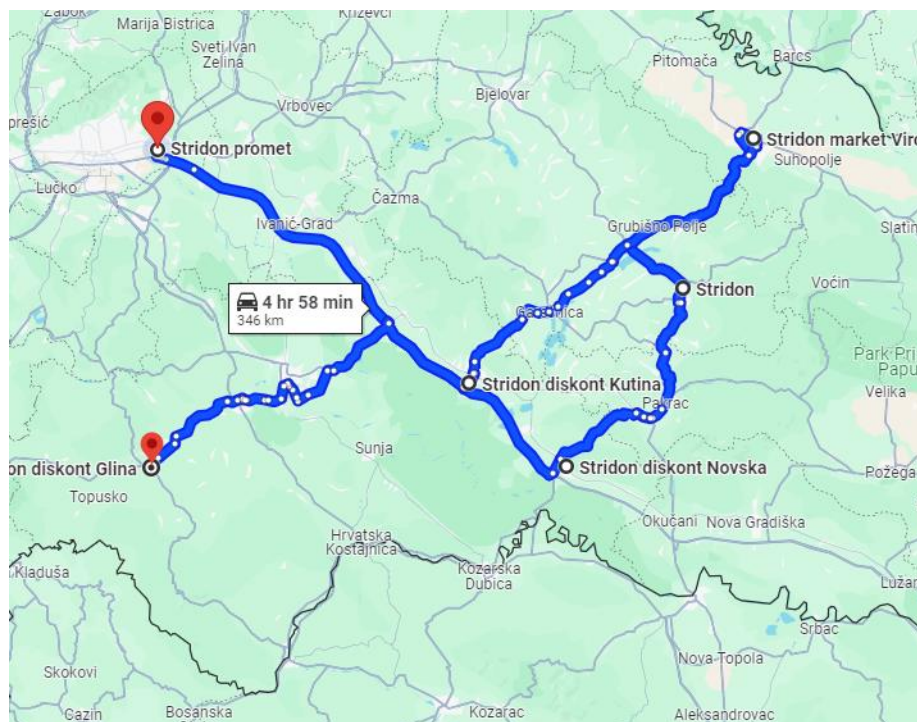
Izvor: autor

Najbliža točka početnoj je točka  $x_1$  sa vrijednosti od 71 kilometar međusobne udaljenosti. Trenutna ruta glasi:  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ . Precrtava se redak početne točke i stupac točke  $x_1$ . Nakon toga, najbliža točka prethodnoj je točka  $x_3$  kojima međusobna udaljenost iznosi 28 kilometara te se križa redak točke  $x_1$  i stupac točke  $x_3$ . Nakon toga, ruta glasi:  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 0$ . Iduća najbliža točka prethodnoj je točka  $x_4$ . Potrebno se prekriži, a ruta glasi:  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 0$ . Nadalje, najbliža točka prethodnoj je točka  $x_5$  sa vrijednosti od 49 kilometara međusobne udaljenosti te ruta glasi:  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 0$ . Zadnja točka koja je ostala je točka  $x_2$  te je ona od prethodne međusobno udaljena za 153 kilometara. Iz točke  $x_2$  vraća se u početnu točku. S time se završava optimizirana ruta koja glasi i iznosi:  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 0 = 346$  kilometara. Tablica 35. prikazuje izgled matrice nakon križanja, prateći korake rješavanja, a slika 8 prikazuje kompletiranu rutu.

Tablica 34. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila za projektiranje rute metodom najbližeg susjeda

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_0$	0	71	83	95	122	146
$x_1$	71	0	76	28	51	75
$x_2$	83	76	0	103	129	153
$x_3$	95	28	103	0	49	86
$x_4$	122	51	129	49	0	49
$x_5$	146	75	153	86	49	0

Izvor: autor



Slika 8. Prikaz kompletne rute vozila utorkom dobiveno projektiranjem ruta koristeći metodu najbližeg susjeda

Izvor: [16]

#### 4.3.7 Projektiranje rute dostavnog vozila koristeći Clarke and Wrightov algoritam ušteta – srijeda

Ruta dostavnog vozila srijedom započinje u centralnom skladištu Stridon prometa. Dostavlja se četiri lokacije te se vozilo vraća u centralno skladište. Tablicom 36. prikazani su podaci te udaljenosti od početnog čvora svake lokacije, a tablicom 37. prikazana je matrica udaljenosti za rutu vozila srijedom.

Tablica 35. Prikaz podataka rute za vozilo srijedom

Čvor	Lokacija	Udaljenost od početne točke [km]	Udaljenost od prethodne točke [km]
X <sub>0</sub>	Sesvete	0	0
X <sub>1</sub>	Orešje	39	39
X <sub>2</sub>	Mala Gorica	37	8
X <sub>3</sub>	Lučko	28	9
X <sub>4</sub>	Zaprešić	44	21

Ukupna duljina rute                      77 km

Izvor: autor

Tablica 36. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila za projektiranje pomoću Clarke and Wrightovog algoritma ušteda

	X <sub>0</sub>	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>
X <sub>0</sub>	0	39	37	28	44
X <sub>1</sub>	39	0	8	10	15
X <sub>2</sub>	37	8	0	9	21
X <sub>3</sub>	28	10	9	0	23
X <sub>4</sub>	44	15	21	23	0

Izvor: autor

Kao i u prethodnim slučajevima računaju se uštede za svaki par čvorova pomoću matrice udaljenosti.

Uštede se računaju po formuli (1):

$$s_{ij} = d_{0i} + d_{0j} - d_{ij}$$

- $s_{12} = d(0,1) + d(0,2) - d(1,2) = 39 + 37 - 8 = 68,$
- $s_{13} = d(0,1) + d(0,3) - d(1,3) = 39 + 28 - 10 = 57,$
- $s_{14} = d(0,1) + d(0,4) - d(1,4) = 39 + 44 - 15 = 68,$
- $s_{23} = d(0,2) + d(0,3) - d(2,3) = 37 + 28 - 9 = 56,$
- $s_{24} = d(0,2) + d(0,4) - d(2,4) = 37 + 44 - 21 = 60,$
- $s_{34} = d(0,3) + d(0,4) - d(3,4) = 28 + 44 - 23 = 49,$

Nakon izračuna ušteda potrebno ih je smjestiti u tablicu po redoslijedu od najveće prema najmanjoj, kao što je prikazano u tablici 38.

Tablica 37. Uštede za rutu vozila po padajućem redoslijedu – srijeda

Relacija (i,j)	Ušteda (i,j)	Relacija (i,j)	Ušteda (i,j)
(1,2)	68	(1,3)	57
(1,4)	68	(2,3)	56
(2,4)	60	(3,4)	49

Izvor: autor

U posljednjem koraku Clarke projektira se ruta prema uštedama danim u tablici 38. uz zahtjev da su sva operativna ograničenja i uvjeti ispunjeni. Izračun je prikazan u nastavku:

- (1,2)  $\Rightarrow$  0  $\rightarrow$  1  $\rightarrow$  2  $\rightarrow$  0; čvor (1,2) predstavlja najveću uštedu od 68 kilometara te se postavlja na početak rute,

- (1,4) => 0 → 4 → 1 → 2 → 0; iduća najveća ušteda je (1,4) s udaljenosti od također 68 kilometara te se može uključiti u rutu pošto je čvor 1 vanjski u ruti,
- (2,4) i (1,3) => čvor (2,4) već se nalazi na ruti te nije moguće spajanje, a čvor (1,3) nije moguće spojiti pošto je točka 1 unutarnja točka rute
- (2,3) => 0 → 4 → 1 → 2 → 3 → 0; iduća najveća ušteda je (2,3) te se može uvrstiti u rutu pošto je čvor 2 vanjski čvor u ruti, te je samim time iskorištena zadnja moguća ušteda i algoritam završava.

Optimalna dobivena ruta projektiranjem koristeći Clarke and Wrightov algoritam ušteda glasi: 0 → 4 → 1 → 2 → 3 → 0 = 107 km.

#### 4.3.8 Projektiranje rute dostavnog vozila koristeći Clarke and Wrightov algoritam s indikatorom T – srijeda

Kao što je navedeno ranije u radu projektiranje rute Clarke and Wrightovim algoritmom s indikatorom T započinje izračivanjem polu matrice ušteda. Tablica 39. prikazuje matricu ušteda rute vozila srijedom prije ikakvih promjena.

