

# Mogućnosti optimizacije ruta u prijevoznjoj logistici

---

**Mlinarić, Teo**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Transport and Traffic Sciences / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:119:734789>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-17**



*Repository / Repozitorij:*

[Faculty of Transport and Traffic Sciences -  
Institutional Repository](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**FAKULTET PROMETNIH ZNANOSTI**

**Teo Mlinarić**

**MOGUĆNOSTI OPTIMIZACIJE RUTA U PRIJEVOZNOJ  
LOGISTICI**

**DIPLOMSKI RAD**

**Zagreb, 2020.**

Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet Prometnih znanosti

**DIPLOMSKI RAD**

**MOGUĆNOSTI OPTIMIZACIJE RUTA U PRIJEVOZNOJ  
LOGISTICI**

**OPTIONS FOR ROUTE OPTIMIZATION IN TRANSPORT  
LOGISTICS**

Mentor: prof. dr. sc. Jasmina Pašagić Škrinjar

Student: Teo Mlinarić

JMBAG: 0135238902

Zagreb, rujan 2020.

## SAŽETAK

Promatrajući isključivo logistički sustav, prema raznim istraživanjima, transportni troškovi mogu iznositi i do 45% ukupnih logističkih troškova. Budući da se tržište u posljednjih nekoliko desetljeća orijentiralo na ispunjavanje želja korisnika, vrlo je bitno pružiti kvalitetnu i pravovremenu uslugu uz što niže troškove. Cijena transporta može se reducirati određenim poslovnim odlukama, ali i različitim matematičkim modelima kojima je cilj pronaći najkraći put između više različito pozicioniranih čvorova. U radu će biti prikazani, kako teorijski tako i na praktičnom primjeru, različiti matematički modeli kojima se optimiziraju rute koje se koriste u svakodnevnom poslovanju. U praktičnom dijelu fokus će biti na dva Clark-Wright-ova algoritma i metodi najbližeg susjeda.

**KLJUČNE RIJEČI:** Transportni troškovi; najkraći put; čvorovi; matematički modeli; optimizacija

## SUMMARY

Observing exclusively the logistics system, according to various studies, transport costs can reach up to 45% of total logistics costs. Since the market in the last few decades has focused on fulfilling user requirements, it is necessary to provide quality and just in time service at the lowest possible cost. The cost of transport can be reduced by certain business decisions, but also with mathematical models that aim to find the shortest path between several differently positioned nodes. This paper will present, both theoretically and practically, various mathematical models that are used for optimization of everyday business routes. In practical part, the focus will be on two Clark-Wright algorithms and the nearest neighbor algorithm.

**KEY WORDS:** Transport costs; the shortest path; nodes; mathematical models; optimization

# Sadržaj

1. UVOD.....	1
2. ZNAČAJ PRIJEVOZNE LOGISTIKE.....	3
2.1. Ciljevi i trendovi u prijevoznoj logistici .....	5
2.2. Kvaliteta prijevozne logistike.....	8
3. VRSTE MATEMATIČKIH MODELA PRI OPTIMIZACIJI RUTA .....	12
3.1. Clark-Wright-ov algoritam ušteda .....	13
3.2. Clark-Wright-ov algoritam ušteda - metoda s indikatorom $T$ .....	16
3.3. Metoda grananja i ograničavanja .....	17
3.4. Metoda najbližeg susjeda .....	18
4. OPTIMIZACIJA RUTA NA PRIMJERU IZ PRAKSE.....	20
4.1. Ulazni podaci za vozilo 1 .....	20
4.1.1. Optimizacija rute 1 Clark Wright-ovim algoritmom ušteda.....	22
4.1.2. Optimizacija rute 1 Clark-Wright-ovim algoritmom - metoda s indikatorom $T$ ....	25
4.1.3. Optimizacija rute 1 metodom najbližeg susjeda .....	30
4.2. Ulazni podaci za vozilo 2.....	34
4.2.1. Optimizacija rute 2 Clark-Wright-ovim algoritmom ušteda.....	35
4.2.2. Optimizacija rute 2 Clark-Wright-ovim algoritmom – metoda s indikatorom $T$	37
4.2.3. Optimizacija rute 2 metodom najbližeg susjeda .....	39
4.3. Ulazni podaci za vozilo 3 .....	41
4.3.1. Optimizacija rute 3 Clark-Wright-ovim algoritmom ušteda.....	42
4.3.2. Optimizacija rute 3 Clark-Wright-ovim algoritmom – metoda s indikatorom $T$ ....	44
4.3.3. Optimizacija rute 3 metodom najbližeg susjeda .....	46
5. KOMPARATIVNA ANALIZA DOBIVENIH REZULTATA.....	48
6. ZAKLJUČAK.....	50

LITERATURA .....	51
POPIS SLIKA.....	56
POPIS TABLICA .....	57
POPIS GRAFIKONA.....	59

# 1. UVOD

Promatrajući logistiku kao pojam, ona predstavlja široki spektar djelatnosti koje na koncu imaju zadatak pružiti uslugu u pravo vrijeme, na pravome mjestu i uz što niže troškove. Radi kompleksnih zahtjeva suvremenog tržišta, njegovog širenja i iznimno velike konkurencije sličnih poduzeća na njemu, vrlo je teško opstati bez pravovremenih, inovativnih i konkurentnih ideja.

U ovom radu primarni fokus će biti na pokušaju optimizacije ruta u poslovanju. Promatrati funkcioniranje distribucijske mreže kroz određeni vremenski period vrlo je bitno kako bi se uočile mogućnosti optimizacije, a samim time i kvalitetniju razinu usluge klijentu. Sam postupak optimizacije ruta, odnosno metode koje se koriste za optimizaciju, zasniva se na problemu trgovačkog putnika. Problem je koncipiran tako da se putnik kreće iz određene početne točke i ima za zadatak posjetiti sve lokacije i vratiti se u točku iz koje je i započeo put. Osnovni cilj problema je obići sve lokacije uz što kraći prijeđeni put. Osnovna zadaća ovog rada je pomoću heurističkih metoda pronaći različita rješenja za isti problem te odrediti ono optimalno, kojim će se reducirati s jedne strane troškovi prijevoza, a s druge strane skratiti moguće vrijeme tranzita i pružiti kvalitetnu uslugu klijentu.

Rad je podijeljen u šest cjelina:

1. Uvod
2. Značaj prijevozne logistike
3. Vrste matematičkih modela pri optimizaciji ruta
4. Optimizacija ruta na primjeru iz prakse
5. Komparativna analiza dobivenih rezultata
6. Zaključak

U poglavlju „Značaj prijevozne logistike“ definirat će se prijevozna logistika, koji su njezini ciljevi i trendovi, osnovni zadaci te će se definirati suvremeni i tradicionalni način transporta. Isto tako, bit će objašnjeno u čemu se očituje kvaliteta prijevozne logistike.

U poglavlju „Vrste matematičkih modela pri optimizaciji ruta“ teorijski će biti obrađene najkorišteniji matematički modeli koji se koriste u praksi, u koje spadaju: Clark-Wright-ov

algoritam ušteda, Clark-Wright-ov algoritam ušteda - metoda s indikatorom T, metoda grananja i ograničavanja te metoda najbližeg susjeda.

U poglavlju „Optimizacija ruta na primjeru iz prakse“ će se na temelju prošlog poglavlja izvršiti praktični dio na stvarnim rutama koje se koriste u svakodnevnom poslovanju logističkog poduzeća. Bit će korišteni sljedeći matematički modeli: Clark-Wright-ov algoritam ušteda, Clark-Wright-ov algoritam ušteda - metoda s indikatorom T te metoda najbližeg susjeda.

U poglavlju „Komparativna analiza dobivenih rezultata“ bit će uspoređeni dobiveni rezultati i odredit će se najoptimalnije dobivene rute.

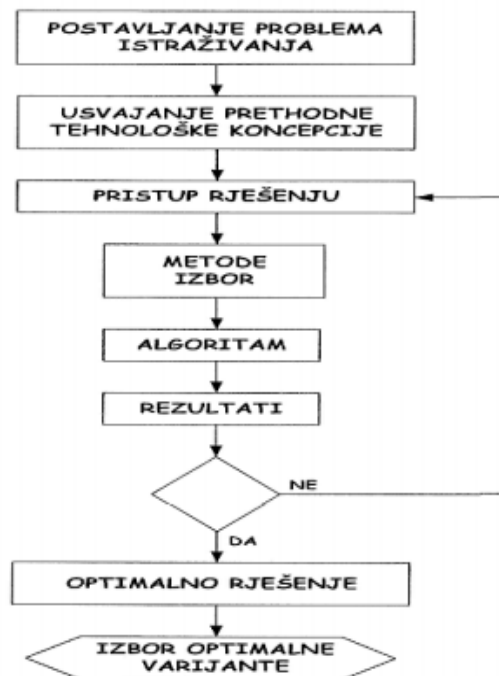
U posljednjem poglavlju iznijet će se osvrt i zaključak na osnovu cjelokupnog rada i konkretnog zadatka.



## 2. ZNAČAJ PRIJEVOZNE LOGISTIKE

Prijevozna logistika, kao dio transportnih sustava, jedan je od ključnih čimbenika logističkih sustava te se može definirati kao prijenos, odnosno prijevoz robe, ljudi ili informacija od točke izvorišta do krajnjeg odredišta, tj. kupca. Osnovni cilj prijevozne logistike je prikupiti robu iz točke izvorišta te ju dostaviti na krajnju destinaciju ispunjavajući šest osnovnih uvjeta: dostaviti pravu robu, u pravo vrijeme, na pravo mjesto, u točnim količinama, ispravne kvalitete te po prihvatljivoj cijeni. [1] Svakom poduzeću kojem su u opisu posla određeni proizvodni procesi, transport, distribucija itd., prijevozna logistika je jedan od ključnih segmenata poslovanja.

Prijevozna logistika, kao jedan od ključnih segmenata opskrbnog lanca, omogućuje pozitivne efekte izmijenjenim oblicima suradnje proizvodnih i trgovačkih gospodarskih subjekata u cilju udovoljenja stalnim težnjama za smanjenjem cijena, troškova i zarada. [2] Kako bi se omogućilo smanjivanje cijene, nužne su određene optimizacije. Prilikom takvog postupka, nužno je u samom početku odrediti pravilan pristup problemima s kojima se susreće. Slika 1. prikazuje dijagram toka koji se općenito može koristiti prilikom optimizacije različitih transportnih procesa.



Slika 1. Dijagram općeg pristupa optimizaciji transportnog procesa

Izvor: [3]

U samome početku vrlo je bitno odrediti i istražiti problem koji se istražuje i njegove izvore, zatim istražiti i usvojiti različite koncepcije kojima bi se moglo doći do traženih rezultata. Idući korak je pristup rješenju i potražnja za najoptimalnijim rješenjem te na kraju implementacija u sustav. Prikazani dijagram ujedino će biti i glavna smjernica prilikom izrade rada te će se postupak optimizacije ruta odvijati upravo tim slijedom.

Kako bi se određeni sustav bolje upoznao potrebno je poznavati njegove podsustave o kojima on ovisi i ne može funkcionirati bez njih. Prijevozna logistika ima mnogo podsustava, ali jedan od najbitnijih je prometna infrastruktura, odnosno transportna mreža unutar prometne infrastrukture. Transportna mreža, kao jedan od ključnih čimbenika prijevozne logistike, omogućava lakši prijenos robe, ljudi ili informacija od točke A do točke B. Isto tako, transportne mreže, kao brzorastući pristup u današnjem poslovanju, omogućuju kreiranje vlastitih sustava lanaca opskrbe te u isto vrijeme daju uvid u procjenu novih strategija, poboljšanih učinaka i rasta. U osnovne elemente svake prijevozne mreže spadaju [4]:

- čvorovi; bilo koja lokacija unutar sustava koja ima pristup transportnoj mreži,
- linkovi; predstavljaju fizičku prometnu infrastrukturu koja omogućava povezivanje dva ili više čvorova.
- tok; količina prometa koja se kreće linkovima, odnosno prometnom infrastrukturom, između dva čvora i količine prometa koji prolazi kroz čvorove.
- prolaz (eng. „gateway“); čvor koji povezuje dva različita sustava, npr. dva različita sustava transporta,
- hub; čvor koji regulira iznimno veliku količinu prometa i glavna zadaća mu je povezanost elemenata iste ili različite transportne mreže,
- koridor; niz čvorova i veza koji omogućuju protok putnika i tereta te su obično koncentrirani duž komunikacijske osi, imaju linearnu orijentaciju i povezane su s prolazom.

Vrlo mali broj proizvoda u proizvodnom sustavu dobiva izravan put do svog krajnjeg kupca. Prilikom isporuke proizvoda na krajnju destinaciju, najčešće je potreban cijeli niz logističkih aktivnosti, što nadalje vodi do kreiranja kanala distribucije. [5] Svaki kanal distribucije treba sadržavati sve navedene elemente prijevozne mreže. Kvaliteta distribucijske mreže se u konačnici može očitovati kvalitetom usluge krajnjem kupcu.

## 2.1. Ciljevi i trendovi u prijevoznjoj logistici

Prijevozna logistika kao sustav ima različite zadatke i ciljeve za koje se očekuje da će biti ispunjeni. S vremenom i brzom globalizacijom u svijetu i njeni zadaci postaju sve opširniji i zahtjevniji. Jedan od ključnih zadataka prijevozne logistike u prošlosti bio je paralelno prostorno i vremenski približiti proizvođača i krajnjeg kupca. Njihova međusobna udaljenost kreira najveći trošak glede cijene transporta, ali u isto vrijeme rezultira razne druge troškove kao što su npr. dugo tranzitno vrijeme isporuke robe kupcu ili smanjena dostupnost robe krajnjem potrošaču. Prema tome, ciljevi transportne logistike relativna su stvar i ovise o mnogo čimbenika, ali kao opće ciljeve često se spominju [6]:

- smanjenje relacije prijevoza
- smanjenje troškova prijevoza
- smanjenje tranzitnog vremena isporuke robe
- smanjenje negativnog ekološkog utjecaja na okoliš
- povećanje dostupnosti robe krajnjem kupcu
- povećanje sigurnosti i dr.

Nakon što su definirani ciljevi određenog sustava, potrebno je postaviti ključne zadatke istoga kako bi se ispunilo ciljeve. Neki od ključnih zadataka prijevozne logistike, uključujući sve čimbenike sustava, mogu se podijeliti na [2]:

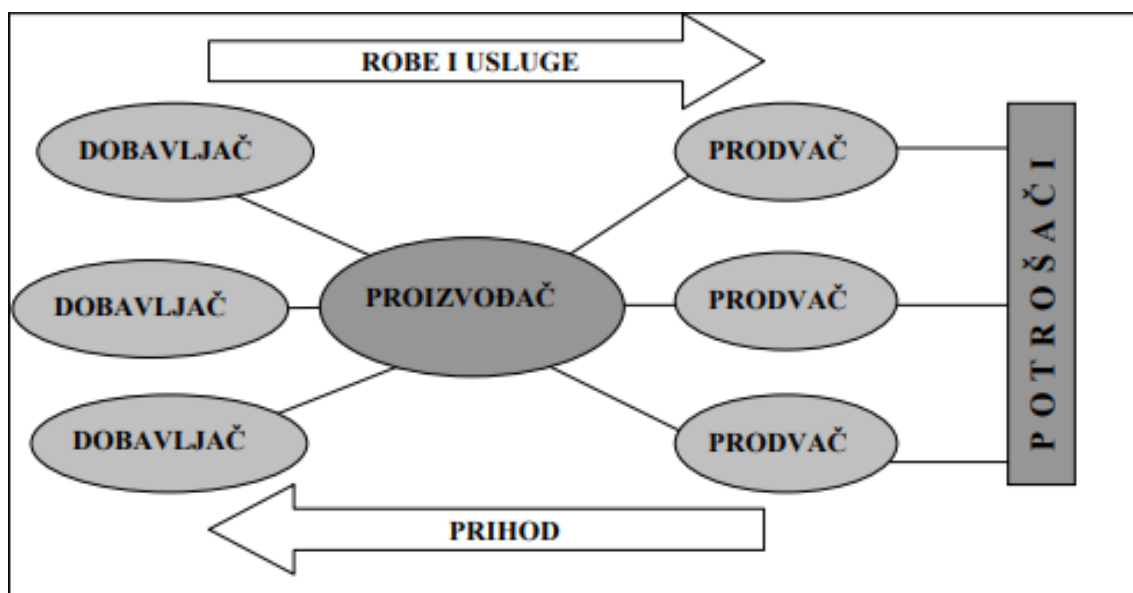
- izjednačavanje prostora; pošto u velikoj većini slučajeva u praksi, lokacija proizvodnje i potrošnje robe su prostorno dislocirani i stoga je potrebno prostorno izjednačavanje, tj. skratiti udaljenost proizvođača i krajnjeg korisnika proizvoda. Kao rješenja nameću se izravna dostava krajnjem korisniku, izravna dostava u nizu (dostava od više distributera jednom kupcu te od jednog distributera do više kupaca) ili dostava preko distribucijskog centra,
- izjednačavanje vremena; jer je vrijeme postavljanja zahtjeva za robom (potražnja) različito od vremena završetka proizvodnje (ponude) te je potrebno vremensko izjednačavanje. Ovaj problem može se riješiti Just in Time sustavom ili npr. smanjenjem ciklusa narudžbe,
- izjednačavanje količine; jer količina robe pri ekonomičnoj proizvodnji (ponuda) u pravilu je različita od tražene količine robe (potražnje) te je potrebno količinsko izjednačavanje.

Navedeno se može riješiti kvalitetnim sustavom upravljanja zaliha i ekonomičnom proizvodnjom,

- izjednačavanje asortimana; proizvodnja raznolikog asortimana robe provodi se na različitim lokacijama, ali se u određenim skladištima čuva cjelokupni asortiman ili se određeni kupac opskrbljuje kroz nekoliko distribucijskih vožnji.

Na promjene u prijevoznj logistici utječu i bilo kakve modifikacije vezane uz kompletan opskrbni lanac. Ako se dogode promjene glede proizvodnje robe, pakiranja, načina poslovanja određenog subjekta unutar opskrbnog lanca i sl., sve to može imati velikog značaja na funkcioniranje transportne logistike.

Suvremeni zahtjevi za pravodobnom dostavom ne utječu isključivo na sustav transporta već također i na distribuciju i način skladištenja. Potreba za smanjenjem vremena dostava prisilila je neka poduzeća da u potpunosti zaobiđu skladišta dok je druge odvela u pravcu iskorištavanja transportnog sustava kao "virtualnog skladišta", a treće je pak natjerala da i skladišta koriste za dodavanje novih funkcija proizvodima koristeći tako i to vrijeme za povećavanje njihove vrijednosti kupcima. Mnoga poduzeća prelaze na direktne isporuke zaobilazeći tako skladišta ili prelaze na manje, ali češće pošiljke koje smanjuju potrebu za skladištenjem robe. Sve to dovodi i do značajnih promjena u transportnoj logistici i upravljanju lancem opskrbe. [7]

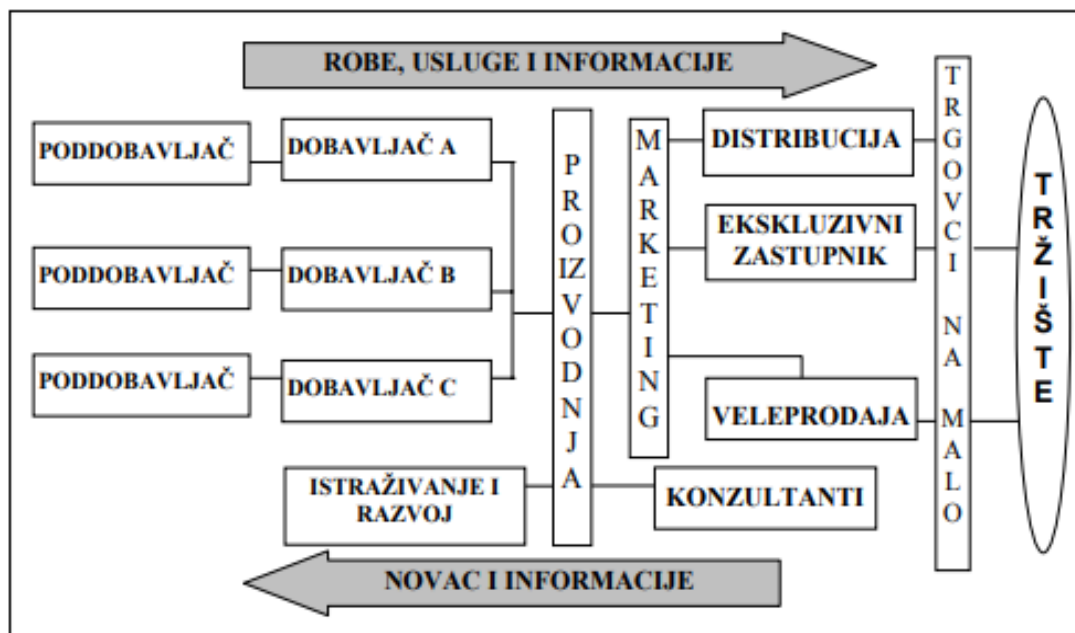


Slika 2. Tradicionalni način transporta

Izvor: [7]

Na slici 2. i 3. prikazane su osnovne promjene koje su se tijekom godina dogodile u prijevoznj logistici. Slika 2. predstavlja tradicionalni transportni sustav, koji se i danas koristi u manjem opsegu kod primjera manjih opskrbnih lanaca i sustava, dok slika 3. predstavlja suvremeni način transporta i kretanja dobara od samog repromaterijala do krajnjeg kupca. Kao što se može vidjeti, informacije su postale jedan od ključnih segmenata poslovanja u današnje vrijeme. Točna informacija u pravo vrijeme je vrlo bitna za normalno funkcioniranje svakog sustava i, što je još bitnije, potrebna je u oba smjera jer sustavi mogu biti vrlo kompleksni i složeni.

Ključni faktor pokretanja restrukturiranja transportne industrije nalazi se i u činjenici sve većeg broja samostalnih poduzetnika koji pružaju usluge logistike. To su specijalizirane tvrtke koje se brinu o skladišnim i transportnim funkcijama. Neke od tih tvrtki jednostavno su nezavisni posrednici, poduzetnici, virtualni/mrežni brokeri ili mala obiteljska poduzeća koja često niti nemaju vlastite kamione, ali koja se brinu o transportnoj logistici naručitelja ugovarajući poslove s drugim transportnim tvrtkama. Na taj način i unutar transportnog sektora dolazi do umrežavanja i virtualizacije poslovanja. [7]



Slika 3. Suvremeni način transporta

Izvor: [7]

Da bi jedan takav suvremeni virtualni lanac opskrbe funkcionirao, potrebna je visoka razina međusobnog povjerenja i svijesti o obostranoj koristi od zajedničkog nastupa na tržištu te otvorena

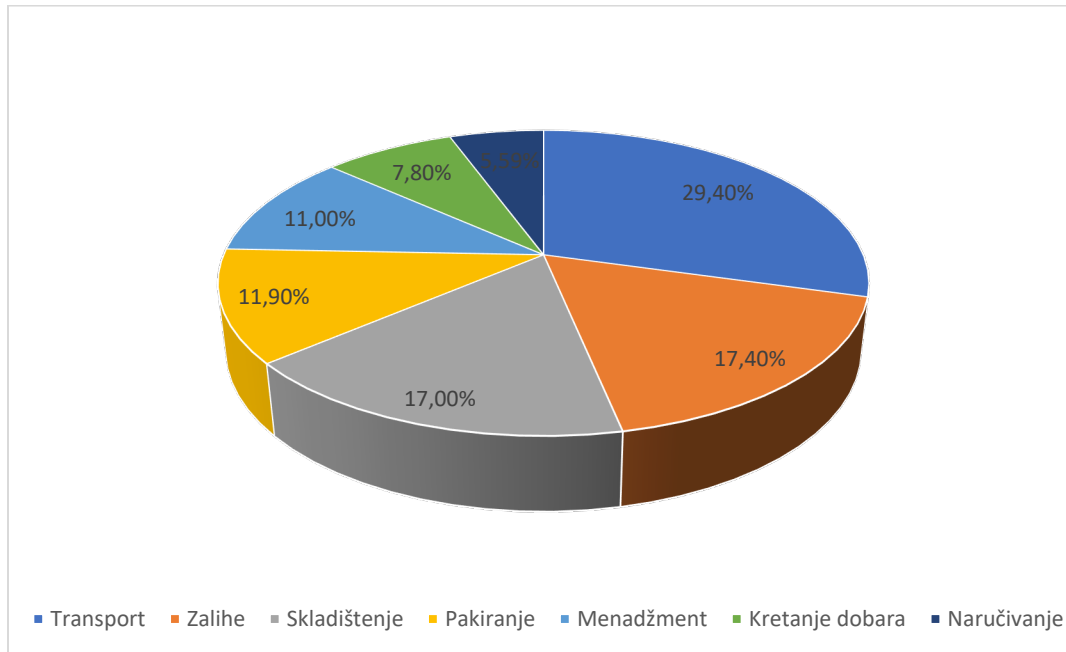
razmjena potrebnih informacija i znanja koja treba trajati čitavo vrijeme trajanja poslovne suradnje. Upravo se tu krije bitna razlika u usporedbi s tradicionalnim načinom transporta gdje, osim nužne komunikacije, nema aktivnog dijaloga i razmjene informacija. U virtualnom lancu opskrbe takva se komunikacija stalno potiče, širi i razvija. To je još jedan primjer koji pokazuje da se suvremena proizvodnja, ali i svako drugo ekonomsko djelovanje, danas zapravo temelji na protoku informacija. [7]

Vrlo je bitno napomenuti kako se današnji oblici poslovanja, za razliku od onih u prošlosti, okreću željama i zahtjevima kupaca. Sve se podređuje njima i njihovim potrebama pa se tako većina poduzeća orijentira u tom smjeru. Sa sve prisutnijom globalizacijom u svijetu i razvojem tržišta, teško je zadovoljiti zahtjeve kupaca, pogotovo jer se njihovi zahtjevi uvelike disperziraju u odnosu na prošlost. Sa stajališta prijevozne logistike, odnosno pružatelja logističkih usluga, nužno je pratiti trendove kako bi sustav bio u mogućnosti normalno funkcionirati. Trendovi u prijevoznom sustavu mogu biti obilježeni idućim karakteristikama [8]:

- rast potražnje; rast potražnje za prijevozom kako putnika tako i tereta. Povećava se broj putnika i tereta, ali i udaljenost na koju se prevozi
- smanjenje troškova; troškovi u prijevozu bilježe pad tijekom nekoliko desetljeća pa čak i za skupe prijevoze tipa zrakoplovom ili brodom.
- proširenje infrastrukture; rast potražnje i smanjenje troškova uvjetuju zahtjeve za prometnom infrastrukturom i kvantitativno i kvalitativno.

## **2.2. Kvaliteta prijevozne logistike**

Gledajući raspodjelu ukupnih logističkih troškova, prijevozna logistika predstavlja jedan od ključnih dijelova lanca opskrbe. Udio troškova transporta u ukupnim logističkim troškovima kreće se od trećine pa sve do 45% u pojedinim lancima opskrbe. [9] Gledajući isključivo transport, njega generiraju tri osnovna troška: potrošnja energenata (gorivo), održavanje flote vozila te isplata radne snage. Ispravnim izborom vrste vozila, efikasnim rutiranjem vozila ili praćenjem vozila u vremenu uvelike može pomoći pri smanjenju troškova transporta. Grafikon 1. prikazuje raspodjelu logističkih troškova te koliko je transport bitan, što ukazuje na činjenicu da se upravo na tom segmentu mogu postići velike uštede.



Grafikon 1. Prikaz Logističkih troškova

Izvor: Izradio auto prema [10]

Kvaliteta prijevozne logistike predstavlja vrlo kompleksan i višedimenzionalan pojam koji je potrebno istražiti s više različitih stajališta. Kada se govori o kvaliteti logistike općenito, neophodno je imati u vidu sljedeće činjenice [11]:

- Kvaliteta materijalnih proizvoda i kvaliteta uslužnih aktivnosti ključni je faktor uspješnog poslovanja u suvremenim tržišnim uvjetima,
- Kvaliteta logističkih usluga značajno zaostaje za kvalitetom materijalnih proizvoda, iako je za kupca ili krajnjeg korisnika to od izuzetne važnosti. Kvaliteta materijalnih proizvoda i njegovo unaprjeđenje imaju dugu tradiciju, što se ne može konstatirati i za kvalitetu logističkih usluga.
- Logistika je područje sa značajnim mogućnostima i realnom perspektivom poboljšanja i unaprjeđenja ukupne kvalitete usluga,
- U vrijeme kada su materijalni proizvodi po svom dizajnu i kvaliteti vrlo slični, kvaliteta logističke usluge postaje ključni faktor za postizanje tržišne konkurentnosti različitih

proizvođača. Razliku između više ponuda materijalnih proizvoda i uslužnih aktivnosti, krajnji korisnici često prave isključivo na kvaliteti usluga isporuke ili dostave.

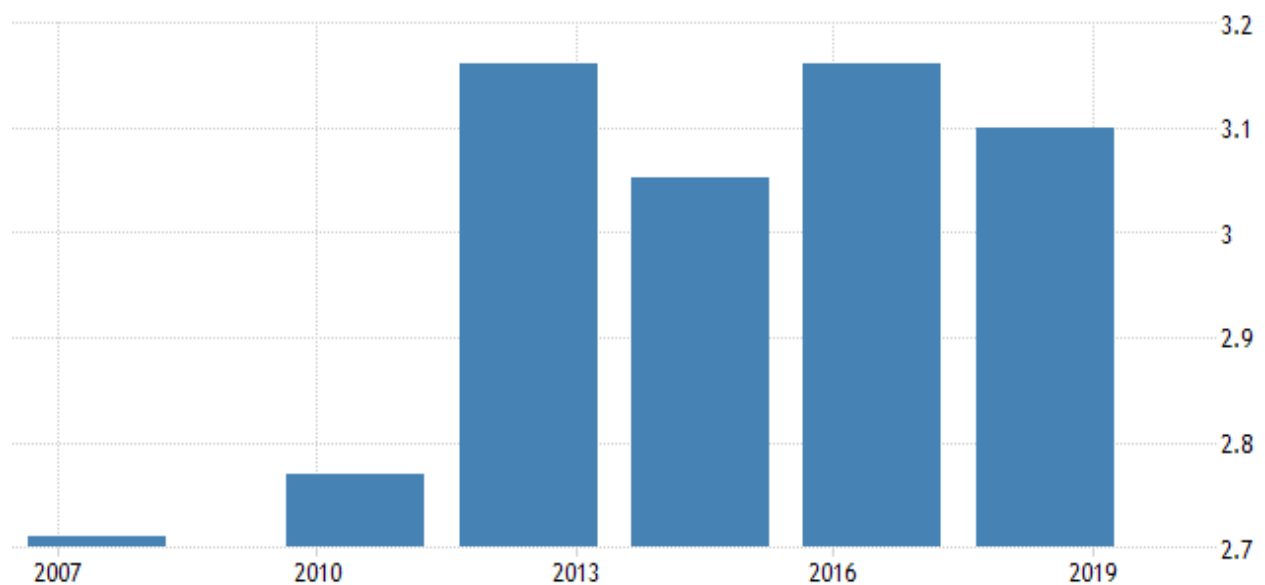
Sve navedene činjenice ukazuju na to da postoji nužna potreba da se kvaliteta u logistici, ujedino i u prijevoznoj logistici, treba promatrati s različitih gledišta. Tako na primjer, moguće je govoriti o zahtjevu korisnika, kvaliteti odvijanja određenih logističkih procesa, zaštite okoline, itd. Kvalitetu logističke usluge moguće je grupirati u tri karakteristične skupine [11]:

- **Marketinško gledište;** odnosi se na kvalitetu logističke usluge u funkciji zadovoljenja zahtjeva i očekivanja krajnjeg korisnika. Percepcija kvalitete logističke usluge, u suštini, počinje i završava na tržištu. Korisnik usluge prvo treba definirati kvantitativne logističke zahtjeve, a zatim tijekom procesa realizacije usluge, vrednuje i ocjenjuje dobiveni nivo usluge u odnosu na očekivani. Od razine zadovoljenja korisničkih zahtjeva i očekivanja direktno ovisi tržišni uspjeh davatelja logističkih usluga. Uspješan pružatelj logističkih usluga orijentira se na tzv. strategiju slušanja i učenja u odnosu na postojeće i potencijalne korisnike. Komparativnom analizom očekivane i ostvarene kvalitete logističke usluge, korisnik ocjenjuje u kojoj mjeri su ispunjeni njegovi zahtjevi, potrebe i očekivanja, tako da je stupanj zadovoljstva krajnjeg korisnika najbolja mjera kvalitete logističkih usluga. Sa stajališta prijevozne logistike, kvaliteta usluge najčešće se promatra i vrednuje na osnovi idućih parametara: pouzdanost, vrijeme i točnost dostave, fleksibilnost, informiranost, učestalost, kompletnost te sigurnost.
- **Funkcionalno gledište;** odnosi se na kvalitetu odvijanja logističkih procesa i funkcioniranje logističkih sustava. Kvaliteta logističke usluge proizlazi iz kvalitete odvijanja logističkih procesa i kvalitete funkcioniranja logističkih sustava jer je logistička usluga rezultat više različitih povezanih aktivnosti i procesa u logističkom lancu. Logistički procesi se projektiraju, organiziraju, kontroliraju i njima se upravlja na osnovu zahtjeva za kvantitetom i kvalitetom usluga. Kvaliteta logističke usluge je direktna posljedica primijenjene strategije, tehnologije i organizacije logističkih procesa. Indikatori kvalitete u logističkom sustavu odnose se na logističke resurse, logističke procese, ljudske resurse, menadžment i organizaciju.
- **Društveno gledište;** odnosi se na kvalitetu života, sigurnost i zaštitu životne sredine. Sa društvenog stajališta, kvaliteta logističke usluge treba zadovoljiti tri ključne funkcije:



zaštitu životne sredine, zaštitu života i zdravlja ljudi te zaštitu krajnjeg korisnika usluga. Radni uvjeti i sigurnost odvijanja logističkih aktivnosti predstavljaju osnovni faktor koji utječe na izbor logističke strategije i tehnologije. Određene logističke procese, kao što su transport, utovar, istovar, pretovar ili skladištenje prate značajni rizici, tako da se prilikom projektiranja i organiziranja ovih procesa navedeni rizici svedu na najmanju moguću mjeru, odnosno da se teži njihovom eliminiranju.