Tablica 38. Matrični prikaz izračuna rute vozila srijedom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T

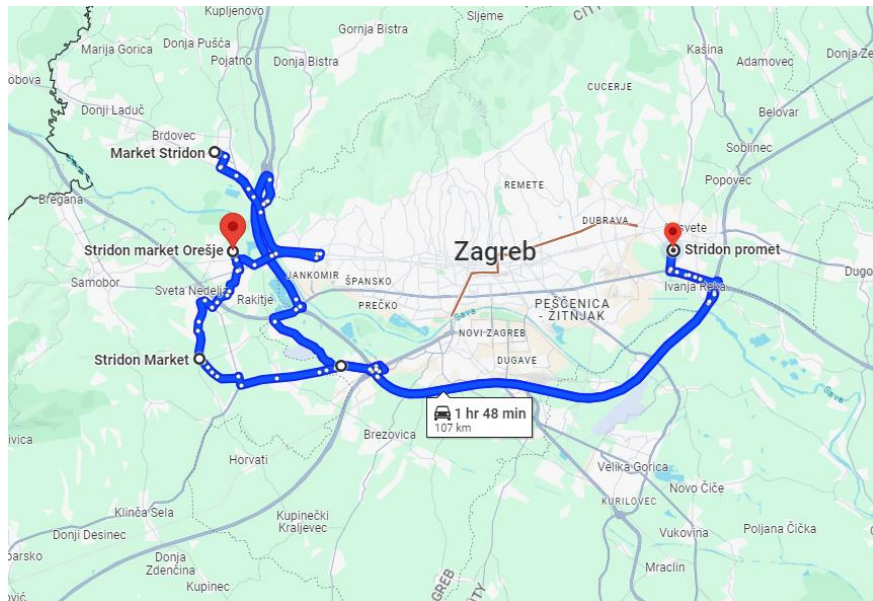
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>
X <sub>0</sub>	2	2	2	2
	X <sub>1</sub>	68	57	68
		X <sub>2</sub>	56	60
			X <sub>3</sub>	49
				X <sub>4</sub>

Izvor: autor

U ovom primjeru neće se prikazivati tablice za svaki korak zasebno pošto ima manje točaka od prethodnih primjera već će se opisati tekstualno. Naime, prva najveća ušteda koja se može očitati je od 68 kilometara udaljenosti, a prisutna je u dva čvora (1,2) i (1,4) pa se može uzeti bilo koji za potrebe računanja. Za ovaj izračun uzeti će se čvor (1,2) kao početne ruta glasi: 0 → 1 → 2 → 0. Ušteda (1,4) može se također uzeti u rutu pošto je točka 1 vanjska točka rute te ona glasi: 0 → 4 → 1 → 2 → 0. Nadalje, iduća najveća ušteda je u čvoru (2,4) s udaljenosti od 60 kilometara, no obje točke već pripadaju



ruti pa se taj čvor zanemaruje. Iduća ušteda iznosi 57 kilometara te se nalazi u čvoru (1,3) koji se također zanemaruje pošto je točka 1 unutarnja točka rute. Iduća ušteda je u čvoru (2,3) te iznosi 56 kilometara i implementira se u rutu pošto zadovoljava sve kriterije. Ta ušteda je zatim i zadnja koju je moguće uvrstiti u rutu te se time kompletira projektiranje. Kompletna ruta glasi i iznosi:  $0 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 0 = 107 \text{ km}$ . Udaljenost kompletirane rute iznosi isto kao i analiza rute koristeći prethodnu metodu to jest Clarke and Wrightov algoritam uštede te je ruta prikazana na slici 9.



Slika 9. Prikaz kompletne rute vozila srijedom dobiveno projektiranjem ruta koristeći Clarke and Wrightov algoritam ušteda i algoritam s indikatorom T

Izvor: [16]

#### 4.3.9 Projektiranje rute dostavnog vozila koristeći metodu najbližeg susjeda – srijeda

Rješavanje koristeći metodu najbližeg susjeda kao i u prethodnim primjerima započinje definiranjem najbliže točke početnoj točki  $x_0$ . Za potrebe projektiranja rute ovom metodom koristi se matricni prikaz udaljenosti između točaka koji je vidljiv u tablici 40.

Tablica 39. Matricni prikaz udaljenosti za rutu vozila za projektiranje rute metodom najbližeg susjeda - srijeda

	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
$X_0$	0	39	37	28	44
$X_1$	39	0	8	10	15
$X_2$	37	8	0	9	21
$X_3$	28	10	9	0	23
$X_4$	44	15	21	23	0

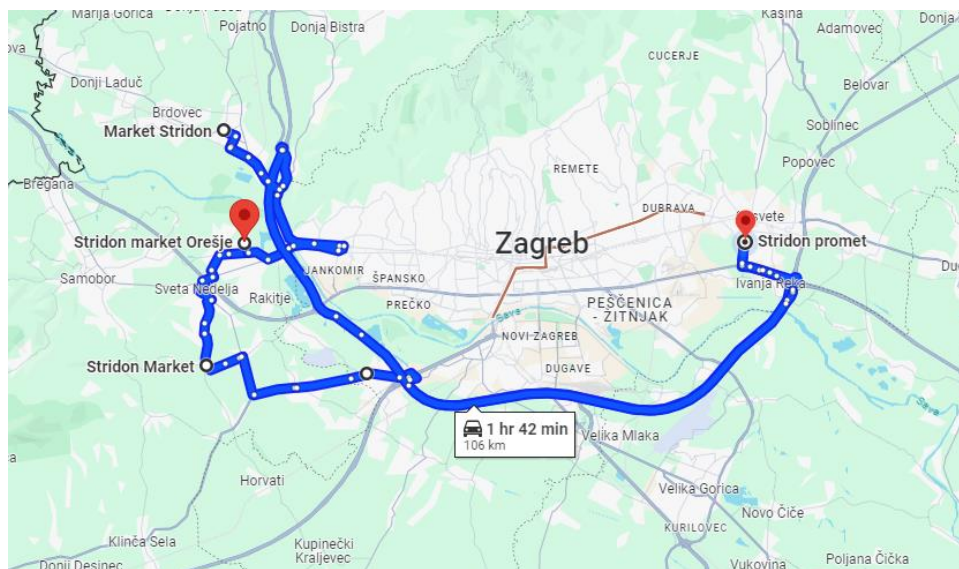
Izvor: autor

Točka koja je najbliža početnoj je točka  $x_3$  sa vrijednosti od 28 kilometara međusobne udaljenosti. Trenutna ruta glasi:  $0 \rightarrow 3 \rightarrow 0$ . Precrtava se redak početne točke i stupac točke  $x_3$ . Nakon toga, najbliža točka prethodnoj je točka  $x_2$  kojima međusobna udaljenost iznosi 9 kilometara te se križa redak točke  $x_3$  i stupac točke  $x_2$ . Nakon toga, ruta glasi:  $0 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 0$ . Iduća najbliža točka prethodnoj je točka  $x_1$ . Potrebno se prekriži, a ruta glasi:  $0 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ . Nadalje, najbliža točka prethodnoj je točka  $x_4$  sa vrijednosti od 15 kilometara međusobne udaljenosti te ruta glasi:  $0 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 0$ . S time se završava optimizirana ruta koja glasi i iznosi:  $0 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 0 = 106$  kilometara. Tablica 41. prikazuje izgled matrice nakon križanja, prateći korake rješavanja, a slika 10 prikazuje kompletiranu rutu.

Tablica 40. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila za projektiranje rute metodom najbližeg susjeda

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$x_0$	0	39	37	28	44
$x_1$	39	0	8	10	15
$x_2$	37	8	0	9	21
$x_3$	28	10	9	0	23
$x_4$	44	15	21	23	0

Izvor: autor



Slika 10. Prikaz kompletne rute vozila srijedom dobiveno projektiranjem ruta koristeći metodu najbližeg susjeda

Izvor: [16]

#### 4.3.10 Projektiranje rute dostavnog vozila koristeći Clarke and Wrightov algoritam ušteta – četvrtak

Ruta dostavnog vozila četvrtkom započinje u centralnom skladištu Stridon prometa. Dostavlja se tri lokacije te se vozilo vraća u centralno skladište. Tablicom 42. prikazani su podaci te udaljenosti od početnog čvora svake lokacije, a tablicom 43. prikazana je matrica udaljenosti za rutu vozila četvrtkom.