Indeks logističkih performansi (eng. Logistics performance index, LPI) osnovni je pokazatelj uspješnosti pružanja logističkih usluga u određenoj zemlji. Svjetska banka (eng. World Bank) svake godine prikuplja podatke putem anketnih istraživanja u partnerstvu s raznim međunarodnim institucijama i, u ovom slučaju, privatnim kompanijama i pojedincima koji se bave logistikom. [12] Prema podacima Svjetske banke Hrvatska je 2018/2019. godine imala indeks 3,1 (1= niski do 5= visoki). Isto tako, najveći indeks zabilježen je 2012/2013. i kroz razdoblje od kraja 2015. godine do početka 2017 godine te je iznosio 3,17. Slikom 4. prikazan je grafički prikaz logističkih performansi u Hrvatskoj u razdoblju od 2007. do 2019. godine.



Slika 4 Indeks logističkih performansi u Hrvatskoj

Izvor: [13]

### 3. VRSTE MATEMATIČKIH MODELA PRI OPTIMIZACIJI RUTA

U današnje vrijeme za većinu proizvodnih sustava se podrazumijeva da imaju mnogo podsustava bez kojih ne mogu funkcionirati. Za primjer, kako bi se konstruiralo jedno vozilo potrebna je ogromna količina različitih dijelova od mnogo različitih dobavljača koji se nalaze u različitim gradovima, državama ili čak kontinentima. Takve situacije postavljaju velike zahtjeve na području rada koji se bavi nabavom, otpremom ili skladištenjem. Rijetko koji proizvodni sustav može funkcionirati bez pravilno integriranog logističkog sustava jer su transport i distribucija sirovina i gotovih proizvoda postali jedan od ključnih dijelova upravljanja i organizacije proizvodnje. Ukoliko postoji potreba za transportom, s obzirom na vrlo visoke troškove, nužno je pratiti vlastite prijevozne procese i pomoću različitih matematičkih modela optimizirati rute.

Problem trgovačkog putnika (engl. Travelling Salesman Problem, TSP) su W.R. Hamilton i T. Kirkman početkom 19. stoljeća definirali kao rekreativnu zagonetku baziranu na pronalaženju Hamiltonovog ciklusa. Graf predstavlja mrežu gradova, bridovi su mogući putni pravci između gradova, a težine bridova su udaljenosti gradova. Ovaj se problem može predstaviti kao putovanje trgovačkog putnika s ciljem da obiđe sve gradove samo jednom, ali da prođe ukupno najkraći put i vrati se upravo u onaj grad odakle je putovanje započeo. Problem trgovačkog putnika je NP teški problem u matematičkoj teoriji. Svojstvo takvih problema je da pronalazak egzaktnog rješenja problema iznimno dugo traje jer algoritmi rješavanja imaju veliku računalnu složenost. Složenost problema se vidi kada prebrojimo sva moguća rješenja problema trgovačkog putnika i usporedimo rast broja rješenja s rastom broja bridova na kojem se rješava problem trgovačkog putnika. [14] Jedna od osnovnih metoda koja se koristi za rješavanje ovakvih oblika problema su heurističke metode.

Heurističke metode su, u općem smislu, metode rješavanja problema koje se temelje na iskustvu. Većinu heuristika koja se pojavljuje u literaturi mogu se intuitivno podijeliti na konstruktivne heuristike koje iterativno konstruiraju jedno rješenje gradeći ga od samog početka ili enumeracijske heuristike koje ispituju cijeli skup rješenja i odabiru najbolje. Konstruktivne heuristike vezane su za specifični problem koji rješavaju i često imaju polinomijalno vrijeme izvršavanja. Konstruktivne heuristike često imaju jednostavnu strukturu i predstavljaju pohlepne

algoritme koji započinju graditi rješenje od jednog ili više jednostavnih fragmenata rješenja. Za razliku od njih, enumeracijske heuristike predstavljaju metode koje na općenitiji način pristupaju pronalasku rješenja i moraju se prilagoditi specifičnom problemu. Vrijeme izvođenja enumeracijskih heuristika vezano je za veličinu skupa rješenja kojeg heuristika ispituje, a veličina skupa je često eksponencijalno ovisna o veličini problema. Rješenja dobivena konstruktivnim heuristikama često predstavljaju početno rješenje za enumeracijske heuristike. [14] Isto tako, heuristiku se može podijeliti na dvije osnovne strategije:

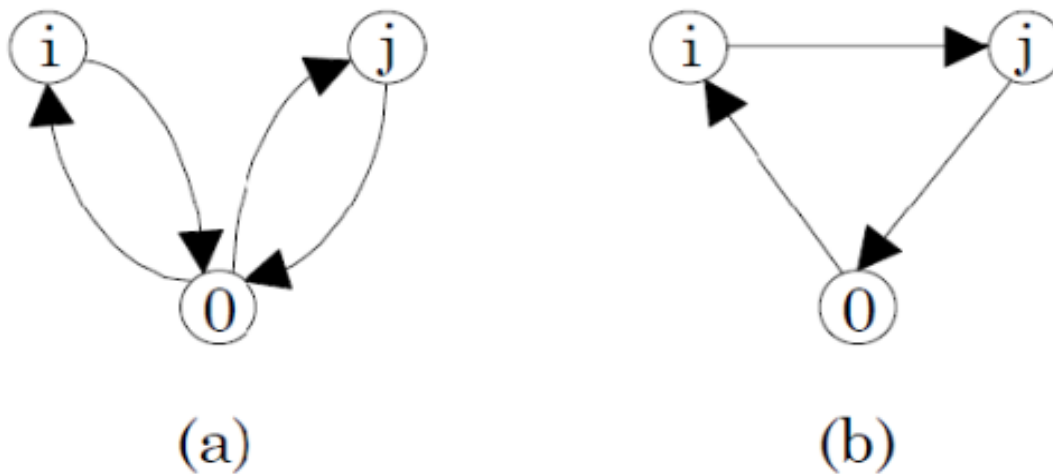
- Pohlepna strategija; ovakva strategija uvelike može reducirati količinu pretraživanja, ali isto tako i vremensku složenost. Ovakva strategija ima mogućnost konstantnog usmjeravanja na najbolje trenutno rješenje, neovisno o tome što trenutna opcija ne mora usmjeravati prema globalnom optimumu. Glavni nedostatak je što radi toga ova strategija ne mora uvijek dati optimalni rezultat, no prednost joj je što je brža od ostalih algoritama,
- Lokalna pretraga; jedna od najčešće korištenih strategija. Potrebno je posjedovati u svakom trenutku neko rješenje kako bi se u svakoj idućoj iteraciji probala pronaći optimalna solucija. Iteracije se ponavljaju sve dok postoji opcija za to ili dok se ne dođe do optimalnog rješenja. Nedostatak ove strategije je što može uvijek zapeti u lokalnom optimumu, što nekad može značiti konačno optimalno rješenje, ali ne uvijek.

### **3.1. Clark-Wright-ov algoritam ušteta**

Problem usmjeravanja vozila (eng. vehicle routing problem – VRP) vrlo je važan kod sustava koji posjeduju određeni oblik distribucijske mreže. Ima važnu ulogu pri smanjenju troškova, smanjenju tranzitnog vremena, što isto tako dovodi do povećanja razine usluge klijentu. Problem predstavlja posjet velikom broju lokacija koristeći vozni park, ali pri tom poštivati određena ograničenja u vidu vozila, kupaca, vozača, itd. Cilj prilikom rješavanja ovakvih oblika problema je optimalno koristiti vozni park uz minimalne troškove. Problem usmjeravanja vozila može se također opisati kao skup kupaca, od kojih svaki ima vlastitu i poznatu lokaciju te poznatim zahtjevom za robom koja se distribuira iz jedne lokacije prema sljedećim uvjetima [15]:

- Utovarni kapaciteti ne smiju biti prekoračeni, tj. kapaciteti vozila ne smiju biti manji od količine robe
- Svakog kupca može opslužiti samo jedno vozilo
- Zahtjevi kupaca moraju se zadovoljiti u količinama

Clark-Wright-ov algoritam ušteda je jedan od najpoznatijih algoritama za rješavanje problema usmjeravanja vozila. Ova metoda koristi postupne korake kako bi došla do konačnog rješenja. Prvo se pronalazi najmanje poželjno rješenje te postepeno svakim idućim korakom dolazi do optimalnog.



Slika 5. Primjer principa Clark-Wright-ovog algoritma ušteda

Izvor: [16]

Prema slici 4., uočljivo je na koji princip funkcionira Clark-Wright-ov algoritam ušteda. Čvor „0“ predstavlja polazište i krajnje odredište vozila, dok čvorovi „i“ i „j“ predstavljaju potrošača. U prvom slučaju (a) vozilo kreće iz polazišta te se kreće do čvora „i“ te se vraća natrag u čvor „0“, istu radnju radi s drugim čvorom. U drugom slučaju (b), vozilo kreće iz polazišta te mu je prva usputna točka čvor „i“, nakon njega se ne vraća u bazu već ide do drugog čvora te se iz njega vraća natrag u krajnje odredište, odnosno čvor „0“. Ovo je najjednostavniji prikaz koncepta ovog modela, no problem nastaje kada postoji mnogo više različito pozicioniranih čvorova za prikup ili dostavu robe. U takvim slučajevima algoritam će doći do rješenja, kako je već navedeno, kroz par koraka dok ne dođe do konačnog, optimalnog rješenja.

Osnovna formula prema kojoj se računaju uštede, odnosno optimalno spajanje više različito pozicioniranih čvorova u mreži kod Clark-Wright-ovog algoritma ušteda glasi:

$$S_{(i,j)} = d(B, i) + d(B, j) - d(i, j) \quad (1)$$

Gdje je:

S= postignuta ušteda na ruti

d= udaljenosti između dva različita čvora

B= polazišno/odredišni čvor

i= prvi čvor dostave/prikupa robe

j= drugi čvor dostave/prikupa robe.

Pošto se u praksi pojavljuje velika količina čvorova, odnosno lokacija za običi, ovaj zadatak postaje vrlo kompleksan. Bitno je prije samog početka izračuna odrediti osnovni princip optimizacije rute pomoću ovog modela. Metodologija optimizacija ruta pomoću Clark-Wright-ovog algoritma ušteda bi glasila [17]:

- Korak 1: Izračunati uštede  $s(i, j) = d(B, i) + d(B, j) - d(i, j)$  za svaki par  $(i, j)$  čvorova koje je potrebno opslužiti,
- Korak 2: Izvršiti rangiranje svih ušteda te ih poredati po veličini. Izraditi listu ušteda koja započinje najvećom uštedom,
- Korak 3: Pri razmatranju uštede  $s(i, j)$  odgovarajuću granu  $(i, j)$  uključiti u djelomičnu rutu, ukoliko se pri tome ne krše postojeća operativna ograničenja i ukoliko:
  - (a) Čvor  $i$  i čvor  $j$  već nisu uključeni u neku postojeću djelomičnu rutu,
  - (b) Je jedan od čvorova  $i$  ili  $j$  već uključen u neku postojeću djelomičnu rutu i ukoliko taj čvor nije unutarnji čvor u ruti,
  - (c) Su oba čvora  $i$  i  $j$  uključeni u dvije različite djelomične rute i niti jedan od navedenih čvora nije unutarnji čvor u tim rutama u kojem je slučaju moguće spojiti djelomične rute u jednu rutu.
- Korak 4: Kada je lista ušteda realizirana do kraja, potrebno je završiti s algoritmom.

Isto tako, Clark-Wrightov algoritam ušteda može se podijeliti na simultanu i sekvencijalnu metodu. Kod simultane metode u jednom prolasku kroz dobivene uštede se vrši optimizacija, dok

se kod sekvencijalne metode određuje početna ruta prema najvećoj uštedi, a nadalje se traži najveća iduća postignuta ušteda te se tako ponavljaju koraci dok se u rutu ne uključe svi postojeći čvorovi.

### 3.2. Clark-Wright-ov algoritam ušteda - metoda s indikatorom $T$

Clark-Wright-ov algoritam u samome početku generira rutu tako da se svaka vožnja odvija između početnog čvora i svih ostalih posebno  $(0, i, 0)$  za  $(i=1, \dots, n)$  te ih postupno, korak po korak, spaja na temelju kriterija ušteda. Prema ovoj metodi, spajanje dviju ruta  $(0, \dots, i, 0)$  te  $(0, j, \dots, 0)$  u jednu rutu  $(0, \dots, i, j, \dots, 0)$  generira novu uštedu prema formuli:

$$S_{ij} = C_{i0} + C_{0j} - C_{ij} \quad (2)$$

Pošto su uštede ostale iste kroz cijeli algoritam, one se mogu također i unaprijed izračunati. U paralelnoj verziji ovog algoritma, koja se čini kao i najbolja verzija, optimiziranje i spajanje čvorova provodi se pri svakoj iteraciji, sve dok je to moguće. Ovaj jednostavni algoritam posjeduje osnovne karakteristike intuitivnosti, lakoće pri implementaciji te iznimne brzine rješavanja problema. Često se koristi kao početno rješenje u nekim sofisticiranijim algoritmima. [18] Postupak optimizacije ruta koristeći ovu metodu ide slijedom:

- Prvi korak je izrada polumatrice udaljenosti. Nije potrebna cijela matrica pošto su udaljenosti jednake u oba smjera, što bi rezultiralo simetričnim grafom i unosom nepotrebnih podataka,
- U idućem koraku je potrebno izračunati uštede za svaki par čvorova prema formuli (2) te izraditi novu polu-matricu,
- Nakon izrade nove polu-matrice i proračuna ušteda, nužno je dodati vrijednost  $T$  u tablicu. Vrijednost indikatora  $T$  davat će informacije ako su dvije lokacije izravno povezane te može imati iduće vrijednosti:  $T=0$  (indikator da vozilo neće ići izravno u čvorove  $i$  i  $j$ ),  $T=1$  (indikator da vozilo ide izravno do lokacija  $i$  i  $j$  te da se radi o jednosmjernom putovanju, odnosno da se ne vraća u početni čvor kao u prijašnjoj iteraciji) te  $T=2$  (indikator da vozilo iz početnog čvora ide do određene lokacije te se vraća natrag. Radi se o kružnoj dostavi, te je najčešće trenutno rješenje dok ne uđe u postupak optimizacije i izračuna)

- Idući korak podrazumijeva potražnju za najvećom uštedom u polu-matrici. Kada se odredi najveća ušteda ta lokacija se može spojiti ukoliko zadovoljava iduća dva uvjeta: a) indikatori od svake lokacije moraju biti veći od 0 te pod b) da dvije lokacije već nisu uvrštene u rutu,
- Postupak je potrebno ponavljati sve dok se svi čvorovi ne uključe u rutu.

### 3.3. Metoda grananja i ograničavanja

Metoda grananja i ograničavanja (engl. branch and bound) metoda je paradigma dizajna algoritma koja se općenito koristi za rješavanje kombinatornih problema optimizacije. To su problemi koji su najčešće rješivi u eksponencijalnom vremenu i zahtijevaju istraživanje svih mogućih permutacija u najgorem slučaju. Te probleme branch and bound metoda rješava relativno brzo. Kako bi se problem trgovačkog putnika riješio korištenjem matematičke metode branch and bound, prvo ga je potrebno prilagoditi jeziku teorije grafova. [19]

Metoda grananja i ograničavanja nije isključivo tehnika rješenja specifično ograničena na cjelobrojne programske probleme, vrlo je fleksibilna te se može primijeniti na široki spektar različitih problema. Temelji se na pristupu da se ukupni skup rješenja može podijeliti na više manjih solucija, odnosno podskupina rješenja. Manje skupine rješenja nadalje se mogu sustavno ocjenjivati sve dok se ne dobije konačno, optimalno rješenje. Glavna ideja metode grananja i ograničavanja je da se određeni problemi niti ne rješavaju ako se procjeni da neće rezultirati boljim rješenjem od prethodnoga.

Metodologija postupka optimizacije ruta pomoću metode grananja i ograničavanja bi glasila:

- Prvi korak je ispisati cijelu matricu udaljenosti te minimalne vrijednosti iz svakog pojedinog retka matrice. Zatim je potrebno oduzimanje svake vrijednosti iz svakog retka s dobivenom minimalnom vrijednosti. Cilj je dobiti minimalno jednu vrijednost 0 u svakom retku,
- Idući korak je izdvojiti minimalne vrijednosti iz svakog stupca te kao u prošlom koraku oduzeti sve vrijednosti iz stupca s minimalnom vrijednošću. Cilj je također dobiti barem

jednu vrijednost 0 u svakom stupcu. Na taj način dobiva se matrica s minimalno jednom vrijednosti 0 u svakom retku i stupcu, tzv. reducirana matrica,

- Nakon toga potrebno je izračunati donju granicu na duljini na duljini svih kružnih puteva. Ona se računa prema formuli:

$$\sum_{i=1}^n ui + \sum_{j=1}^n vj \quad (3)$$

Gdje su:

- $ui$  = zbroj svih minimalnih vrijednosti iz svakog pojedinog retka
- $vj$  = zbroj svih minimalnih vrijednosti iz svakog pojedinog stupca
- U idućem koraku potrebno je izračunati sve kazne u poljima s vrijednosti 0 radi ne korištenja predložene veze među gradovima. Izračun se vrši na principu: polje vrijednosti 0 za  $(i, j)$  = minimalna vrijednost polja  $i$  + minimalna vrijednost polja  $j$ . Nakon izračuna dobiva se matrica s kaznama te se odabire vrijednost s najvećom kaznom. Ako postoji više vrijednosti s najvećom kaznom uzima se ona prva po redu. Nakon odabira dobiva se prva relacija  $(i, j)$  na ruti.
- Nakon što je relacija odabrana, izabrani redak i stupac se brišu iz tablice i nastaje nova reducirana matrica. Postupak je potrebno ponavljati sve dok se matrica ne reducira do zadnjih vrijednosti, odnosno dok svi čvorovi ne budu uključeni u rutu.

### 3.4. Metoda najbližeg susjeda

Heuristika najbližeg susjeda (engl. Nearest Neighbour Heuristic - NNH) je jedan od prvih algoritama za rješavanje problema trgovačkog putnika, a dosta se često koristi kao inicijalno rješenje za testiranje popravljajućih heuristika, dosta je brza, ali su rješenja uvijek daleko od optimalnih. [10] Metoda se zasniva na principu posjeta najbližem susjedu od početne lokacije, zatim se posjećuje svaka iduća najbliža lokacija sve dok se ne posjete sve moguće točke. Na kraju se potrebno vratiti u polazište, odnosno čvor 0.



Postupak optimizacije rute koristeći metodu najbližeg susjeda može se opisati u nekoliko idućih koraka:

- Vrh 0 uvijek odabrati kao početnu točku u ruti,
- Odabrati idući čvor koji je najbliži prethodno odabranom, pod uvjetom da čvor već nije dodan u rutu,
- Postupak ponavljati sve do trenutka kad svi čvorovi nisu odabrani, tj. dok svi čvorovi nisu spojeni,
- Kada se odabere zadnji čvor, on se spaja s početnom točkom neovisno što ona vjerojatno neće biti najmanja vrijednost pri odabiru.

## 4. OPTIMIZACIJA RUTA NA PRIMJERU IZ PRAKSE

U ovom poglavlju bit će matematički obrađene rute za tri vozila na primjeru tvrtke Quehenberger Logistics d.o.o. Početna točka svake rute bit će u Mariboru iz Slovenije te će se vozila kretati prema Italiji gdje se za klijenta prikuplja roba i idući dan ujutro ju je potrebno dostaviti natrag u Maribor, odnosno početno/odredišnu točku. Matematičke metode koje će biti korištene su: Clark-Wright-ov algoritam ušteda, Clark-Wright-ov algoritam ušteda- metoda s indikatorom T te metoda najbližeg susjeda. U prethodnom poglavlju opisana je osnovna metodologija izračuna za navedene matematičke modele, dok će u ovom poglavlju na primjerima detaljno biti prikazan i objašnjen izračun.

U primjerima će biti prikazane isključivo regije te poštanski brojevi prikupa, dok će se udaljenosti računati od točne adrese firme radi očuvanja tajnosti i diskrecije. Rute se odrađuju na tjednoj bazi te ovisnost količine lokacija za prikup robe ovisi o potražnji klijenta, odnosno količini robe na stanju skladišta i hitnosti. S druge strane, također je potrebno zadovoljiti prijevozne kapacitete, odnosno količina robe mora odgovarati kapacitetu vozila. Ukoliko je potražnja i hitnost za robom toliko nužna, a ne zadovoljava kapacitete vozila, prijevoznik omogućava prikolicu. U slučaju da i tad prijevozni kapaciteti nisu dovoljni, za robu se organizira prijevoz s drugim prijevoznicima koji redovito prikupljaju robu u Italiji prema cjeniku.

Vozilo koje se koristi prilikom transporta je kombi s ceradom i utovarno/istovarnom rampom. Vrlo je bitno naglasiti kako se, prilikom organizacije zbirne linije, uzimaju ograničenja kapaciteta za vozilo koje se koristi i ima korisnu nosivost 1200 kg. Količina robe koja se prikuplja nikad ne prelazi korisnu nosivost vozila, a ukoliko postoji još robe koja je spremna za prikup, kako je navedeno, s osiguranom dodatnom prikolicom ili se prikuplja s vozilima drugih raspoloživih prijevoznika. Utovarni prostor gotovo nikad nije maksimalno iskorišten, pošto se radi o manjim paketima koji su relativno teški.

### 4.1. Ulazni podaci za vozilo 1

Ruta vozila 1 započinje iz početnog čvora u Mariboru te kreće prema Italiji. Prikuplja se roba sa sedam lokacija te se vraća natrag na početnu lokaciju. Tablicom 1. prikazane su sve lokacije

i njihove udaljenosti od početnog čvora. Tablicom 2. prikazana je potpuna matrica udaljenosti za prikazane lokacije na temelju koje će se vršiti izračun.

Tablica 1. Podaci o ruti vozila 1

Čvor	Lokacija	Poštanski broj	Udaljenost od početnog čvora (km)
$x_0$	Maribor (Slovenija)	2000	0
$x_1$	Parma	43010	661
$x_2$	Poggio Renatico	44028	478
$x_3$	Monzabano	46040	499
$x_4$	Reggio Emilia	42124	573
$x_5$	Nonantola	41015	528
$x_6$	S. Girolamo - Guastalla	42016	543
$x_7$	Albiena	42020	583

Izvor: [20]

Tablica 2. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila 1

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_0$	<b>0</b>	661	478	499	573	528	543	583
$x_1$	661	<b>0</b>	182	157	85	123	104	75
$x_2$	478	182	<b>0</b>	116	92	49	74	99
$x_3$	499	157	116	<b>0</b>	89	115	66	103
$x_4$	573	85	92	89	<b>0</b>	44	28	17
$x_5$	528	123	49	115	44	<b>0</b>	55	45
$x_6$	543	104	74	66	28	55	<b>0</b>	42
$x_7$	583	75	99	103	17	45	42	<b>0</b>

#### 4.1.1. Optimizacija rute 1 Clark Wright-ovim algoritmom ušteda

Kao što je u poglavlju 3.1. navedeno, prvi korak pri optimizaciji koristeći ovu metodu je izračun ušteda između svakog para pojedinačno. Navedene uštede dobiju se korištenjem formule (1) a postupak je prikazan u nastavku:

$$S_{I,j} = d(B,i) + d(B,j) - d(i,j) \quad (1)$$

$$S_{12} = d(0,1) + d(0,2) - d(1,2) = 661 + 478 - 182 = 957$$

$$S_{13} = d(0,1) + d(0,3) - d(1,3) = 661 + 499 - 157 = 1003$$

$$S_{14} = d(0,1) + d(0,4) - d(1,4) = 661 + 573 - 85 = 1149$$

$$S_{15} = d(0,1) + d(0,5) - d(1,5) = 661 + 528 - 123 = 1066$$

$$S_{16} = d(0,1) + d(0,6) - d(1,6) = 661 + 543 - 104 = 1100$$

$$S_{17} = d(0,1) + d(0,7) - d(1,7) = 661 + 583 - 75 = 1169$$

$$S_{23} = d(0,2) + d(0,3) - d(2,3) = 478 + 499 - 116 = 861$$

$$S_{24} = d(0,2) + d(0,4) - d(2,4) = 478 + 573 - 92 = 959$$

$$S_{25} = d(0,2) + d(0,5) - d(2,5) = 478 + 528 - 49 = 957$$

$$S_{26} = d(0,2) + d(0,6) - d(2,6) = 478 + 543 - 74 = 947$$

$$S_{27} = d(0,2) + d(0,7) - d(2,7) = 478 + 583 - 99 = 962$$

$$S_{34} = d(0,3) + d(0,4) - d(3,4) = 499 + 573 - 89 = 983$$

$$S_{35} = d(0,3) + d(0,5) - d(3,5) = 499 + 528 - 115 = 912$$

$$S_{36} = d(0,3) + d(0,6) - d(3,6) = 499 + 543 - 66 = 976$$

$$S_{37} = d(0,3) + d(0,7) - d(3,7) = 499 + 583 - 103 = 979$$

$$S_{45} = d(0,4) + d(0,5) - d(4,5) = 573 + 528 - 44 = 1057$$

$$S_{46} = d(0,4) + d(0,6) - d(4,6) = 573 + 543 - 28 = 1088$$

$$S_{47} = d(0,4) + d(0,7) - d(4,7) = 573 + 583 - 17 = 1139$$

$$S_{56} = d(0,5) + d(0,6) - d(5,6) = 528 + 543 - 55 = 1016$$

$$S_{57} = d(0,5) + d(0,7) - d(5,7) = 528 + 583 - 45 = 1066$$

$$S_{67} = d(0,6) + d(0,7) - d(6,7) = 543 + 583 - 42 = 1084$$

Nakon što su uštede za svaki par čvorova izračunate, radi lakšeg pregleda, potrebno je raspisati uštede u tablicu. Tablicom 3. prikazane su uštede prema redoslijedu grana.

Tablica 3. Uštede za vozilo 1 prema redoslijedu vrhova

Relacija (i,j)	Ušteda (i,j)	Relacija (i,j)	Ušteda (i,j)	Relacija (i,j)	Ušteda (i,j)
(1,2)	957	(2,4)	959	(3,7)	979
(1,3)	1003	(2,5)	957	(4,5)	1057
(1,4)	1149	(2,6)	947	(4,6)	1088
(1,5)	1066	(2,7)	962	(4,7)	1139
(1,6)	1100	(3,4)	983	(5,6)	1016
(1,7)	1169	(3,5)	912	(5,7)	1066
(2,3)	861	(3,6)	976	(6,7)	1084

Izvor: [20]

Sljedeći korak je dobivene uštede rangirati prema količini uštede za sve grane od najveće do najmanje, što je prikazano Tablicom 4. Ovaj korak nije nužan, ali znatno skraćuje problematiku u idućem koraku gdje se moraju uzimati grane čije su uštede najveće, po redu.

Tablica 4. Uštede za vozilo 1 rangirane prema količini uštede

Relacija (i,j)	Ušteda (i,j)	Relacija (i,j)	Ušteda (i,j)	Relacija (i,j)	Ušteda (i,j)
(1,7)	1169	(5,7)	1066	(2,7)	962
(1,4)	1149	(4,5)	1057	(2,4)	959
(4,7)	1139	(5,6)	1016	(1,2)	957
(1,6)	1100	(1,3)	1003	(2,5)	957
(4,6)	1088	(3,4)	983	(2,6)	947
(6,7)	1084	(3,7)	979	(3,5)	912
(1,5)	1066	(3,6)	976	(2,3)	861

Izvor: [20]

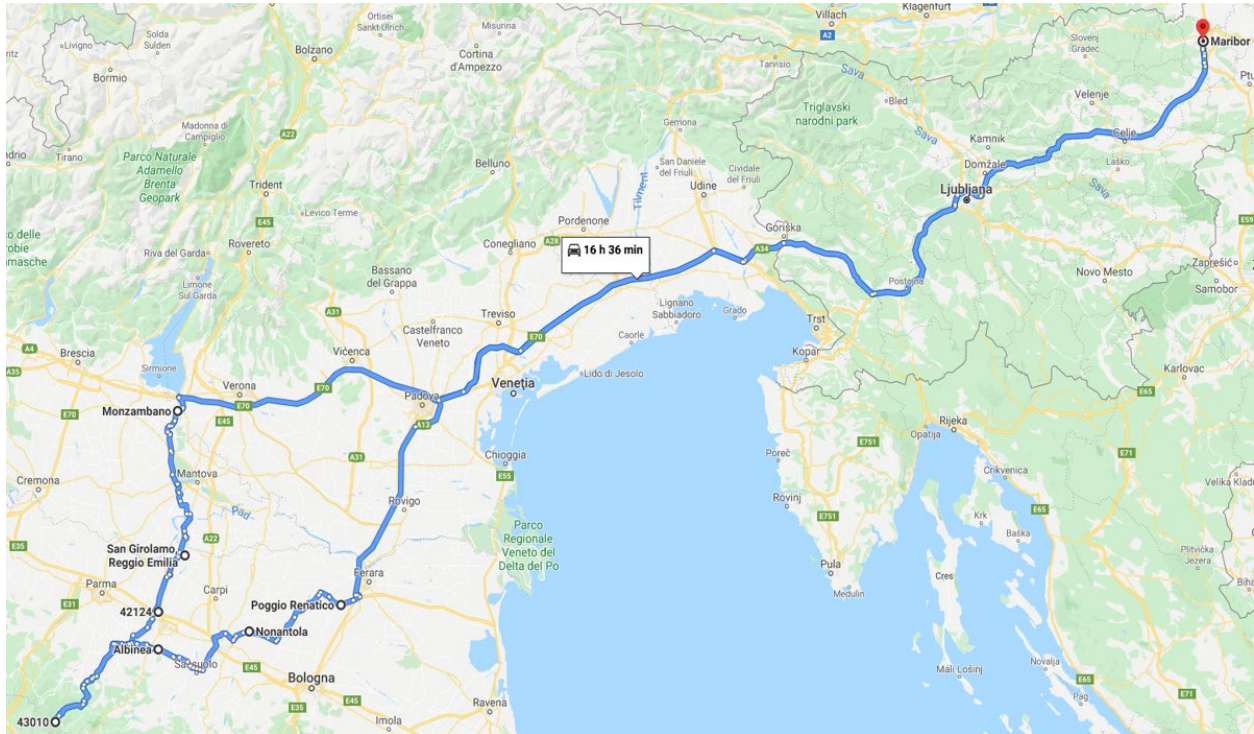
Posljednji korak u ovoj metodi je formiranje rute prema dobivenim uštedama. Prilikom određivanja rute potrebno je, uz dobivene uštede, zadovoljiti sva ograničenja koje je potrebno ispuniti. U nastavku je detaljno prikazan i opisan postupak određivanja rute:

- $(1,7) \Rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \rightarrow 0$  ; relacija  $(1,7)$  predstavlja najveću uštedu te se postavlja kao početak rute,
- $(1,4) \Rightarrow 0 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \rightarrow 0$  ; iduća najveća ušteda je  $(1,4)$  te se može uključiti u rutu pošto je čvor 1 vanjski u ruti,
- $(4,7)$  i  $(1,6)$  se ne mogu pridružiti u rutu pošto se čvor  $(4,7)$  već nalazi na ruti a čvor 1 je unutarnji čvor u ruti i nije moguće spajanje,
- $(4,6) \Rightarrow 0 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \rightarrow 0$  ; iduća najveća ušteda je  $(4,6)$  te se može uvrstiti u rutu pošto je čvor 4 vanjski čvor u ruti i zadovoljeni su uvjeti,
- $(6,7)$  nije moguće pridružiti u rutu pošto se točke već uključene u rutu i nije moguće spajanje,
- $(1,5)$  se ne može pridružiti ruti jer je točka 1 unutarnji čvor u ruti,
- $(5,7) \Rightarrow 0 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \rightarrow 5 \rightarrow 0$  ; iduća najveća ušteda je  $(5,7)$  te se može uvrstiti u rutu jer je čvor 7 vanjski čvor u ruti,
- $(4,5)$ ,  $(5,6)$  su iduće najveće uštede, ali se već nalaze na ruti pa se mogu zanemariti,
- $(1,3)$  je iduća najveća ušteda, ali se ne može priključiti na rutu pošto je čvor 1 unutarnji čvor u ruti i nisu zadovoljeni uvjeti,
- $(3,4)$  i  $(3,7)$  su iduće najveće uštede, ali nisu zadovoljeni svi uvjeti pošto su čvorovi 4 i 7 unutarnji čvorovi u ruti te nije moguće priključenje,
- $(3,6) \Rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \rightarrow 5 \rightarrow 0$  ; relacija  $(3,6)$  je iduća najveća ušteda te, pošto je čvor 6 vanjski čvor, moguće je uvrštavanje,
- $(2,7)$ ,  $(2,4)$  i  $(1,2)$  su iduće najveće uštede no nisu zadovoljeni svi uvjeti pa se preskače,
- $(2,5) \Rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 0$  ;  $(2,5)$  je zadnja najveća ušteda i ovim uvrštavanje se kompletira ruta.