Tablica 41. Prikaz podataka rute za vozilo četvrtkom

Čvor	Lokacija	Udaljenost od početne točke [km]	Udaljenost od prethodne točke [km]
x <sub>0</sub>	Sesvete	0	0
x <sub>1</sub>	Plaški	136	136
x <sub>2</sub>	Križpolje	143	35
x <sub>3</sub>	Slunj	156	69

Ukupna duljina rute                      240 km

Izvor: autor

Tablica 42. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila za projektiranje pomoću Clarke and Wrightovog algoritma ušteta

	x <sub>0</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>
x <sub>0</sub>	0	136	143	156
x <sub>1</sub>	136	0	35	53
x <sub>2</sub>	143	35	0	69
x <sub>3</sub>	156	53	69	0

Izvor: autor

Ruta četvrtkom znatno ima manje lokacija za posjetiti zbog toga što udaljenija prodajna mjesta naručuju rjeđe robu s centralnog skladišta, ali u većim količinama te nije bilo moguće uvrstiti još lokacija zbog kapaciteta vozila. Kao i u prethodnim slučajevima računaju se uštete za svaki par čvorova pomoću matrice udaljenosti. U ovom primjeru biti će puno manje ušteta za uključiti, a izračun je u nastavku.

Uštete se računaju po formuli (1):

$$s_{ij} = d_{0i} + d_{0j} - d_{ij}$$

- $s_{12} = d(0,1) + d(0,2) - d(1,2) = 136 + 143 - 35 = 244,$
- $s_{13} = d(0,1) + d(0,3) - d(1,3) = 136 + 156 - 53 = 239,$

- $s_{23} = d(0,2) + d(0,3) - d(2,3) = 143 + 156 - 69 = 230$ .

U samom izračunu vidljivo je da su uštede poredane od najveće do najmanje no svakako ih je potrebno ih smjestiti u tablicu po redoslijedu, kao što je prikazano u tablici 44.

Tablica 43. Uštede za rutu vozila po padajućem redoslijedu – četvrtak

Relacija (i,j)	Ušteda (i,j)
(1,2)	244
(1,3)	239
(2,3)	230

Izvor: autor

Samim time odmah je vidljivo kako će ruta izgledati. Najveća ušteda je u čvoru (1,2) te ruta započinje:  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 0$ . Nakon toga slijedi ušteda (1,3) koja ispunjava sve uvjete te ruta glasi:  $0 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 0$ . Iduća ušteda nije potrebna pošto su sve točke uključene u rutu te kompletirana ruta glasi i iznosi:  $0 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 0 = 349$  km.

#### 4.3.11 Projektiranje rute dostavnog vozila koristeći Clarke and Wrightov algoritam s indikatorom T – četvrtak

Projektiranje rute Clarke and Wrightovim algoritmom s indikatorom T započinje izrađivanjem polu matrice ušteda. Tablica 45. prikazuje matricu ušteda rute vozila četvrtkom prije ikakvih promjena.

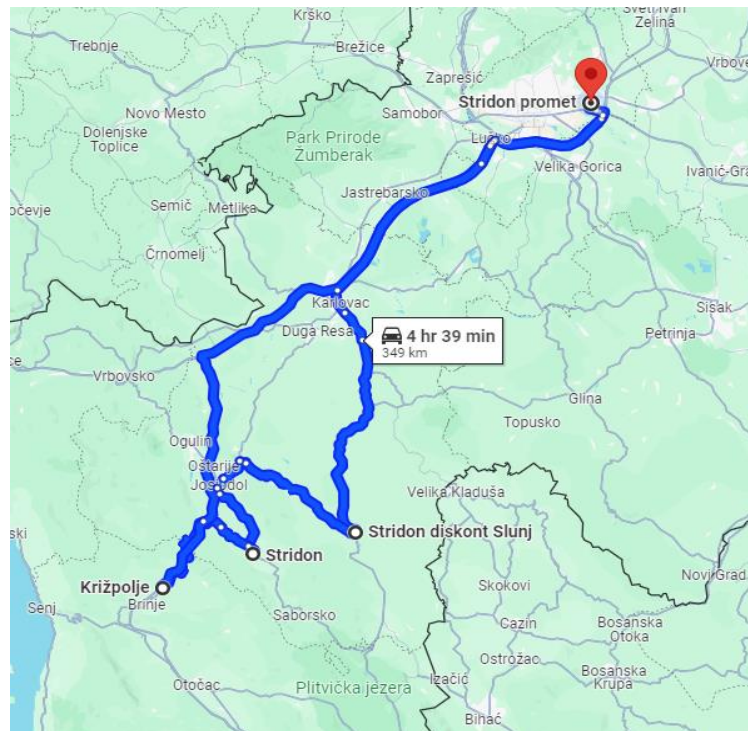
Tablica 44. Matrični prikaz izračuna rute vozila četvrtkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T

	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>
x <sub>0</sub>	2	2	2
	x <sub>1</sub>	244	239
		x <sub>2</sub>	230
			x <sub>3</sub>

Izvor: autor

Kao i u prethodnom slučaju, neće se prikazivati matrice svakog koraka projektiranja rute, pošto ne sadrži puno točaka već će se pojasniti u nastavku. Najveća ušteda je u čvoru (1,2) s iznosom od 244 kilometara međusobne udaljenosti te se taj čvor prvi uključuje u rutu. Indikator T za svaku točku smanjuje se za 1. Ruta sada glasi:  $0 \rightarrow 1$

→ 2 → 0. Nakon toga, najveća iduća ušteda je u čvoru (1,3) s vrijednosti od 239 kilometara međusobne udaljenosti, indikatori T su veći od 0 u točkama te se taj čvor uključuje u rutu. Ruta glasi: 0 → 3 → 1 → 2 → 0, te samim time ista je i kompletna pošto su sve točke uključene u rutu. Ovakva ruta ukupno iznosi 349 kilometara. Udaljenost kompletirane rute iznosi isto kao i analiza rute koristeći prethodnu metodu to jest Clarke and Wrightov algoritam uštede te je ruta prikazana na slici 11.



Slika 11. Prikaz kompletne rute vozila četvrtkom dobiveno projektiranjem ruta koristeći Clarke and Wrightov algoritam ušteda i algoritam s indikatorom T

Izvor: [16]

#### 4.3.12 Projektiranje rute dostavnog vozila koristeći metodu najbližeg susjeda – četvrtak

Definiranjem najbliže točke početnoj točki  $x_0$  započinje se projektiranje rute koristeći metodu najbližeg susjeda. Za potrebe projektiranja rute ovom metodom koristi se matrični prikaz udaljenosti između točaka koji je vidljiv u tablici 46.

Tablica 45. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila za projektiranje rute metodom najbližeg susjeda - četvrtak

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$x_0$	0	136	143	156
$x_1$	136	0	35	53
$x_2$	143	35	0	69
$x_3$	156	53	69	0

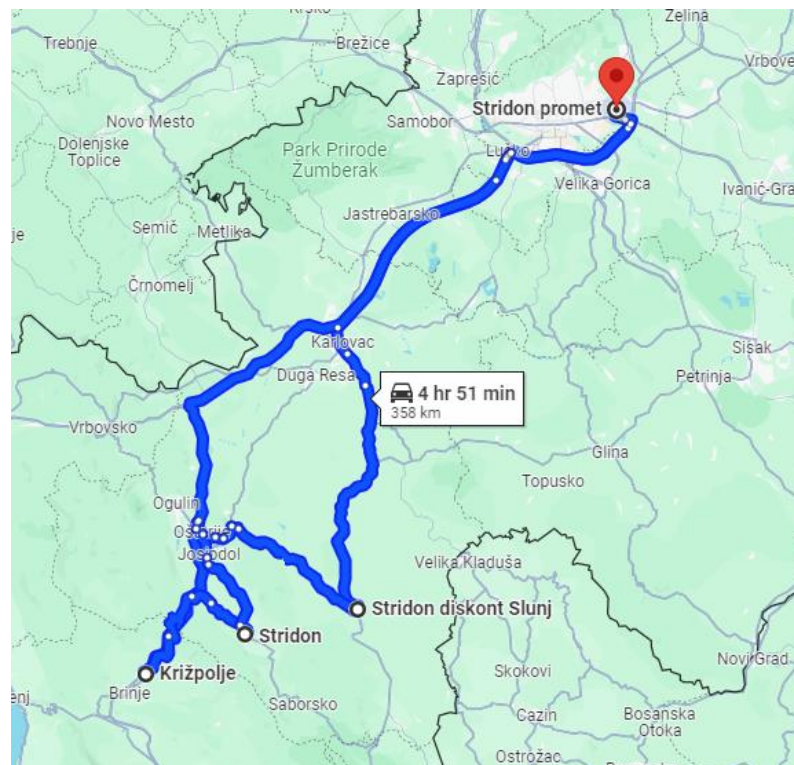
Izvor: autor

Točka koja je najbliža početnoj je točka  $x_{13}$  sa vrijednosti od 136 kilometara međusobne udaljenosti. Trenutna ruta glasi:  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ . Precrtava se redak početne točke i stupac točke  $x_1$ . Nakon toga, najbliža točka prethodnoj je točka  $x_2$  kojima međusobna udaljenost iznosi 35 kilometara te se križa redak točke  $x_1$  i stupac točke  $x_2$ . Nakon toga, ruta glasi:  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 0$ . Iduća najbliža točka prethodnoj je točka  $x_3$ . Potrebno se prekriži, a ruta glasi:  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 0$ . S time se završava optimizirana ruta i iznosi 358 kilometara. Tablica 47. prikazuje izgled matrice nakon križanja, prateći korake rješavanja, a slika 12 prikazuje kompletnu rutu.