Koristeći Clark-Wright-ovu metodu ušteda dobiveno je iduće rješenje za ovu rutu:

$$0 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 0$$

Potrebna udaljenost, prema Clark-Wright-ovoj metodi, koju vozilo mora prijeći kako bi prikupio svu robu je 1325 km. Slika 5. prikazuje konačnu rutu s 1329 km radi uzimanja cjelobrojnih brojeva prilikom definiranja udaljenosti između svakog pojedinog čvora.



Slika 6. Prikaz rute 1 dobivene pomoću Clark-wright-ovog algoritma ušteda

Izvor: [21]

#### 4.1.2. Optimizacija rute 1 Clark-Wright-ovim algoritmom - metoda s indikatorom T

Za izračun optimizacija na ruti moguće se poslužiti s matricom iz prethodnog primjera Clark-wright-ovog algoritma ušteda. U ovom primjeru neće biti potrebna potpuna matrica već samo njena polovica pošto je grad simetričan, što znači da su udaljenosti od A do B jednake kao od B do A. Tablica 5. prikazuje vrijednosti u gornjoj polovici matrice iznad dijagonale s izračunatim uštedama između svakog čvora. Uštede se računaju kao i u prethodnoj metodi prema formuli (1).

Tablica 5. Prikaz matrice ušteta rute vozila 1 dobivene Clark-Wright-ovim algoritmom s indikatorom T

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_0$	2	2	2	2	2	2	2
$x_1$		957	1003	1149	1066	1100	1169
$x_2$			861	959	957	947	962
$x_3$				983	912	976	979
$x_4$					1057	1088	1139
$x_5$						1016	1066
$x_6$							1084
$x_7$							

Nakon definirane polu-matrice potrebno je pronaći najveću uštedu između čvorova. Taj čvor može se priključiti u rutu jedino ako su zadovoljeni svi uvjeti. Bitno je da oba čvora nisu već priključena na rutu te da je indikator T za oba čvora veći od 0. Najveća ušteda u matrici nalazi se između čvorova  $x_1$  i  $x_7$  i iznosi 1169 km. Niti jedan čvor nije priključen na rutu te je indikator za oba čvora veći od 0. Pošto su oba uvjeta zadovoljena, čvor (1,7) može se priključiti na rutu te indikator na svakom čvoru smanjiti za 1. Novonastala ruta je:  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \rightarrow 0$ .

Tablica 6. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1 pomoću Clark-Wright-ove metode s indikatorom T

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_0$	1	2	2	2	2	2	1
$x_1$		957	1003	1149	1066	1100	1169
$x_2$			861	959	957	947	962
$x_3$				983	912	976	979
$x_4$					1057	1088	1139
$x_5$						1016	1066
$x_6$							1084
$x_7$							



Iduća najveća ušteda nalazi se u čvoru (1,4) te iznosi 1149 km. Uvjeti su zadovoljeni, tj. čvor  $x_4$  se ne nalazi na ruti te su indikatori T veći od 0. Oba indikatora se smanjuju za 1 te je novonastala ruta:  $0 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \rightarrow 0$ .

Tablica 7. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1 pomoću Clark-Wright-ove metode s indikatorom T

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_0$	0	2	2	1	2	2	1
$x_1$		957	1003	1149	1066	1100	1169
$x_2$			861	959	957	947	962
$x_3$				983	912	976	979
$x_4$					1057	1088	1139
$x_5$						1016	1066
$x_6$							1084
$x_7$							

Iduće najveće uštede su čvorovi (4,7) i (1,6). Oba čvora ne zadovoljavaju uvjete te ih se preskače. Iz tog razloga uzima se iduća najveća ušteda (4,6). Svi uvjeti su zadovoljeni, indikatori navedenih čvorova se smanjuju za 1 te je novonastala ruta:  $0 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \rightarrow 0$ .

Tablica 8. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1 pomoću Clark-Wright-ove metode s indikatorom T

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_0$	0	2	2	0	2	1	1
$x_1$		957	1003	1149	1066	1100	1169
$x_2$			861	959	957	947	962
$x_3$				983	912	976	979
$x_4$					1057	1088	1139
$x_5$						1016	1066
$x_6$							1084
$x_7$							

Iduće najveće uštede su u čvorovima (1,5) i (6,7), no pošto ne zadovoljavaju uvjete zanemaruje ih se i preskače. Iduća najveća ušteda je čvor (5,7) te zadovoljava uvjete. Indikatori od svakog čvora se smanjuju za 1 i novonastala ruta je:  $0 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \rightarrow 5 \rightarrow 0$

Tablica 9. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1 pomoću Clark-Wright-ove metode s indikatorom T

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_0$	0	2	2	0	1	1	0
$x_1$		957	1003	1149	1066	1100	1169
$x_2$			861	959	957	947	962
$x_3$				983	912	976	979
$x_4$					1057	1088	1139
$x_5$						1016	1066
$x_6$							1084
$x_7$							

Iduće najveće uštede nalaze se u čvorovima (4,5), (5,6) (1,3), (3,4) i (3,7). Pošto nijedan čvor ne ispunjava uvjete preskaču se i ne uzimaju se u rutu. Iduća najveća ušteda koja zadovoljava uvjete je čvor (3,6) s uštedom od 976 km. Indikatori od svakog čvora se smanjuju za 1 te je novonastala ruta:  $0 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \rightarrow 5 \rightarrow 0$ .

Tablica 10. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1 pomoću Clark-Wright-ove metode s indikatorom T

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_0$	0	2	1	0	1	0	0
$x_1$		957	1003	1149	1066	1100	1169
$x_2$			861	959	957	947	962
$x_3$				983	912	976	979
$x_4$					1057	1088	1139
$x_5$						1016	1066
$x_6$							1084
$x_7$							

Iduća najveća ušteda koja ispunjava sve uvjete je čvor (2,5). Indikatori se smanjuju za jedan i novonastala ruta je:  $0 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 0$ .

Ovime je kompletirana ruta, što se također može zaključiti prema indikatorima svakoga čvora. Moraju na kraju optimizacija svi biti jednaki 0, osim dva vanjska čvora, koji su i ovom primjeru  $x_2$  i  $x_3$ . Tablicom 10. prikazana je polu-matrica skraćivanja za ovaj primjer na kraju optimizacije. Kompletirana ruta ima krajnjih 1325 km kao i u prošlom primjeru Clark-Wright-ovim algoritmom ušteda.

Tablica 11. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1 pomoću Clark-Wright-ove metode s indikatorom T

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_0$	0	1	1	0	0	0	0
$x_1$		957	1003	1149	1066	1100	1169
$x_2$			861	959	957	947	962
$x_3$				983	912	976	979
$x_4$					1057	1088	1139
$x_5$						1016	1066
$x_6$							1084
$x_7$							

#### 4.1.3. Optimizacija rute 1 metodom najbližeg susjeda

Iduća metoda kojom će se pokušati optimizirati ruta je metoda najbližeg susjeda. Sami izračun, kao što je opisano u poglavlju 3.4., vrši se na principu potrage za najbližim mogućim čvorom. Nakon toga se traži idući neiskorišteni najbliži čvor, sve dok se svi ne iskoriste. Nakon što se uzme zadnji čvor, spaja se s početnom točkom.

Prvi najbliži čvor početnoj točki je čvor  $x_2$ , međusobne udaljenosti 478 km. Uzimajući taj čvor u rutu, križa se navedeni stupac te je novonastala ruta:  $0 \rightarrow 2 \rightarrow 0$ . Prikaz postupka prikazan je Tablicom 12.

Tablica 12. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1 pomoću metode najbližeg susjeda

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_0$	<b>0</b>	661	478	499	573	528	543	583
$x_1$	661	<b>0</b>	182	157	85	123	104	75
$x_2$	478	182	<b>0</b>	116	92	49	74	99
$x_3$	499	157	116	<b>0</b>	89	115	66	103
$x_4$	573	85	92	89	<b>0</b>	44	28	17
$x_5$	528	123	49	115	44	<b>0</b>	55	45
$x_6$	543	104	74	66	28	55	<b>0</b>	42
$x_7$	583	75	99	103	17	45	42	<b>0</b>

Idući najbliži čvor prošlom odabranom je  $x_5$ . Udaljen je od prethodnog čvora 49 km te se kao takav uvrštava u novu rutu. Novonastala ruta je:  $0 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 0$ .

Tablica 13. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1 pomoću metode najbližeg susjeda

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_0$	<b>0</b>	661	478	499	573	528	543	583
$x_1$	661	<b>0</b>	182	157	85	123	104	75
$x_2$	478	182	<b>0</b>	116	92	49	74	99
$x_3$	499	157	116	<b>0</b>	89	115	66	103
$x_4$	573	85	92	89	<b>0</b>	44	28	17
$x_5$	528	123	49	115	44	<b>0</b>	55	45
$x_6$	543	104	74	66	28	55	<b>0</b>	42
$x_7$	583	75	99	103	17	45	42	<b>0</b>

Nakon spajanja prva dva čvora, idući najbliži prethodnom je čvor  $x_4$  te je udaljen 44 km.  
 Novonastala ruta :  $0 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 0$ .

Tablica 14. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1 pomoću metode najbližeg susjeda

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_0$	0	661	478	499	573	528	543	583
$x_1$	661	0	182	157	85	123	104	75
$x_2$	478	182	0	116	92	49	74	99
$x_3$	499	157	116	0	89	115	66	103
$x_4$	573	85	92	89	0	44	28	17
$x_5$	528	123	49	115	44	0	55	45
$x_6$	543	104	74	66	28	55	0	42
$x_7$	583	75	99	103	17	45	42	0

Idući najbliži čvor prethodno odabranom je čvor  $x_7$ . Udaljen je od prethodnog čvora 17 km te novonastala ruta sad izgleda :  $0 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 0$ .

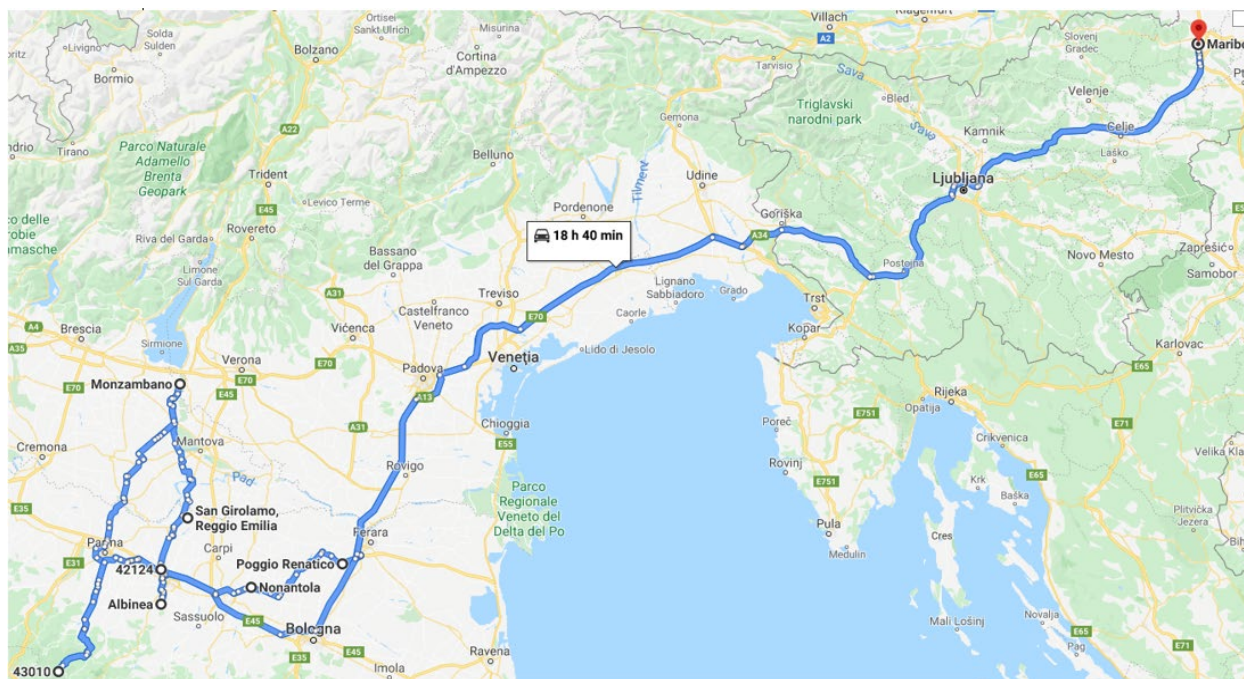
Tablica 15. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1 pomoću metode najbližeg susjeda

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_0$	0	661	478	499	573	528	543	583
$x_1$	661	0	182	157	85	123	104	75
$x_2$	478	182	0	116	92	49	74	99
$x_3$	499	157	116	0	89	115	66	103
$x_4$	573	85	92	89	0	44	28	17
$x_5$	528	123	49	115	44	0	55	45
$x_6$	543	104	74	66	28	55	0	42
$x_7$	583	75	99	103	17	45	42	0

Prikazani koraci ponavljaju se sve dok se ne dođe do zadnjeg čvora koji se spaja s prvotnim čvorom. U nastavku Tablicom 16. prikazana je kompletna matrica za ovaj primjer. Krajnji oblik rute je:  $0 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ .

Tablica 16. Kompletirani matrični prikaz optimizirane rute metodom najbližeg susjeda

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_0$	0	646	478	499	573	528	543	583
$x_1$	661	0	122	85	31	73	40	36
$x_2$	478	182	0	116	92	49	74	99
$x_3$	499	157	116	0	89	115	66	103
$x_4$	573	85	92	89	0	44	28	17
$x_5$	528	123	49	115	44	0	55	45
$x_6$	543	104	74	66	28	55	0	42
$x_7$	583	75	99	103	17	45	42	0



Slika 7. Prikaz rute 1 dobivene pomoću metode najbližeg susjeda

Izvor: [22]

Ukupni prijeđeni put koji vozilu treba kako bi, na osnovu ove metode, obišao sve lokacije i prikupio svu robu je 1514 km. Slikom 6. prikazana je ruta na osnovu aplikacije Google Maps. Prema aplikaciji, navedena ruta iznosi 1512 km.

## 4.2. Ulazni podaci za vozilo 2

U nastavku su prikazani podaci za rutu vozila 2. Ruta također prikuplja robu sa 7 lokacija na području Italije, dok je polazište također u Mariboru. Podaci o lokacijama prikupa prikazani su tablicom 17., a matrica međusobnih udaljenosti između svake pojedine lokacije Tablicom 18.

Tablica 17. Podaci o ruti vozila 2

Čvor	Lokacija	Poštanski broj	Udaljenost od početnog čvora (km)
$x_0$	Maribor (Slovenija)	2000	0
$x_1$	Viadana	46019	661
$x_2$	Sorbolo	43058	478
$x_3$	Modena	41100	499
$x_4$	Roncolo	42020	573
$x_5$	Alberi di Vigatto	43124	528
$x_6$	Sanguinetto	37058	543
$x_7$	Reggio Emilia	42124	583

Izvor: [20]

Tablica 18. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila 2

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_0$	<b>0</b>	555	567	544	585	583	489	571
$x_1$	555	<b>0</b>	20	65	45	39	71	30
$x_2$	567	20	<b>0</b>	58	35	21	91	26
$x_3$	544	65	58	<b>0</b>	40	61	74	32
$x_4$	585	45	35	40	<b>0</b>	30	123	21
$x_5$	583	39	21	61	30	<b>0</b>	106	34
$x_6$	489	71	91	74	123	106	<b>0</b>	107
$x_7$	571	30	26	32	21	34	107	<b>0</b>



#### 4.2.1. Optimizacija rute 2 Clark-Wright-ovim algoritmom ušteta

Pvi korak, kao i u prethodnom primjeru, je izračunati uštete za svaki par čvorova u mreži koristeći formulu (1). Detaljan postupak izračuna ušteta prikazan je u nastavku:

$$S_{i,j} = d(B,i) + d(B,j) - d(i,j) \quad (1)$$

Nadalje, potrebno je izraditi tablice s izračunatim uštedama između svakog čvora na ruti. U nastavku tablicom 19. prikazane su uštete prema svakom čvoru, a tablicom 20. prikazane su uštete između čvorova poredane od najveće do najmanje.