Tablica 46. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila za projektiranje rute metodom najbližeg susjeda

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$x_0$	0	136	143	156
$x_1$	136	0	35	53
$x_2$	143	35	0	69
$x_3$	156	53	69	0

Izvor: autor



Slika 12. Prikaz kompletne rute vozila četvrtkom dobiveno projektiranjem ruta koristeći metodu najbližeg susjeda

Izvor: [16]

#### 4.3.13 Projektiranje rute dostavnog vozila koristeći Clarke and Wrightov algoritam ušteta – petak

Petkom dostavnog vozilo trebalo bi raditi dva izlaza to jest dvije rute zbog blizine lokacija koje vozi. Naime, prva ruta vrlo je mala, ima tek tri lokacije kao u prošlom primjeru, te lokacije su vrlo blizu jedna drugoj te se neće raditi kompletna analiza s tri matematičke metode. Druga ruta započinje u centralnom skladištu Stridon prometa koje je smješteno u Sesvetama te obilazi prodajna mjesta u okolici Zagreba gdje je prilaz moguć s većim vozilom. Tablicom 48. prikazani su podaci te udaljenosti od početnog čvora svake lokacije, a tablicom 49. prikazana je matrica udaljenosti za rutu vozila petkom.

Tablica 47. Prikaz podataka rute za vozilo petkom

Čvor	Lokacija	Udaljenost od početne točke [km]	Udaljenost od prethodne točke [km]
X <sub>0</sub>	Sesvete	0	0
X <sub>1</sub>	Orešje	39	39
X <sub>2</sub>	Ksaver	15	21
X <sub>3</sub>	Grahorova	16	6
X <sub>4</sub>	Kvatrić	11	4
X <sub>5</sub>	Maksimir	10	5

Ukupna duljina rute 75 km

Izvor: autor

Tablica 48. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila za projektiranje pomoću Clarke and Wrightovog algoritma ušteta

	X <sub>0</sub>	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>
X <sub>0</sub>	0	39	15	16	11	10
X <sub>1</sub>	39	0	21	12	16	18
X <sub>2</sub>	15	21	0	6	4	3
X <sub>3</sub>	16	12	6	0	4	5
X <sub>4</sub>	11	16	4	4	0	1
X <sub>5</sub>	10	18	3	5	1	0

Izvor: autor

Prvi korak projektiranja rute izračunati je uštete za svaki par čvorova pomoću matrice udaljenosti. Dobivena vrijednost iz formule (1) prikazuje vrijednost uštete između dva čvora.

Uštete se računaju po formuli (1):

$$s_{ij} = d_{0i} + d_{0j} - d_{ij}$$

- $s_{12} = d(0,1) + d(0,2) - d(1,2) = 39 + 15 - 21 = 15,$
- $s_{13} = d(0,1) + d(0,3) - d(1,3) = 39 + 16 - 12 = 27,$
- $s_{14} = d(0,1) + d(0,4) - d(1,4) = 39 + 11 - 16 = 21,$
- $s_{15} = d(0,1) + d(0,5) - d(1,5) = 39 + 10 - 18 = 19,$
- $s_{23} = d(0,2) + d(0,3) - d(2,3) = 15 + 16 - 6 = 2,$
- $s_{24} = d(0,2) + d(0,4) - d(2,4) = 15 + 11 - 4 = 4,$
- $s_{25} = d(0,2) + d(0,5) - d(2,5) = 15 + 10 - 3 = 2,$
- $s_{34} = d(0,3) + d(0,4) - d(3,4) = 16 + 11 - 4 = 9,$
- $s_{35} = d(0,3) + d(0,5) - d(3,5) = 16 + 10 - 5 = 9,$
- $s_{45} = d(0,4) + d(0,5) - d(4,5) = 11 + 10 - 1 = 7,$

Nakon izračuna ušteta potrebno ih je smjestiti u tablicu po padajućem redosljedu od najveće prema najmanjoj, kao što je prikazano u tablici 50.

Tablica 49. Uštete za rutu vozila po padajućem redosljedu – petak

Relacija (i,j)	Ušteta (i,j)	Relacija (i,j)	Ušteta (i,j)
(1,3)	27	(3,5)	9
(1,4)	21	(4,5)	7
(1,5)	19	(2,4)	4
(1,2)	15	(2,3)	2
(3,4)	9	(2,5)	2

Izvor: autor

U posljednjem koraku Clarke and Wrightovog algoritma ušteta projektira se ruta prema uštedama danim u tablici 50. uz zahtjev da su sva operativna ograničenja i uvjeti ispunjeni. Izračun je prikazan u nastavku:

- $(1,3) \Rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 0$ ; relacija (1,3) predstavlja najveću uštedu od 27 kilometara te se postavlja na početak rute,
- $(1,4) \Rightarrow 0 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 0$ ; iduća najveća ušteta je (1,4) s udaljenosti od 21 kilometara te se može uključiti u rutu pošto je čvor 1 vanjski u ruti,
- $(1,5), (1,2)$  i  $(3,4) \Rightarrow$  čvorove (1,5) i (1,2) nije moguće spojiti pošto je točka 1 unutarnja točka rute, a čvor (3,4) se zanemaruje pošto su obje točke uključene u rutu



- $(3,5) \Rightarrow 0 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 0$ ; iduća najveća ušteda je  $(3,5)$  te se može uvrstiti u rutu pošto je čvor 3 vanjski čvor u ruti,
- $(4,5) \Rightarrow$  čvor  $(4,5)$  nalazi se na ruti te nije moguće spajanje,
- $(2,4) \Rightarrow 0 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 0$ ; iduća najveća ušteda je  $(2,4)$  s vrijednosti od 4 kilometara te se može uvrstiti u rutu pošto je čvor 4 vanjski čvor u ruti te je samim time iskorištena zadnja moguća ušteda i algoritam završava.

Optimalna dobivena ruta projektiranjem koristeći Clarke and Wrightov algoritam ušteda glasi:  $0 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 0 = 62,7$  km.

#### 4.3.14 Projektiranje rute dostavnog vozila koristeći Clarke and Wrightov algoritam s indikatorom T – petak

Projektiranje rute Clarke and Wrightovim algoritmom s indikatorom T započinje izrađivanjem polu matrice ušteda. Tablica 51. prikazuje matricu ušteda rute vozila 1 petkom prije ikakvih promjena.

Tablica 50. Matrični prikaz izračuna rute vozila petkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T

	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>
X <sub>0</sub>	2	2	2	2	2
	X <sub>1</sub>	15	27	21	19
		X <sub>2</sub>	2	4	2
			X <sub>3</sub>	9	9
				X <sub>4</sub>	7
					X <sub>5</sub>

Izvor: autor

Iz tablice 51. prikazano je da je najveća ušteda u čvoru  $(1,3)$  i iznosi 27 kilometra. Oba uvjeta su zadovoljena te novonastala ruta je:  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 0$ . Indikator T se smanjuje za vrijednost 1 kao što prikazuje tablica 52.

Tablica 51. Matrični prikaz izračuna rute vozila petkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T

	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>
x <sub>0</sub>	1	2	1	2	2
x <sub>1</sub>	15		1 27	21	19
		x <sub>2</sub>		4	2
			x <sub>3</sub>	9	9
				x <sub>4</sub>	7
					x <sub>5</sub>

Izvor: autor

Iduća najveća ušteda je 21 kilometar međusobne udaljenosti što se nalazi u čvoru (1,4). Potrebni uvjeti su zadovoljeni te novonastala ruta glasi:  $0 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 0$ . Indikator T se smanjuje za vrijednost 1 te taj korak prikazan je u tablici 53.

Tablica 52. Matrični prikaz izračuna rute vozila petkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T

	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>
x <sub>0</sub>	0	2	1	1	2
x <sub>1</sub>	15		1 27	1 21	19
		x <sub>2</sub>		4	2
			x <sub>3</sub>	9	9
				x <sub>4</sub>	7
					x <sub>5</sub>

Izvor: autor

Nakon toga, iduća najveća ušteda je 21 kilometar udaljenosti u čvoru (1,5). Pošto indikator T u točki x<sub>1</sub> nije veći od nule nego je jednak nuli, te uvjet nije ispunjen, čvor (1,5) se zanemaruje. Sljedeća najveća ušteda je u čvoru (1,2) te isto kao i za prethodnu uštedu, uvjeti u točki x<sub>1</sub> nisu ispunjeni pa se ovaj čvor također zanemaruje. Iduće najveće uštede su u čvorovima (3,4) i (3,5). Čvor (3,4) nije moguće uvrstiti u rutu pošto su obje točke već dio

rute. U čvoru (3,5) uvjeti su zadovoljeni te se dodaje u rutu koja nakon toga glasi:  $0 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 0$ . Indikatori T u točkama se smanjuju te je taj korak prikazan u tablici 54.

Tablica 53. Matrični prikaz izračuna rute vozila petkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T

	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>
x <sub>0</sub>	0	2	0	1	1
x <sub>1</sub>	15		1 27	1 21	19
x <sub>2</sub>		15	2	4	2
x <sub>3</sub>			9		1 9
x <sub>4</sub>				7	
x <sub>5</sub>					

Izvor: autor

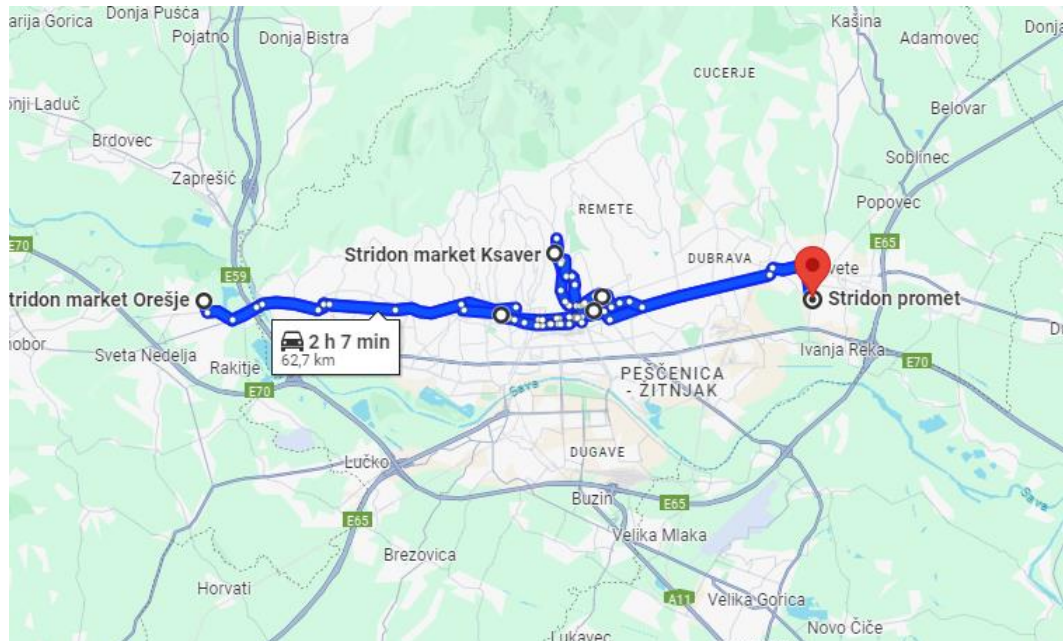
Iduća najveća ušteda je u čvoru (4,5) koji nije moguće uvrstiti u rutu pošto su obje točke već dio rute. Nakon nje, najveća ušteda je (2,4) vrijednosti od 4 kilometara međusobne udaljenosti, indikatori T su veći od 0 u točkama te se taj čvor uključuje u rutu. Ruta glasi:  $0 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 0$  te samim time ista je i kompletna pošto su sve točke uključene u rutu. Ovakva ruta ukupno iznosi 62,7 kilometara. Finalni matrični prikaz vidljiv je u tablici 55.

Tablica 54. Matrični prikaz izračuna rute vozila petkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T

	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>
x <sub>0</sub>	0	1	0	0	1
x <sub>1</sub>	15		1 27	1 21	19
x <sub>2</sub>		15	2	1 4	2
x <sub>3</sub>			9		1 9
x <sub>4</sub>				7	
x <sub>5</sub>					

Izvor: autor

Udaljenost kompletirane rute iznosi isto kao i analiza rute koristeći prethodnu metodu to jest Clarke and Wrightov algoritam uštede te je ruta prikazana na slici 13.



Slika 13. Prikaz kompletne rute vozila 1 petkom dobiveno projektiranjem ruta koristeći Clarke and Wrightov algoritam ušteda i algoritam s indikatorom T

Izvor: [16]

#### 4.3.15 Projektiranje rute dostavnog vozila koristeći metodu najbližeg susjeda – petak

Rješavanje koristeći metodu najbližeg susjeda započinje definiranjem najbliže točke početnoj točki  $x_0$ . Za potrebe projektiranja rute ovom metodom koristi se matrični prikaz udaljenosti između točaka koji je vidljiv u tablici 56.

Tablica 55. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila za projektiranje rute metodom najbližeg susjeda - petak

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_0$	0	39	15	16	11	10
$x_1$	39	0	21	12	16	18
$x_2$	15	21	0	6	4	3
$x_3$	16	12	6	0	4	5
$x_4$	11	16	4	4	0	1
$x_5$	10	18	3	5	1	0

Izvor: autor

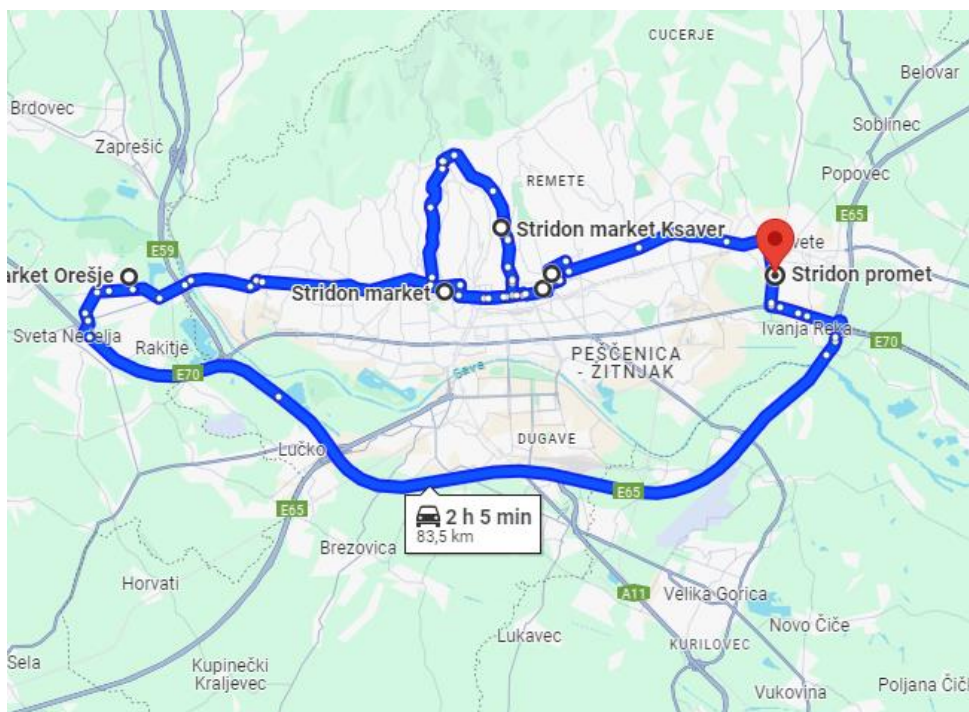
Najbliža točka početnoj je točka  $x_5$  s 11 kilometara međusobne udaljenosti. Ruta glasi:  $0 \rightarrow 5 \rightarrow 0$  te križa se redak od početne točke i stupac od točke  $x_5$  pa se pronalazi iduća točka koja je najbliža točki  $x_5$ . Najbliža točka prethodnoj je  $x_4$  s samo 1 kilometar međusobne

udaljenosti. Križa se redak od točke  $x_5$  i stupac od točke  $x_4$ , a ruta glasi:  $0 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 0$ . Iduća najbliža točka prethodnoj je  $x_3$  s 4 kilometara međusobne udaljenosti. Prekriži se potrebno, a ruta glasi:  $0 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 0$  te iduća najbliža točka prethodnoj je  $x_2$ . Križaju se potrebni redci i stupci, a ruta sada glasi:  $0 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 0$ . Zadnja točka koja ostaje i koja je najbliža prethodnoj je  $x_1$  i time se završava ruta koja glasi i iznosi:  $0 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0 = 83,5$  kilometara. Tablica 57. prikazuje izgled matrice nakon križanja, prateći korake rješavanja, a slika 14. prikazuje kompletnu rutu.