Tablica 19. Uštete za vozilo 2 prema redoslijedu vrhova

Relacija (i,j)	Ušteta (i,j)	Relacija (i,j)	Ušteta (i,j)	Relacija (i,j)	Ušteta (i,j)
(1,2)	1102	(2,4)	1117	(3,7)	1083
(1,3)	1034	(2,5)	1129	(4,5)	1138
(1,4)	1095	(2,6)	965	(4,6)	951
(1,5)	1099	(2,7)	1112	(4,7)	1135
(1,6)	973	(3,4)	1089	(5,6)	966
(1,7)	1096	(3,5)	1066	(5,7)	1120
(2,3)	1053	(3,6)	959	(6,7)	953

Izvor: [20]

Tablica 20. Uštete za vozilo 2 rangirane prema količini uštete

Relacija (i,j)	Ušteta (i,j)	Relacija (i,j)	Ušteta (i,j)	Relacija (i,j)	Ušteta (i,j)
(4,5)	1138	(1,5)	1099	(1,3)	1034
(4,7)	1135	(1,7)	1096	(1,6)	973
(2,5)	1129	(1,4)	1095	(5,6)	966
(5,7)	1120	(3,4)	1089	(2,6)	965
(2,4)	1117	(3,7)	1083	(3,6)	959
(2,7)	1112	(3,5)	1066	(6,7)	953
(1,2)	1102	(2,3)	1053	(4,6)	951

Izvor: [20]

U posljednjoj tablici mogu se vidjeti najveće dobivene uštete između čvorova te će se na osnovu njih optimizirati ruta. Posljednji korak je izrada rute uzimajući u obzir sve uvjete koji

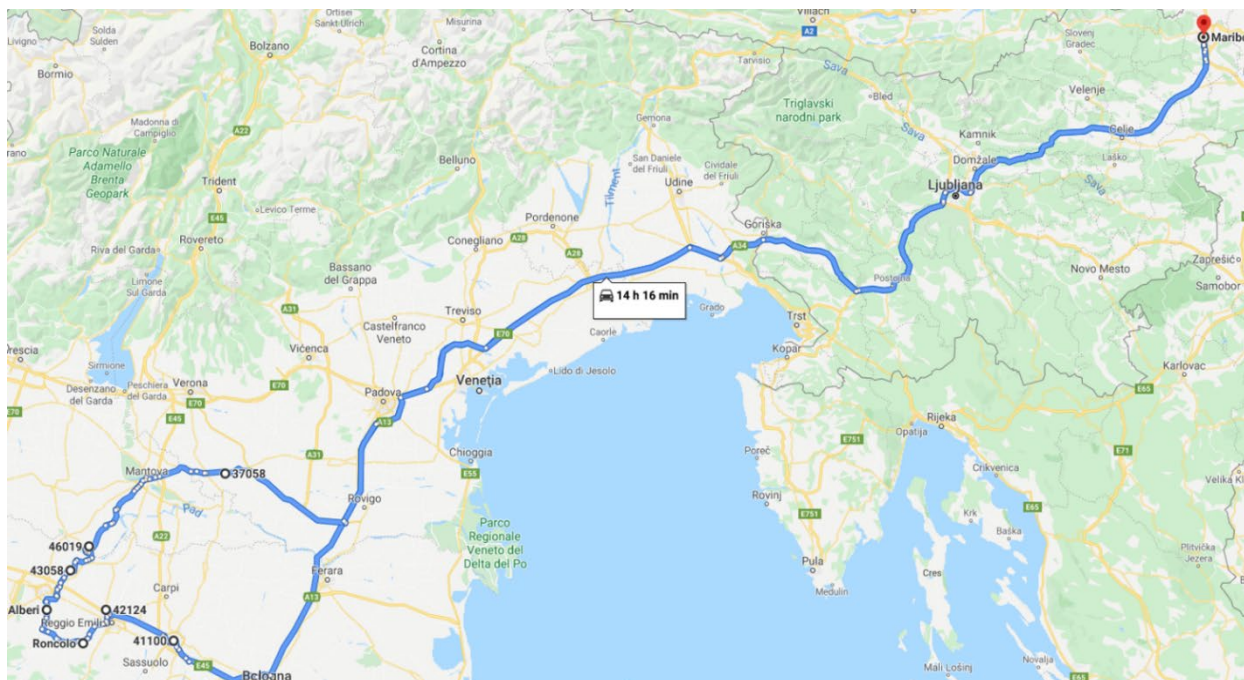
moraju biti zadovoljeni kako bi se određeni čvor uvrstio u rutu. Detaljan postupak uvrštavanja čvorova u rutu prikazan je u nastavku:

- **(4,5)**  $\Rightarrow 0 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 0$ ; relacija (4,5) predstavlja najveću uštedu te se postavlja kao prvi izbor u rutu,
- **(4,7)**  $\Rightarrow 0 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 0$ ; navedeni čvor predstavlja najveću iduću uštedu te pošto zadovoljava sve uvjete može se uvrstiti u rutu,
- **(2,5)**  $\Rightarrow 0 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 0$ ; čvor (2,5) ima iduću najveću uštedu i zadovoljava sve uvjete te se uvrštava u rutu,
- **(5,7), (2,4) i (2,7)** su čvorovi koji ne zadovoljavaju uvjete te ih se na može uvrstiti na rutu i zanemaruje ih se,
- **(1,2)**  $\Rightarrow 0 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ ; navedeni čvor je iduća najveća ušteda i zadovoljava sve uvjete te ga se radi toga može uvrstiti u rutu,
- **(1,5), (1,7), (1,4) i (3,4)** se ne mogu uvrstiti u rutu jer ne zadovoljavaju sve uvjete i zanemaruje ih se,
- **(3,7)**  $\Rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ ; čvor (3,7) je iduća najveća ušteda koji zadovoljava sve uvjete te ga se može uvrstiti u rutu,
- **(3,5), (2,3) i (1,3)** su idući čvorovi s najvećim uštedama ali ne zadovoljavaju sve uvjete pa ih se zanemaruje i preskače,
- **(1,6)**  $\Rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ ; (1,6) je idući čvor s najvećim uštedama te ga se uvrštava u rutu. Ovim korakom su iskorišteni svi čvorovi i završava postupak jer je ruta kompletirana.

Koristeći Clark-Wright-ovu metodu ušteda na ovome primjeru dobivena je sljedeća ruta:

$$0 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 6 \rightarrow 0$$

Koristeći ovu metodu, potrebna udaljenost kako bi vozilo prikupilo robu sa svih lokacija iznosi 1228 km. Koristeći aplikaciju Google maps dobivena udaljenost iznosi 1229 km kako je i prikazano Slikom 7. u nastavku.



Slika 8. Prikaz rute 2 dobivene pomoću Clark-Wright-ovog algoritma ušteta

Izvor: [23]

#### 4.2.2. Optimizacija rute 2 Clark-Wright-ovim algoritmom – metoda s indikatorom T

U nastavku, Tablicom 21., je prikazana polu-matrica za rutu vozila 2 s dobivenim uštedama između svakog pojedinog čvora. Uštede se dobiju kao i u prethodnom primjeru koristeći formulu (1). Također, kao i u prethodnom primjeru, dodaje se još jedan redak koji predstavlja indikator T, koji će se svaki put smanjiti kad se pripadajući čvor uvrsti u rutu.

Tablica 21. Prikaz matrice ušteda rute vozila 2 dobivene Clark-Wright-ovim algoritmom s indikatorom T

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_0$	2	2	2	2	2	2	2
$x_1$		1102	1034	1095	1099	973	1096
$x_2$			1053	1117	1129	965	1112
$x_3$				1089	1066	959	1083
$x_4$					1138	951	1135
$x_5$						966	1120
$x_6$							953
$x_7$							

Idući korak, nakon izračuna najvećih ušteda, je pronalazak najvećih ušteda po čvorovima i uvrštavanje u rutu ako su ispunjeni svi uvjeti. U nastavku je postupak odabira rute prema ovoj metodi te izgleda:

$$(4,5) \Rightarrow 0 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 0,$$

$$(4,7) \Rightarrow 0 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 0,$$

$$(2,5) \Rightarrow 0 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 0,$$

$$(1,2) \Rightarrow 0 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0,$$

$$(3,7) \Rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0,$$

$$(1,6) \Rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 6 \rightarrow 0.$$

Tablicom 22. prikazan je postupak izračuna rute vozila 2 prema navedenoj metodi. Svi indikatori jednaki su 0 osim jedina dva vanjska čvora koji su:  $x_2$  i  $x_6$ .

Tablica 22. Matrični prikaz izračuna rute vozila 2 pomoću Clark-Wright-ove metode s indikatorom T

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$											
$x_0$	0	0	1	0	0	1	0											
$x_1$		1	1102	1034	1095	1099	973	1096										
$x_2$				1	1053	1117	1129	965	1112									
$x_3$								1	1089	1066	959	1083						
$x_4$						1						1	1138	951	1135			
$x_5$															966	1120		
$x_6$																	953	
$x_7$																		

Ova metoda dala je rezultate iste kao i prethodna metoda Clark-Wright-ovim algoritmom ušteda. Potrebna udaljenost koju je potrebno prijeći, kako bi vozilo prikupilo robu sa svih lokacija, je 1228 km.

#### 4.2.3. Optimizacija rute 2 metodom najbližeg susjeda

Ruta vozila 2 pokušat će se optimizirati također metodom najbližeg susjeda. Postupak izračuna isti je kao i u prethodnom primjeru s vozilom 1, samo što će se u ovom primjeru prikazati krajnje rješenje i postupak odabira čvorova jedan po jedan. Tablicom 23. prikazan je postupak odabira rute.

(0,6) =>  $0 \rightarrow 6$ ,

(6,1) =>  $0 \rightarrow 6 \rightarrow 1$ ,

(1,2) =>  $0 \rightarrow 6 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ ,

(2,5) =>  $0 \rightarrow 6 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5$ ,

(5,4) =>  $0 \rightarrow 6 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4$ ,

$(4,7) \Rightarrow 0 \rightarrow 6 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 7,$

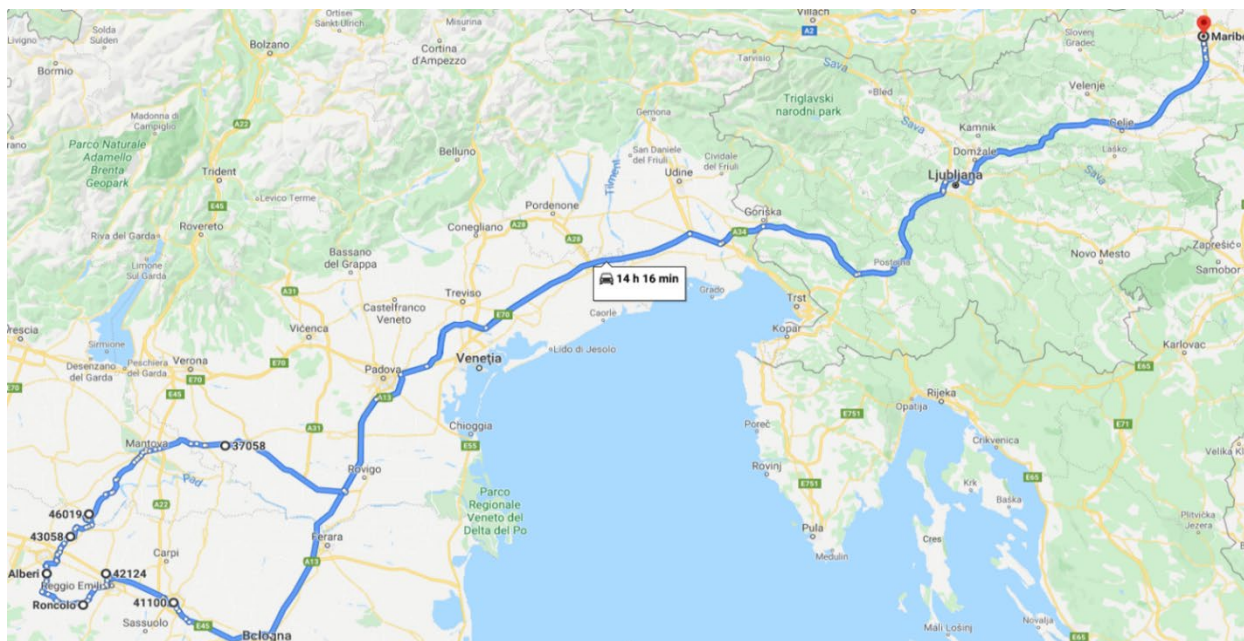
$(7,3) \Rightarrow 0 \rightarrow 6 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 3,$

$(3,0) \Rightarrow 0 \rightarrow 6 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 0.$

Tablica 23. Matrični prikaz izračuna rute vozila 2 pomoću metode najbližeg susjeda

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_0$	0	555	567	544	585	583	489	571
$x_1$	555	0	20	65	45	39	71	30
$x_2$	567	20	0	58	35	21	91	26
$x_3$	544	65	58	0	40	61	74	32
$x_4$	585	45	35	40	0	30	123	21
$x_5$	583	39	21	61	30	0	106	34
$x_6$	489	71	91	74	123	106	0	107
$x_7$	571	30	26	32	21	34	107	0

Prikazanim postupkom i odabirom posljednjeg slobodnog čvora, ruta je kompletirana i može se izračunati ukupni prijeđeni put. Kao što se može primijetiti, u ovom slučaju metoda najbližeg susjeda dala je isti rezultat kao i prethodne dvije metode. Jedina razlika, naspram prethodne dvije metode, je što se ruta kreće u suprotnom smjeru. Ukupni put koji je potrebno prijeći vozilo kako bi prikupio robu na svim lokacijama je 1228 km prema rješenju, dok aplikacija Google maps daje rezultat 1229 km. Ruta je predočena u nastavku Slikom 8.



Slika 9. Prikaz rute 2 dobivene pomoću metode najbližeg susjeda

Izvor:[24]

### 4.3. Ulazni podaci za vozilo 3

U nastavku je prikazana Tablica 24. koja prikazuje osnovne podatke o posljednjoj ruti 3. Ruta započinje u Mariboru kao početno-krajnji čvor a potrebno je prikupiti robu sa 7 zadanih lokacija po Italiji. Tablicom 25. prikazana je matrica udaljenosti između svakog pojedinog čvora.