Tablica 56. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila za projektiranje rute metodom najbližeg susjeda

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_0$	0	39	15	16	11	10
$x_1$	39	0	21	12	16	18
$x_2$	15	21	0	6	4	3
$x_3$	16	12	6	0	4	5
$x_4$	11	16	4	4	0	1
$x_5$	10	18	3	5	1	0

Izvor: autor



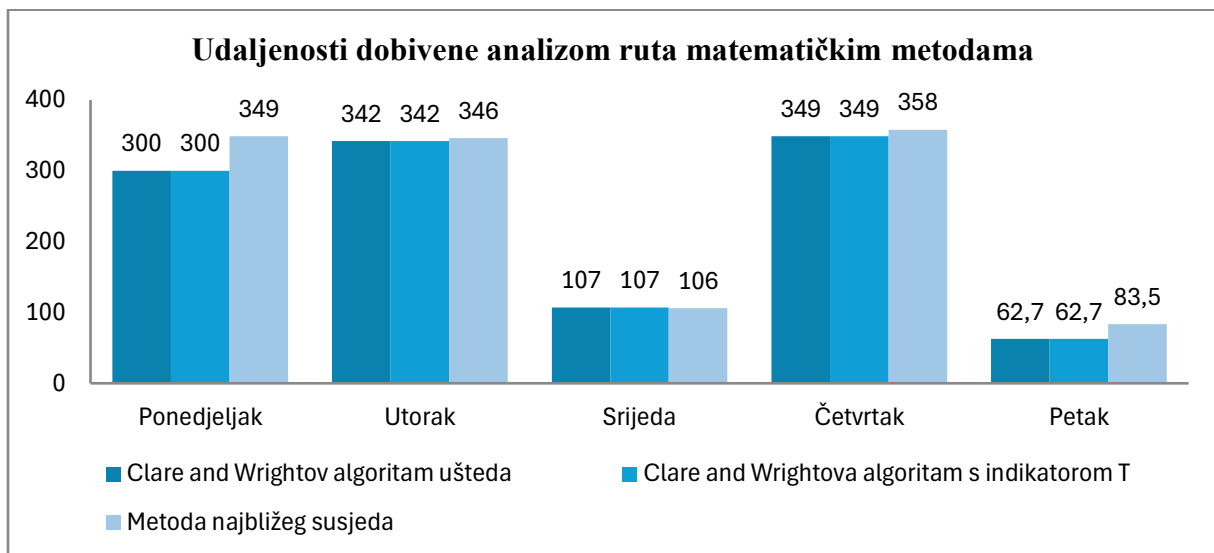
Slika 14. Prikaz kompletne rute vozila petkom dobiveno projektiranjem ruta koristeći metodu najbližeg susjeda

Izvor: [16]

## 5. USPOREDBA TRENUTNOG STANJA I DOBIVENIH REZULTATA ANALIZE

Analiza optimizacije ruta za dostavno vozilo u poduzeću Stridon promet d.o.o. izvodila se na način da su osmišljene nove rute vozila po danima u tjednu. Rute su se definirale zadovoljavajući uvjete kapaciteta nosivosti vozila te spajanjem lokacija koje su u približnim regijama Republike Hrvatske.

Analizom rute vozila ponedjeljkom utvrdilo se da matematičkim metodama Clarke and Wrightov algoritam ušteda i Clarke and Wrightov algoritam s indikatorom T projektirala kraća ruta za 14% ili 49 kilometara nego metodom najbližeg susjeda. Također, isti slučaj bio je i za utorak, četvrtak i petak. Ruta vozila u utorak metodama Clarke and Wrightov algoritam ušteda i Clarke and Wrightov algoritam s indikatorom T bila je kraća za 1%, ruta četvrtkom bila je kraća za 3%, a petkom za 25% od udaljenosti metodom najbližeg susjeda. U drugu ruku, ruta dostavnog vozila srijedom ispostavila se kraća projektiranjem koristeći metodu najbližeg susjeda no samo za 1 kilometar što je u postotku 1% te je ova usporedba udaljenosti dobivenih analizom ruta po danima prikazana na grafu 1.



Graf 1. Usporedba udaljenosti dobivenih analizom ruta po danima

Izvor: autor

U radu se fokusiralo na kreiranju novih ruta s kojima se omogućuje korištenje dva vozila koja dostavljaju narudžbe prodajnim mjestima poduzeća te rade jedan izlaz, ali veći, i samim time ispunjavaju normu radnih sati. Zamisao je da ukoliko se zaduže dva vozila koja će imati samo zadatak dostave prodajnim mjestima poduzeća, ostala vozila fokusiraju se na manje i veće dostave vanjskim kupcima. Prodajna mjesta poduzeća odredila su dane u tjednu kojima šalju narudžbu kako bi se lakše organizirao prijevoz, a da robu dobiju na vrijeme. Narudžbe vanjskih kupaca teško je predvidjeti te samim time teže je i organizirati prijevoz i rasporediti resurse. Navedeni način organizacije ruta u radu osmišljen je s ciljem olakšanja poslovanja i osiguranja sposobnosti isporuke vanjskim kupcima u dogovoreno vrijeme dostave.

Kao što je navedeno prethodno u radu, poduzeće određuje rute intuitivno i temelji se na praksi u kojoj svaki vozač mora obaviti tri odvojene rute i nakon svake vratiti se u centralno skladište. Prva ruta koja se vozi su prodajna mjesta poduzeća, no dostavlja se u maksimalno dva prodajna mjesta što je vrlo malo. Nakon toga, dostavlja se vanjskim kupcima te tim načinom se povećava vrijeme isporuke, a smanjuje razina usluge vanjskim kupcima. Naime, trenutnom strategijom prijevozne logistike to jest vraćanjem u centralno skladište nakon svake rute, također rade se suvišni kilometri koji uvelike povećavaju troškove goriva. Također, ukoliko se ne stigne obaviti dostava svim kupcima koji su dogovorili dostavu taj dan, vozačima se isplaćuje određeni iznos novaca kako bi odradili još jednu rutu da se ispoštuju i ne izgube vanjski kupci, no i to se smatra nepotrebnim troškom ukoliko bi se dva vozila fokusirala na prodajna mjesta poduzeća, a ostala na vanjske kupce i dostava istima odradila se na vrijeme.

Trenutni troškovi goriva samo za vozila s kojima se odrađuju dostave s centralnog skladišta iznosi 123.512,61 €. Uvrštavanjem prijedloga organizacije prijevoza koji je naveden i analiziran u ovom radu, isključuje se nepotrebno vraćanje nakon svake dostave u centralno skladište i samim time isključuju se nepotrebni kilometri koji se sadašnjom realizacijom prijevoza rade. Također, ispitivanjem iskustva vozača, sadašnja realizacija prijevoza uvelike otežava rad vozača jer nitko nema određenu rutu koju prevozi te ne znaju kada će završiti s radnim danom, kakva ih ruta čeka i da li će sve stići na vrijeme odraditi. Voditelj transporta, kako je već navedeno, odabire rute intuitivno i po potrebi dostave i to otežava rad vozača zbog toga što s kamionima veće nosivosti nije moguće doći do skladišta vanjskih kupaca i nameću se dostave koje su u kašnjenju. Uvrštavanjem prijedloga rada, ne samo što bi se smanjili troškovi i ubrzala isporuka vanjskim kupcima, nego bi se povećalo zadovoljstvo

zaposlenika. Također, vozila u sadašnjem voznom parku su na granici dotrajalosti što se tiče prijeđenih kilometara i same mehaničke ispravnosti vozila što su također veliki troškovi poduzeća. Ukoliko bi se financijski uložilo u noviji vozni park te uvrstila nova realizacija prijevoza uvelike bi se povećala konkurentnost na tržištu pošto je danas konkurencija sve veća i veća. Svakako, prijedlog koji je opisan u radu, bilo bi potrebno uvrstiti u softverski alat s kojim bi se obradila simulacija te ispitala točna isplativost navedenog prijedloga.



## 6. ZAKLJUČAK

Prilikom analize ruta, korišteni su Clarke and Wrightov algoritam ušteta i njegova modifikacija koja uključuje indikator T i metoda najbližeg susjeda. Ovi algoritmi odabrani su zbog svoje učinkovitosti u rješavanju problema usmjeravanja vozila koji su česti u logističkim operacijama. Clarke and Wrightov algoritam ušteta temelji se na ideji minimiziranja ukupne udaljenosti prijevoza kombiniranjem parova putovanja kako bi se stvorile duže, ali optimizirane rute, pokazao se kao najbolje rješenje zajedno i sa Clarke and Wrightovim algoritmom s indikatorom T koji je zapravo imao iste rezultate kao i algoritam ušteta.