Tablica 24. Podaci o ruti vozila 2

Čvor	Lokacija	Poštanski broj	Udaljenost od početnog čvora (km)
$x_0$	Maribor (Slovenija)	2000	0
$x_1$	Valsamoggia	40053	526
$x_2$	Spilamberto	41057	533
$x_3$	Pozzolengo	25010	501
$x_4$	Castel Guelfo di Bologna	42020	533
$x_5$	Mirandola	41037	504
$x_6$	Lentigione	42041	561
$x_7$	San Polo d'Enza	42020	592

Izvor: [20]

Tablica 25. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila 3

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_0$	<b>0</b>	526	533	501	533	504	561	592
$x_1$	526	<b>0</b>	10	152	53	58	85	64
$x_2$	533	10	<b>0</b>	119	70	49	67	55
$x_3$	501	152	119	<b>0</b>	194	83	77	104
$x_4$	533	53	70	194	<b>0</b>	90	129	124
$x_5$	504	58	49	83	90	<b>0</b>	57	81
$x_6$	561	85	67	77	129	157	<b>0</b>	32
$x_7$	592	64	55	104	124	81	32	<b>0</b>

#### 4.3.1. Optimizacija rute 3 Clark-Wright-ovim algoritmom ušteta

Prvotno je potrebno izračunati najveće uštede između svakog pojedinog čvora. Za to, kao i u prethodnim primjerima, koristi se formula (1). Detaljan postupak izračuna prikazan je u nastavku:

$$S_{i,j} = d(B,i) + d(B,j) - d(i,j) \quad (1)$$

Tablica 26. Uštede za vozilo 3 prema redosljedu vrhova

Relacija (i,j)	Ušteta (i,j)	Relacija (i,j)	Ušteta (i,j)	Relacija (i,j)	Ušteta (i,j)
<b>(1,2)</b>	1049	<b>(2,4)</b>	996	<b>(3,7)</b>	989
<b>(1,3)</b>	875	<b>(2,5)</b>	988	<b>(4,5)</b>	947
<b>(1,4)</b>	1006	<b>(2,6)</b>	1027	<b>(4,6)</b>	965
<b>(1,5)</b>	972	<b>(2,7)</b>	1070	<b>(4,7)</b>	1001
<b>(1,6)</b>	1002	<b>(3,4)</b>	840	<b>(5,6)</b>	1008
<b>(1,7)</b>	1054	<b>(3,5)</b>	922	<b>(5,7)</b>	1015
<b>(2,3)</b>	915	<b>(3,6)</b>	985	<b>(6,7)</b>	1121

Izvor: [20]



Tablica 27. Uštede za vozilo 3 rangirane prema količini uštede

Relacija (i,j)	Ušteda (i,j)	Relacija (i,j)	Ušteda (i,j)	Relacija (i,j)	Ušteda (i,j)
(6,7)	1121	(1,4)	1006	(1,5)	972
(2,7)	1070	(1,6)	1002	(4,6)	965
(1,7)	1054	(4,7)	1001	(4,5)	947
(1,2)	1049	(2,4)	996	(3,5)	922
(2,6)	1027	(3,7)	989	(2,3)	915
(5,7)	1015	(2,5)	988	(1,3)	875
(5,6)	1008	(3,6)	985	(3,4)	840

Izvor: [20]

Tablicama 26. i 27. prikazane su uštede između svakog pojedinog čvora dobivene za ovaj primjer. U nastavku je detaljno objašnjena optimizacija rute koristeći Clark-Wright-ov algoritam ušteda:

- $(6,7) \Rightarrow 0 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 0$ ; čvor (6,7) predstavlja najveće uštede te ga se kao takvog prvog postavlja na rutu,
- $(2,7) \Rightarrow 0 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 0$ ; idući najveći čvor je (2,7) i zadovoljava sve uvjete i postavlja ga se na novonastalu rutu,
- (1,7); čvor ne zadovoljava uvjete jer je čvor 7 unutarnji čvor na ruti i ne može ga se postaviti, odnosno preskače ga se,
- $(1,2) \Rightarrow 0 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ ; iduća najveća ušteda je (1,2) te ispunjava sve uvjete i postavlja ga se u rutu,
- (2,6) i (5,7); čvorovi ne ispunjavaju sve uvjete i preskače ih se ,
- $(5,6) \Rightarrow 0 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ ; navedeni čvor predstavlja iduću najveću uštedu i kao takvog ga se postavlja u novonastalu rutu,
- $(1,4) \Rightarrow 0 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 0$ ; iduća najveća ušteda je čvor (1,4) te ispunjava sve uvjete i može ga se postaviti u rutu,
- (1,6), (4,7), (2,4), (3,7), (2,5), (3,6), (1,5), (4,6) i (4,5) su iduću najveći čvorovi ali ne ispunjavaju sve uvjete te ih se kao takve preskače,
- $(3,5) \Rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 0$ ; čvor (3,5) je iduća najveća ušteda koja ispunjava sve uvjete i postavlja ga se u novonastalu rutu.



Tablica 28. Prikaz matrice ušteta rute vozila 3 dobivene Clark-Wright-ovim algoritmom s indikatorom T

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_0$	2	2	2	2	2	2	2
	$x_1$	1049	875	1006	972	1002	1054
		$x_2$	915	996	988	1027	1070
			$x_3$	840	922	985	989
				$x_4$	947	965	1001
					$x_5$	1008	1015
						$x_6$	1121
							$x_7$

U nastavku je prikazan slijed optimizacije rute vozila 2 na temelju Clark-Wright-ovog algoritam s indikatorom T:

$$(6,7) \Rightarrow 0 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 0,$$

$$(2,7) \Rightarrow 0 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 0,$$

$$(1,2) \Rightarrow 0 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0,$$

$$(5,6) \Rightarrow 0 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0,$$

$$(1,4) \Rightarrow 0 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 0,$$

$$(3,5) \Rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 0.$$

Tablicom 29. prikazan je matrični prikaz izračuna rute vozila 3 pomoću ove metode. Svi indikatori jednaki su 0 osim dva vanjska,  $x_3$  i  $x_4$ .

Tablica 29. Matrični prikaz izračuna rute vozila 3 pomoću Clark-Wright-ove metode s indikatorom T

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_0$	0	0	1	1	0	0	0
$x_1$	1	1049	875	1006	972	1002	1054
$x_2$		915	996	988	1027	1070	1
$x_3$			840	922	985	989	
$x_4$				947	965	1001	
$x_5$					1008	1015	
$x_6$						1121	1
$x_7$							

Ova metoda dala je konačnu rutu:  $0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0$ , koja je ista kao i iz prethodnog primjera. Potrebna udaljenost koja je potrebna da vozilo prikupi roba sa svih lokacija je 1324 km.

### 4.3.3. Optimizacija rute 3 metodom najbližeg susjeda

Ruta 3 optimizirat će se i metodom najbližeg susjeda te kao i u prošlom primjeru bit će prikazano konačno rješenje. Matrični prikaz izračuna ovom metodom prikazan je Tablicom 40., dok postupak odabira čvorova jedan po jedan izgleda:

$$(0,3) \Rightarrow 0 \rightarrow 3,$$

$$(3,6) \Rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 6,$$

$$(6,7) \Rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 7,$$

$$(7,2) \Rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 2,$$

$$(2,1) \Rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 1,$$

$$(1,4) \Rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4,$$

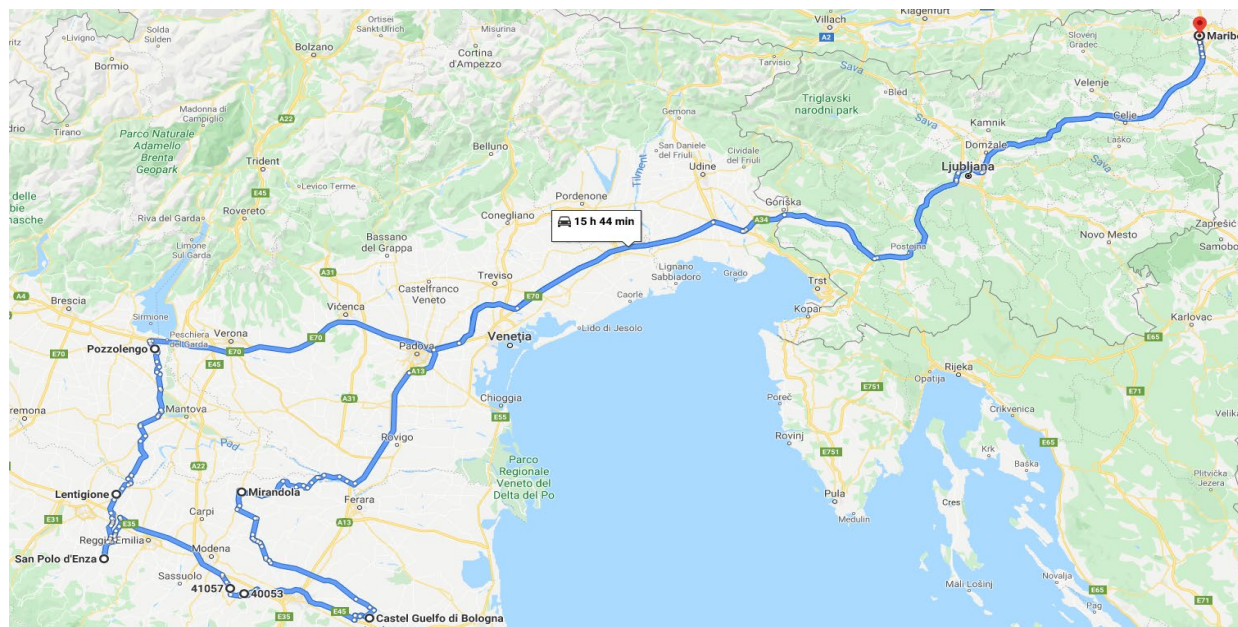
$(4,5) \Rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 5,$

$(5,0) \Rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 0.$

Tablica 30. Matrični prikaz izračuna rute vozila 3 pomoću metode najbližeg susjeda

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_0$	0	526	533	501	533	504	561	592
$x_1$	526	0	10	152	53	58	85	64
$x_2$	533	10	0	119	70	49	67	55
$x_3$	501	152	119	0	194	83	77	104
$x_4$	533	53	70	194	0	90	129	124
$x_5$	504	58	49	83	90	0	57	81
$x_6$	561	85	67	77	129	157	0	32
$x_7$	592	64	55	104	124	81	32	0

Potrebna udaljenost, prema ovoj metodi, iznosi 1322 km, dok aplikacija Google Maps daje rezultat od 1321 km. Slika 10. prikazuje optimiziranu rutu dobivenu metodom najbližeg susjeda.



Slika 11. Prikaz rute 3 dobivene pomoću metode najbližeg susjeda

Izvor:[26]

## 5. KOMPARATIVNA ANALIZA DOBIVENIH REZULTATA

U ovom poglavlju bit će uspoređeni dobiveni rezultati optimizacije ruta koristeći matematičke modele. Nakon samog izračuna dobiveni su zanimljivi podaci. Tablicom 40. prikazani su rezultati, odnosno udaljenosti koje vozilo treba prijeći za svaku pojedinu rutu na osnovu matematičkih modela.

Tablica 31. Prikaz dobivenih rješenja koristeći matematičke modele

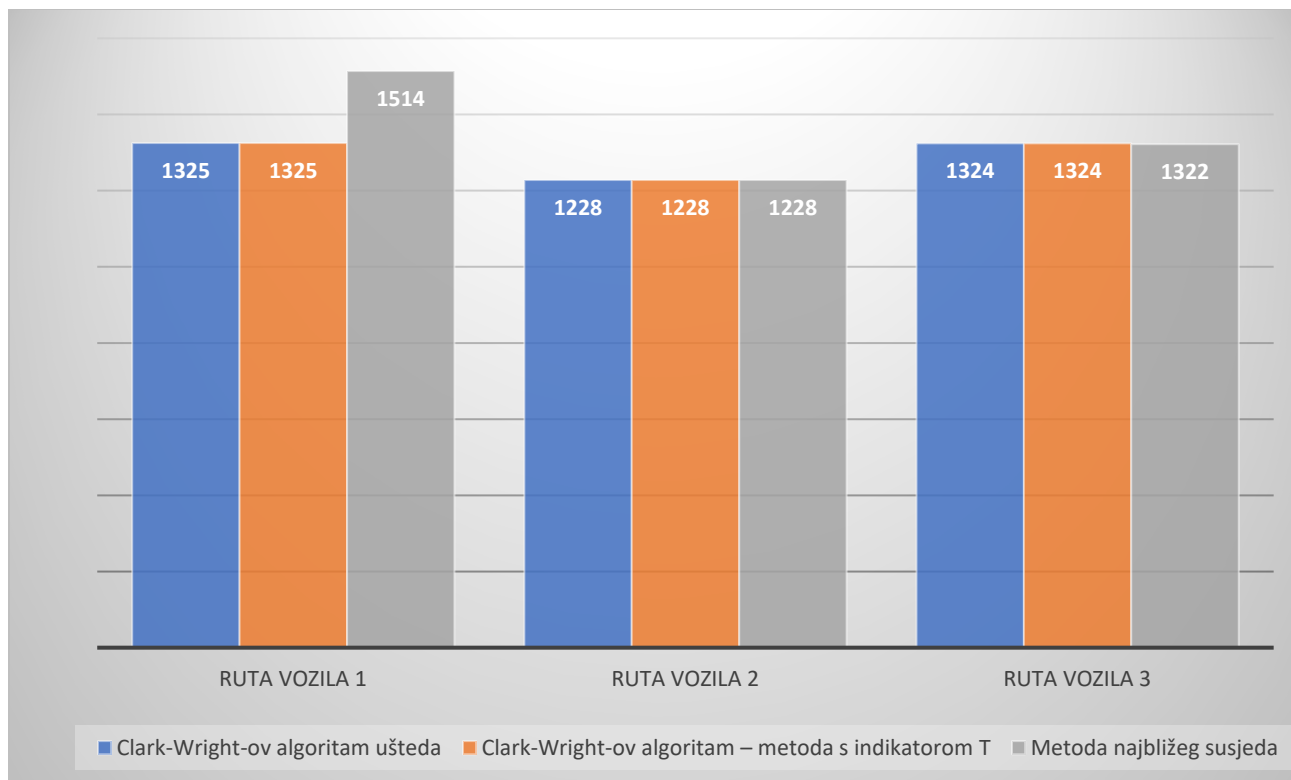
Ruta	Clark-Wright-ov algoritam ušteda	Clark-Wright-ov algoritam – metoda s indikatorom T	Metoda najbližeg susjeda	Najbolje rješenje
Ruta vozila 1	1325	1325	1514	<b>1325</b>
Ruta vozila 2	1228	1228	1228	<b>1228</b>
Ruta vozila 3	1324	1324	1322	<b>1322</b>

Kako se može uočiti iz Tablice 31. dobiveni rezultati su vrlo zanimljivi. Za očekivati je bilo da će Clark-Wright-ov algoritam u svakoj od ruta dati najbolje rješenje. Krenuvši redom, ruta vozila 1 za najbolji rezultat ima 1325 km. Taj rezultat dale su obje Clark-Wrightove metode, dok metoda najbližeg susjeda daje rezultat od 1514 km što je daleko od optimalnog rješenja.

Ruta vozila 2 daje iste udaljenosti, odnosno rješenje od 1228 km za sve tri metode. Objе Clark-Wright-ove metode nude istu rutu, dok metoda najbližeg susjeda također daje za rješenje istu rutu ali u suprotnome smjeru.

Ruta vozila 3 daje pomalo iznenađujuće rješenje. Clark-Wright-ove metode dale su rezultat od 1324 km, dok metoda najbližeg susjeda rezultat od dva km manje, tj. 1322 km.

U nastavku, grafičkim prikazom prikazana su rješenja i odnosi za svaku pojedinu rutu i matematički model u kilometrima.



Grafikon 2. Odnos dobivenih rješenja na temelju matematičkih metoda

Izvor: Izradio autor

## 6. ZAKLJUČAK

Unatoč tome što je jedna od mnogobrojnih podsustava logistike, prijevozna logistika predstavlja iznimno kompleksnu djelatnost i problematiku. Problematika rutiranja vozila u današnje vrijeme, kad na tržištu postoji sve više poduzeća, a zahtjevi korisnika su sve kompleksniji, je sve samo ne jednostavna. Jedan od prvih načina rješavanja ovog problema je problem trgovačkog putnika. Kod ove metode, kao i kod svih ostalih, cilj je posjetiti sve lokacije na kojima treba dostaviti ili prikupiti robu te se vratiti u početnu točku, uz najkraći mogući prijedeni put. Zadatak postaje sve zahtjevniji uz različita ograničenja koja se u stvarnom vremenu mogu pojaviti. Ona mogu biti npr. glede kapaciteta vozila, duljeg tranzitnog vremena isporuke i slično, ali i neki ne svakodnevni razlozi kao što mogu biti npr. usklađivanje radnih vremena firmi koje treba obići, gužve ili pak radovi određenim dionicama puta.

Radi navedenih ograničenja koja se mogu pojaviti u bilo kojem trenutku poslovanja, u današnje vrijeme se koriste različite heurističke metode. One omogućuju pomoću algoritama postići velike uštede na polju troškova, smanjenja tranzitnog vremena, ali i u suštini povećanja razine usluge koja se pruža vlastitim klijentima. Smanjenjem pređenih kilometara, također, direktno utječu i na smanjenje štetnih utjecaja vozila na okoliš te smanjenje buke na prometnicama. U samom startu je potrebno pobliže definirati sve izvore problema te ispitati različite mogućnosti kako bi se došlo do najboljeg rješenja. Upravo radi navedenih ograničenja, programski alati su najbolja opcija jer mogu ponuditi najbolje rješenje uz mnogobrojne uvjete koje im se postavlja.

U ovom radu je izvršeno optimiranje vozila za tri različite rute na primjeru iz prakse, koje se koriste u svakodnevnom poslovanju logističkog poduzeća. Za optimizaciju korištene su metode: Clark-Wright-ov algoritam ušteda, Clark-Wright-ov algoritam – metoda s indikatorom T te metoda najbližeg susjeda. Prije samo izračuna, pretpostavka je bila da će Clark Wright-ove metode dati najbolje rezultate. Navedena metoda je na prvoj ruti dala rezultat 1325 km dok je metoda najbližeg susjeda dala rezultat 1514 km, što je velika razlika. Metoda najbližeg susjeda dala najbolji rezultat u posljednjoj ruti, 1322 km u odnosu na 1324 km koje je dala Clark Wright-ova metoda. Ruta vozila 2 imala je iste rezultate od svih modela. Dobiveni rezultati potkrepljuju teorijsku osnovu, odnosno kako bi se došlo do najboljeg rezultata potrebno je detaljno proučiti sami problem i pravilno pristupiti različitim rješenjima, na osnovu kojih će se odabrati najbolje od dobivenih.