Stvaranjem novih ruta prijevoza nastojalo se postići bolje planiranje ruta, smanjenje prijedene udaljenosti, broj potrebnih vozila kao i smanjenje troškova goriva i održavanja vozila. Također, u analizi se prikazala ruta koja ima malo lokacija, a velik broj prijedjenih kilometara cijele rute. Pošto poduzeće ima veleprodajne centre to jest skladišta koja su smještena u različitim regijama Republike Hrvatske i imaju mogućnost dostave, smatra se da bi dodatno unaprijedilo poslovanje da se zalihe u tim veleprodajnim centrima povećaju. Naime, udaljenija prodajna mjesta mogla bi nabavljati robu iz bližih veleprodajnih centara, čime bi se smanjila potreba za dugotrajnim transportima iz centralnog skladišta.

Osim direktnih financijskih ušteta, optimizacija ruta pomoću ovih matematičkih metoda donosi i šire strateške prednosti za poduzeće. Smanjenjem broja prijedjenih kilometara i potrebnog broja vozila, poduzeće smanjuje i svoj ekološki otisak. U današnje vrijeme, gdje se posvećuje pažnja održivosti i smanjenju emisija stakleničkih plinova, ovakve optimizacije mogu biti značajan faktor u jačanju reputacije poduzeća s usklađivanjem s ekološkim standardima.

Zaključno, ovaj rad pokazao je kako primjena matematičkih metoda može značajno unaprijediti operativne procese u poduzeću, posebno u kontekstu optimizacije ruta. Clarke and Wrightov algoritam ušteta i njegova modifikacija s indikatorom T dokazali su se kao učinkoviti alati za smanjenje troškova i povećanje efikasnosti u prijevoznj logistici. Uz dodatna istraživanja i korištenjem dodatnih softverskih alata, ove metode imaju potencijal postati ključni dio strategije upravljanja prijevozom u poduzećima. Također, važno je napomenuti da uspjeh ovih metoda ovisi o njihovoj pravilnoj implementaciji i o kontinuiranom praćenju u prilagodbi raznim uvjetima poslovanja kako bi se osigurala održivost i konkurentnost na tržištu.

## LITERATURA

- [1] Ivaković Č, Stanković R, Šafran M. *Špedicija i logistički procesi*. Zagreb: Fakultet prometnih znanosti Sveučilišta u Zagrebu; 2010.
- [2] Hrvatska tehnička enciklopedija. *Transportna logistika*. Preuzeto sa: <https://tehnika.lzmk.hr/transportna-logistika/> [Pristupljeno: 11. srpanj 2024.]
- [3] Dotoli M, Fanti MP, Iacobellis G, Ukovich. *Logistics Transportation Systems*. Perlego; 2023. Preuzeto sa: <https://www.perlego.com/book/3864364> [Pristupljeno: 30. srpanj 2024.]
- [4] Jakić B. *Prikaz mogućnosti optimiranja procesa prijevozne logistike*. Diplomski rad. Zagreb: Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti; 2020. Preuzeto sa: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:119:988479> [Pristupljeno: 30. srpnja 2024.]
- [5] Pašagić Škrinjar J. Nastavni materijali iz kolegija Prijevozna logistika II, 2024.
- [6] Rajsman M. Nastavni materijali iz kolegija Tehnologija cestovnog prometa, 2012.
- [7] Bowersox DJ, Closs DJ, Cooper MB. *Transportation and Logistics: A Systems Approach*.; Boston: McGraw-Hill; 2010. Preuzeto sa: <chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://industri.fatek.unpatti.ac.id/wp-content/uploads/2019/03/259-Supply-Chain-Logistics-Management-Donald-J.-Bowersox-David-J.-Closs-M.-Bixby-Cooper-Edisi-1-2002.pdf> [Pristupljeno: 3. kolovoza 2024.]
- [8] Carić T. *Unaprjeđenje organizacije transporta primjenom heurističkih metoda*. Doktorska disertacija. Fakultet prometnih znanosti; 2004.
- [9] Gutin G, Punnen AP. *The Traveling Salesman Problem and Its Variations*. New York: NY Springer; 2006. Preuzeto sa: [https://link.springer.com/book/10.1007/b101971?utm\\_medium=referral&utm\\_source=google\\_books&utm\\_campaign=3\\_pier05\\_buy\\_print&utm\\_content=en\\_08082017](https://link.springer.com/book/10.1007/b101971?utm_medium=referral&utm_source=google_books&utm_campaign=3_pier05_buy_print&utm_content=en_08082017) [Pristupljeno: 5. kolovoza 2024.]
- [10] Miné A, Simson D, Talia D. *A Heuristic Approach Based on Clarke-Wright Algorithm for Open Vehicle Routing Problem*. The Scientific World Journal. 2013; 874349. Preuzeto s: <https://doi.org/10.1155/2013/874349> [Pristupljeno: 5. kolovoza 2024.]
- [11] Begez I. *Problemi usmjeravanja vozila*. Diplomski rad. Varaždin: Sveučilište u Zagrebu, Fakultet organizacije i informatike; 2021. Preuzeto sa: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:211:196600> [Pristupljeno: 5. kolovoza 2024.]
- [12] Christofides N, Eilon S. *An Algorithm for the Vehicle - Dispatching Problem*. OR. 1969; 20(3):309-318. Preuzeto sa: <https://www.jstor.org/stable/3008733> [Pristupljeno: 6. kolovoza 2024.]
- [13] Toth P, Vigo D. *The Vehicle Routing Problem*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics; 2002. Preuzeto sa: <chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://industri.fatek.unpatti.ac.id/wp->

content/uploads/2019/03/002-The-Vehicle-Routing-Problem-Monograf-on-discrete-mathematics-and-applications-Paolo-Toth-Daniele-Vigo-Edisi-1-2002.pdf [Pristupljeno: 6. kolovoza 2024.]

[14] Stridon. *Ukratko o Stridonu*. Preuzeto sa: [http://www.stridon.hr/hr/o\\_nama/ukratko-o-stridonu-2](http://www.stridon.hr/hr/o_nama/ukratko-o-stridonu-2) [Pristupljeno: 7. kolovoza 2024.]

[15] Stridon. *Maloprodaja*. Preuzeto sa: <https://stridon.hr/hr/distribucija/maloprodaja-4>[Pristupljeno: 7. kolovoza 2024.]

[16] Google Maps. Preuzeto sa: <https://www.google.hr/maps/@45.4909596,16.5221097,8z/data=!4m3!1m2!2seUEBRQYfQnOzKVi dRG6m6Q!3e3!5m1!1e2?hl=hr&entry=ttu>[Pristupljeno: 7. kolovoza 2024.]

## POPIS SLIKA

Slika 1. Položaj prijevozne logistike u opskrbnom lancu.....	3
Slika 2. Pristupi rješavanju problema usmjeravanja vozila.....	9
Slika 3. Uprava poduzeća Stridon promet d.o.o. ....	22
Slika 4. Lokacije prodajnih mjesta Stridon prometa .....	25
Slika 5. Prikaz kompletne rute vozila ponedjeljkom dobiveno projektiranjem ruta koristeći Clarke and Wrightov algoritam ušteda i algoritam s indikatorom T.....	32
Slika 6. Prikaz kompletne rute vozila ponedjeljkom dobiveno projektiranjem ruta koristeći metodu najbližeg susjeda.....	33
Slika 7. Prikaz kompletne rute vozila utorkom dobiveno projektiranjem ruta koristeći Clarke and Wrightov algoritam ušteda i algoritam s indikatorom T.....	38
Slika 8. Prikaz kompletne rute vozila utorkom dobiveno projektiranjem ruta koristeći metodu najbližeg susjeda .....	40
Slika 9. Prikaz kompletne rute vozila srijedom dobiveno projektiranjem ruta koristeći Clarke and Wrightov algoritam ušteda i algoritam s indikatorom T.....	43
Slika 10. Prikaz kompletne rute vozila srijedom dobiveno projektiranjem ruta koristeći metodu najbližeg susjeda .....	44
Slika 11. Prikaz kompletne rute vozila četvrtkom dobiveno projektiranjem ruta koristeći Clarke and Wrightov algoritam ušteda i algoritam s indikatorom T.....	47
Slika 12. Prikaz kompletne rute vozila četvrtkom dobiveno projektiranjem ruta koristeći metodu najbližeg susjeda.....	48
Slika 13. Prikaz kompletne rute vozila 1 petkom dobiveno projektiranjem ruta koristeći Clarke and Wrightov algoritam ušteda i algoritam s indikatorom T.....	54
Slika 14. Prikaz kompletne rute vozila petkom dobiveno projektiranjem ruta koristeći metodu najbližeg susjeda .....	55

## POPIS TABLICA

Tablica 1. Podaci o ruti vozila 1 .....	12
Tablica 2. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila 1 .....	12
Tablica 3. Rangirane dobivene uštede od najveće do najmanje .....	13
Tablica 4. Matrica ušteta rute vozila 1 dobivene Clarke and Wright-ovim algoritmom s indikatorom T .....	16
Tablica 5. Matrica ušteta rute vozila 1 dobivene Clarke and Wright-ovim algoritmom s indikatorom T poslije prve promjene .....	17
Tablica 6. Matrica ušteta rute vozila 1 dobivene Clarke and Wright-ovim algoritmom s indikatorom T poslije druge promjene .....	17
Tablica 7. Matrica ušteta rute vozila 1 dobivene Clarke and Wright-ovim algoritmom s indikatorom T poslije treće promjene .....	18
Tablica 8. Matrica ušteta rute vozila 1 dobivene Clarke and Wright-ovim algoritmom s indikatorom T poslije četvrte promjene .....	18
Tablica 9. Matrica ušteta rute vozila 1 dobivene Clarke and Wright-ovim algoritmom s indikatorom T poslije pete promjene .....	19
Tablica 10. Finalna matrica ušteta rute vozila 1 dobivene Clarke and Wright-ovim algoritmom s indikatorom T .....	19
Tablica 11. Matrica udaljenosti između svakog čvora s pronađenim prvim najbližim čvorom .....	20
Tablica 12. Matrica udaljenosti između svakog čvora s pronađenim drugim najbližim čvorom .....	21
Tablica 13. Kompletna matrica metode najbližeg susjeda .....	21
Tablica 14. Prikaz prodajnih mjesta Stridon prometa d.o.o. ....	23
Tablica 16. Prikaz podataka rute za dostavnog vozila ponedjeljkom .....	26
Tablica 17. Matrični prikaz udaljenosti za rutu dostavnog vozila za projektiranje pomoću Clarke and Wrightovog algoritma ušteta .....	27
Tablica 18. Uštede za rutu dostavnog vozila po padajućem redosljedu – ponedjeljak	27
Tablica 19. Matrični prikaz izračuna rute dostavnog vozila ponedjeljkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T .....	29
Tablica 20. Matrični prikaz izračuna rute dostavnog vozila ponedjeljkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T .....	29

Tablica 21. Matrični prikaz izračuna rute dostavnog vozila ponedjeljkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T .....	30
Tablica 22. Matrični prikaz izračuna rute vozila ponedjeljkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T.....	30
Tablica 23. Matrični prikaz izračuna rute vozila ponedjeljkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T.....	31
Tablica 24. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila za projektiranje rute metodom najbližeg susjeda - ponedjeljak .....	32
Tablica 25. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila za projektiranje rute metodom najbližeg susjeda .....	33
Tablica 26. Prikaz podataka rute za vozilo utorkom .....	34
Tablica 27. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila za projektiranje pomoću Clarke and Wrightovog algoritma ušteda .....	34
Tablica 28. Uštede za rutu vozila po padajućem redoslijedu – utorak.....	35
Tablica 29. Matrični prikaz izračuna rute vozila utorkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T.....	36
Tablica 30. Matrični prikaz izračuna rute vozila utorkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T.....	36
Tablica 31. Matrični prikaz izračuna rute vozila utorkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T.....	37
Tablica 32. Matrični prikaz izračuna rute vozila utorkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T.....	37
Tablica 33. Matrični prikaz izračuna rute vozila utorkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T.....	38
Tablica 34. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila za projektiranje rute metodom najbližeg susjeda - utorak.....	39
Tablica 35. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila za projektiranje rute metodom najbližeg susjeda .....	39
Tablica 36. Prikaz podataka rute za vozilo srijedom.....	40
Tablica 37. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila za projektiranje pomoću Clarke and Wrightovog algoritma ušteda .....	41
Tablica 38. Uštede za rutu vozila po padajućem redoslijedu – srijeda.....	41
Tablica 39. Matrični prikaz izračuna rute vozila srijedom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T.....	42

Tablica 40. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila za projektiranje rute metodom najbližeg susjeda - srijeda.....	43
Tablica 41. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila za projektiranje rute metodom najbližeg susjeda .....	44
Tablica 42. Prikaz podataka rute za vozilo četvrtkom .....	45
Tablica 43. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila za projektiranje pomoću Clarke and Wrightovog algoritma ušteta .....	45
Tablica 44. Uštete za rutu vozila po padajućem redoslijedu – četvrtak .....	46
Tablica 45. Matrični prikaz izračuna rute vozila četvrtkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T.....	46
Tablica 46. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila za projektiranje rute metodom najbližeg susjeda - četvrtak .....	47
Tablica 47. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila za projektiranje rute metodom najbližeg susjeda .....	48
Tablica 48. Prikaz podataka rute za vozilo petkom.....	49
Tablica 49. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila za projektiranje pomoću Clarke and Wrightovog algoritma ušteta .....	49
Tablica 50. Uštete za rutu vozila po padajućem redoslijedu – petak.....	50
Tablica 51. Matrični prikaz izračuna rute vozila petkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T.....	51
Tablica 52. Matrični prikaz izračuna rute vozila petkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T.....	52
Tablica 53. Matrični prikaz izračuna rute vozila petkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T.....	52
Tablica 54. Matrični prikaz izračuna rute vozila petkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T.....	53
Tablica 55. Matrični prikaz izračuna rute vozila petkom pomoću Clarke and Wrightovog algoritma s indikatorom T.....	53
Tablica 56. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila za projektiranje rute metodom najbližeg susjeda - petak .....	54
Tablica 57. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila za projektiranje rute metodom najbližeg susjeda .....	55

## POPIS GRAFIKONA

Graf 1. Usporedba udaljenosti dobivenih analizom ruta po danima ..... 56

## POPIS DIJAGRAMA

Dijagram 1. Opći pristup optimizaciji transportnog procesa..... 7

## POPIS KRATICA

VRP	(Vehicle Route Problem) problem usmjeravanja vozila
TSP	(Travelling Salesmen Problem) problem trgovačkog putnika
CVRP	(Capacitated Vehicle Routing Problem) problem usmjeravanja vozila s ograničenjem kapaciteta vozila
DCVRP	(Distance Constrained Capacitated Vehicle Routing Problem) problem usmjeravanja vozila s ograničenjem kapaciteta vozila i udaljenosti
VRPB	(Vehicle Routing Problem With Backhauls) problem usmjeravanja vozila s povratnim utovarom
VRPTW	(Vehicle Routing Problem With Time Windows) problem usmjeravanja vozila s vremenskim prozorima
VRPPD	(Vehicle Routing Problem With Pick-Up And Delivering) problem usmjeravanja vozila s preuzimanjem i dostavom
VRPBTW	(Vehicle Routing Problem With Backhauls And Time Windows) problem usmjeravanja vozila s povratnim utovarom i vremenskim prozorima
VRPPDTW	(Vehicle Routing Problem With Pick – Up And Delivery With Time Windows) problem usmjeravanja vozila s preuzimanjem i dostavom unutar vremenskih prozora



Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet prometnih znanosti  
Vukelićeva 4, 10000 Zagreb

## IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI I SUGLASNOSTI

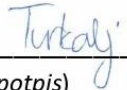
Izjavljujem i svojim potpisom potvrđujem da je \_\_\_\_\_ diplomski rad \_\_\_\_\_  
(vrsta rada)

isključivo rezultat mojega vlastitog rada koji se temelji na mojim istraživanjima i oslanja se na objavljenu literaturu, a što pokazuju upotrijebljene bilješke i bibliografija. Izjavljujem da nijedan dio rada nije napisan na nedopušten način, odnosno da je prepisan iz necitiranog rada te da nijedan dio rada ne krši bilo čija autorska prava. Izjavljujem, također, da nijedan dio rada nije iskorišten za bilo koji drugi rad u bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili obrazovnoj ustanovi.

Svojim potpisom potvrđujem i dajem suglasnost za javnu objavu završnog/diplomskog rada pod naslovom Optimizacija ruta korištenjem matematičkih metoda, u Nacionalni repozitorij završnih i diplomskih radova ZIR.

Student/ica:

U Zagrebu, 20.8.2024.

\_\_\_\_\_  
\_Helena Turkalj\_   
(ime i prezime, potpis)