## LITERATURA

- [1] Gath M.: Optimizing transport logistics processes with multiagent planning and control, Dissertation Universitat Bremen, Germany 2015.
- [2] Protega, V.: Auditorna predavanja, Prijevozna logistika I; Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, Akad.god.2017/18.
- [3] Županović I.: Tehnologija cestovnog prijevoza, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 2002.
- [4] [https://transportgeography.org/?page\\_id=643](https://transportgeography.org/?page_id=643) (Pristupljeno: srpanj 2020.)
- [5] Jeřábek. K., Majercak P., Kliestik T., Valaskova K.: Application of Clark and Wright's Savings Algorithm Model to Solve Routing Problem in Supply Logistics, "Naše more", str. 115-119, 2016.
- [6] Rajsman, M.: Nastavni materijal, Tehnologija cestovnog prometa; Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 2012.
- [7] Kolaković M.: Novi poslovni modeli u virtualnoj ekonomiji i njihov utjecaj na promjene u transportnoj logistici i upravljanju lancem opskrbe, Zbornik Ekonomskog fakulteta u Zagrebu, Vol. 3, No. 1, pp. 202-204, 2005.
- [8] Pašagić Škrinjar, J.: Prijevozna logistika II, autorizirana predavanja, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti, 2018./2019.
- [9] <https://progressive.com.hr/?p=4463> (Pristupljeno: srpanj 2020.)
- [10] Tseng Y., Yue W., Taylor M. A.: The role of transportation in logistics chain; University of South Australia, 2005.
- [11] Kulović M., Jusufrić I., Popović R.: Značaj kvaliteta transportne logistike u lancu snabdijevanja, 2011.
- [12] <https://tradingeconomics.com/croatia/logistics-performance-index-overall-1-low-to-5-high-wb-data.html> (Pristupljeno: kolovoz 2020.)
- [13] <https://tradingeconomics.com/> (Pristupljeno: kolovoz 2020.)

[14] Carić T., Fosin J., Optimizacija prometnih procesa, autorizirana predavanja, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti, 2014./2015.

[15] Carić T., Gold H.: Vehicle routing problem, University of Zagreb, 2008.

[16] Halim S., Yoanita L.: Adjusted clustering Clarke-Wright Saving Algorithm for two depots-N vehicles

[17] Teodorović, D., Transportne mreže, Saobraćajni fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd 2007.

[18] Toth P. i Vigo D. Vehicle Routing: Problems, Methods, and Applications, Second Edition, SIAM, Philadelphia, 2014, pp. 88.

[19] Mataija M., Rakamarić Šegić M., Jozić F.: Solving the travelling salesman problem using the Branch and bound method, Zbornik Veleučilišta u Rijeci, Vol. 4 (2016.), No. 1, pp. 259- 270.

[20] <https://www.google.hr/maps> (Pristupljeno: srpanj 2020.)

[21]

<https://www.google.hr/maps/dir/2000+Maribor,+Slovenija/Monzambano/Guastalla/Reggio+Emilia/43010+Parma,+Italija/Albinea/Nonantola/Poggio+Renatico/Maribor,+Slovenija/@45.5929536,11.2829664,7.54z/data=!4m6!1m60!1m5!1m1!1s0x476f77a6ea402051:0x1053af90bc0daa22!2m2!1d15.6458812!2d46.5546503!1m5!1m1!1s0x4781c26afccf4c9b:0x1ac91bb029317178!2m2!1d10.693692!2d45.386839!1m5!1m1!1s0x4780243349397313:0x2ce47517dc253422!2m2!1d10.6543959!2d44.921235!1m5!1m1!1s0x47801c5b07e5f9b3:0xd9e650be4c860335!2m2!1d10.6296859!2d44.6989932!1m5!1m1!1s0x47806fd531178845:0x1c079b0f57e4c860!2m2!1d10.1031202!2d44.3841755!1m5!1m1!1s0x4780030fadf5c163:0xb93baa5a5950a6b4!2m2!1d10.602592!2d44.6198538!1m10!1m1!1s0x477fe9ed3091deef:0xe17b847932216e04!2m2!1d11.041159!2d44.6788747!3m4!1m2!1d11.4409524!2d44.6027398!3s0x477e32ef519761b5:0xf7233e5168893402!1m5!1m1!1s0x477e4b2fc692befb:0x37e9805934e2b865!2m2!1d11.4815423!2d44.76282!1m5!1m1!1s0x476f77a6ea402051:0x1053af90bc0daa22!2m2!1d15.6458812!2d46.5546503!3e0> (Pristupljeno: srpanj 2020.)

[22]

<https://www.google.hr/maps/dir/2000+Maribor,+Slovenija/Poggio+Renatico/Nonantola/Reggio+>

Emilia/Albinea/Guastalla/Monzambano/43010+Parma,+Italija/Maribor,+Slovenija/@44.6229147,9.8566999,9.37z/data=!4m76!4m75!1m5!1m1!1s0x476f77a6ea402051:0x1053af90bc0daa22!2m2!1d15.6458812!2d46.5546503!1m5!1m1!1s0x477e4b2fc692befb:0x37e9805934e2b865!2m2!1d11.4815423!2d44.76282!1m5!1m1!1s0x477fe9ed3091deef:0xe17b847932216e04!2m2!1d11.0411597!2d44.6788747!1m5!1m1!1s0x47801c5b07e5f9b3:0xd9e650be4c860335!2m2!1d10.6296859!2d44.6989932!1m5!1m1!1s0x4780030fadf5c163:0xb93baa5a5950a6b4!2m2!1d10.6025929!2d44.6198538!1m5!1m1!1s0x4780243349397313:0x2ce47517dc253422!2m2!1d10.6543959!2d44.9212351!1m5!1m1!1s0x4781c26afccf4c9b:0x1ac91bb029317178!2m2!1d10.693692!2d45.386839!3m4!1m2!1d10.0959176!2d44.4785515!3s0x12d5321d93f654d9:0x93fd7008d67504de!3m4!1m2!1d10.1552849!2d44.4270634!3s0x12d530da8607c287:0x3efb7a8a2b820392!1m5!1m1!1s0x47806fd531178845:0x1c079b0f57e4c860!2m2!1d10.1031202!2d44.3841755!3m4!1m2!1d10.6065029!2d44.7193353!3s0x47801c09d2cc3b4f:0xbda27a2e7d553afc!3m4!1m2!1d11.3369476!2d44.4873324!3s0x477fd4ebdb27ccb5:0x25c6531b9a955289!1m5!1m1!1s0x476f77a6ea402051:0x1053af90bc0daa22!2m2!1d15.6458812!2d46.5546503!3e0 (Pristupljeno: srpanj 2020.)

[23]

[53](https://www.google.hr/maps/dir/2000+Maribor,+Slovenija/41100+Modena,+Province+of+Modena,+Italija/42124/Roncolo/43124+Alberi,+Province+of+Parma,+Italija/46019+Viadana,+Province+of+Mantua,+Italija/37058+Sanguinetto,+Verona,+Italija/Maribor,+Slovenija/@45.1260222,10.3235977,8.75z/data=!4m70!4m69!1m10!1m1!1s0x476f77a6ea402051:0x1053af90bc0daa22!2m2!1d15.6458812!2d46.5546503!3m4!1m2!1d11.3541245!2d44.484789!3s0x477fd4cece252a7d:0x220a9b76d27f31c5!1m10!1m1!1s0x477fef73b4c0a2df:0x7d76f6a0afb61e0e!2m2!1d10.9146862!2d44.6419048!3m4!1m2!1d10.6283822!2d44.7343031!3s0x47801ea416c47643:0x23dbf453a3d5ce20!1m10!1m1!1s0x47801bd812c80d55:0x1c079b0f57e4cc20!2m2!1d10.6025844!2d44.7404085!3m4!1m2!1d10.6054443!2d44.6323887!3s0x47800316cd4433e9:0xfe239e991a72aeal!1m10!1m1!1s0x4780057160114b5b:0xbc46c043a73c18dc!2m2!1d10.4963511!2d44.633876!3m4!1m2!1d10.4141849!2d44.7163939!3s0x478013d410d027ff:0x4a1b7fdb68b236d7!1m5!1m1!1s0x47806cad9ddfb7bd:0x50fe174ed7bf5cf3!2m2!1d10.3315532!2d44.7413261!1m5!1m1!1s0x47803a31cba09f73:0x18f4fcd451357c32!2m2!1d10.5229153!2d44.9286236!1m5!1m1!1s0x477f718c31f293c9:0x239347843a606070!2m2!1d11.1526237!2d45.1806521!1m5!1m1!1s0x47</a></p></div><div data-bbox=)

6f77a6ea402051:0x1053af90bc0daa22!2m2!1d15.6458812!2d46.5546503!3e0 (Pristupljeno: srpanj 2020.)

[24]

[\[25\]](https://www.google.hr/maps/dir/2000+Maribor,+Slovenija/37058+Sanguinetto,+Verona,+Italija/46019+Viadana,+Province+of+Mantua,+Italija/43124+Alberi,+Province+of+Parma,+Italija/Roncolo/42124/41100+Modena,+Province+of+Modena,+Italija/Maribor,+Slovenija/@44.9410009,9.9295665,8.71z/data=!4m75!4m74!1m5!1m1!1s0x476f77a6ea402051:0x1053af90bc0daa22!2m2!1d15.6458812!2d46.5546503!1m5!1m1!1s0x477f718c31f293c9:0x239347843a606070!2m2!1d11.1526237!2d45.1806521!1m5!1m1!1s0x47803a31cba09f73:0x18f4fcd451357c32!2m2!1d10.5229153!2d44.9286236!3m4!1m2!1d10.4518642!2d44.9147634!3s0x4780391890653577:0x7066e03916118774!3m4!1m2!1d10.3174053!2d44.8085984!3s0x47806af158ee92b3:0x4aee1a1ae9e4fc9d!1m20!1m1!1s0x47806cad9ddfb7bd:0x50fe174ed7bf5cf3!2m2!1d10.3315532!2d44.7413261!3m4!1m2!1d10.32681!2d44.6728647!3s0x47800d5b170a2633:0x6854a3406a8a7f43!3m4!1m2!1d10.3153364!2d44.6765469!3s0x47800d53d9847ce9:0xac1e1c33478d218e!3m4!1m2!1d10.3443882!2d44.6656306!3s0x47800d73d3ed6c37:0x9d5af6701b4cc44e!1m5!1m1!1s0x4780057160114b5b:0xbc46c043a73c18dc!2m2!1d10.4963511!2d44.6338761!1m5!1m1!1s0x47801bd812c80d55:0x1c079b0f57e4cc20!2m2!1d10.6025844!2d44.7404085!1m5!1m1!1s0x477fef73b4c0a2df:0x7d76f6a0afb61e0e!2m2!1d10.9146862!2d44.6419048!1m5!1m1!1s0x476f77a6ea402051:0x1053af90bc0daa22!2m2!1d15.6458812!2d46.5546503!3e0 (Pristupljeno: srpanj 2020.)</a></p></div><div data-bbox=)

[54](https://www.google.hr/maps/dir/2000+Maribor,+Slovenija/25010+Pozzolengo,+Brescia,+Italija/Lentigione/San+Polo+d'Enza/Spilamberto/Bazzano/Poggio+Piccolo/Mirandola/Maribor,+Slovenija/@45.0709906,10.7979057,9.5z/data=!4m66!4m65!1m5!1m1!1s0x476f77a6ea402051:0x1053af90bc0daa22!2m2!1d15.6458812!2d46.5546503!1m10!1m1!1s0x4781c1d450e5a4ef:0xd72b18c176c75356!2m2!1d10.6294482!2d45.4036477!3m4!1m2!1d10.630167!2d45.0961687!3s0x478032b7ac067a39:0x33fd79c1ad0ea087!1m5!1m1!1s0x47803e9ddc76e533:0xafe1e0afefaa5d3d!2m2!1d10.471285!2d44.8663499!1m5!1m1!1s0x47800efb48815c19:0x10ac99ab18c0c4d6!2m2!1d10.4221368!2d44.6258625!1m5!1m1!1s0x477fde0ff7e1077b:0xfe69250c4824b281!2m2!1d11.0204491!2d44.5318187!1m5!1m1!1s0x477fded3d446f15f:0x28687857e6d5300d!2m2!1d11.0799504!2d44.5043141!1m10!1m1!1s0x477e2724c302deb5:0x348d7a0148bbdbf1!2m2!1d11.61</a></p></div><div data-bbox=)

35085!2d44.4377825!3m4!1m2!1d11.1415833!2d44.8563285!3s0x477fbd8fc0a8801f:0xac27b80c2f8c847e!1m5!1m1!1s0x477f973d408e594d:0x1d22dd5f90ce6581!2m2!1d11.0632969!2d44.8863605!1m5!1m1!1s0x476f77a6ea402051:0x1053af90bc0daa22!2m2!1d15.6458812!2d46.5546503!3e0 (Pristupljeno: srpanj 2020.)

[26]

[55](https://www.google.hr/maps/dir/2000+Maribor,+Slovenija/Pozzolengo,+25010+Brescia,+Italija/Lentigione/San+Polo+d'Enza/Spilamberto/Bazzano/Poggio+Piccolo/Mirandola/Maribor,+Slovenija/@44.8058481,10.2668852,10.04z/data=!4m71!4m70!1m5!1m1!1s0x476f77a6ea402051:0x1053af90bc0daa22!2m2!1d15.6458812!2d46.5546503!1m5!1m1!1s0x4781c1d661f2af5f:0x4c747c443b7ad166!2m2!1d10.6294478!2d45.4036477!1m10!1m1!1s0x47803e9ddc76e533:0xafefaa5d3d!2m2!1d10.471285!2d44.8663499!3m4!1m2!1d10.4574143!2d44.7593052!3s0x478016c09d85a3c5:0xe76a5867feac3b5f!1m10!1m1!1s0x47800efb48815c19:0x10ac99ab18c0c4d6!2m2!1d10.4221368!2d44.6258625!3m4!1m2!1d10.5829846!2d44.7396891!3s0x4780196441fc694d:0x548cc70c0501d13a!1m5!1m1!1s0x477fde0ff7e1077b:0xfe69250c4824b281!2m2!1d11.0204491!2d44.5318187!1m5!1m1!1s0x477fded3d446f15f:0x28687857e6d5300d!2m2!1d11.0799504!2d44.5043141!1m10!1m1!1s0x477e2724c302deb5:0x348d7a0148bbdbf1!2m2!1d11.6135085!2d44.4377825!3m4!1m2!1d11.0745273!2d44.8486253!3s0x477f968932be50b5:0xa17bfe49961750b0!1m5!1m1!1s0x477f973d408e594d:0x1d22dd5f90ce6581!2m2!1d11.0632969!2d44.8863605!1m5!1m1!1s0x476f77a6ea402051:0x1053af90bc0daa22!2m2!1d15.6458812!2d46.5546503!3e0 (Pristupljeno: srpanj 2020.)</a></p></div><div data-bbox=)

## POPIS SLIKA

Slika 1. Dijagram općeg pristupa optimizaciji transportnog procesa .....	3
Slika 2. Tradicionalni način transporta .....	6
Slika 3. Suvremeni način transporta .....	7
Slika 4 Indeks logističkih performansi u Hrvatskoj.....	11
Slika 5. Primjer principa Clark-Wright-ovog algoritma ušteda.....	14
Slika 6. Prikaz rute 1 dobivene pomoću Clark-wright-ovog algoritma ušteda.....	25
Slika 7. Prikaz rute 1 dobivene pomoću metode najbližeg susjeda .....	33
Slika 8. Prikaz rute 2 dobivene pomoću Clark-Wright-ovog algoritma ušteda.....	37
Slika 9. Prikaz rute 2 dobivene pomoću metode najbližeg susjeda .....	41
Slika 10. Prikaz rute 3 dobivene pomoću Clark-Wright-ovog algoritma ušteda.....	44
Slika 11. Prikaz rute 3 dobivene pomoću metode najbližeg susjeda .....	47

## POPIS TABLICA

Tablica 1. Podaci o ruti vozila 1 .....	21
Tablica 2. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila 1 .....	21
Tablica 3. Uštede za vozilo 1 prema redoslijedu vrhova .....	23
Tablica 4. Uštede za vozilo 1 rangirane prema količini uštede .....	23
Tablica 5. Prikaz matrice ušteda rute vozila 1 dobivene Clark-Wright-ovim algoritmom s indikatorom T.....	26
Tablica 6. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1 pomoću Clark-Wright-ove metode s indikatorom T .....	26
Tablica 7. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1 pomoću Clark-Wright-ove metode s indikatorom T .....	27
Tablica 8. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1 pomoću Clark-Wright-ove metode s indikatorom T .....	27
Tablica 9. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1 pomoću Clark-Wright-ove metode s indikatorom T .....	28
Tablica 10. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1 pomoću Clark-Wright-ove metode s indikatorom T .....	29
Tablica 11. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1 pomoću Clark-Wright-ove metode s indikatorom T .....	30
Tablica 12. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1 pomoću metode najbližeg susjeda .....	31
Tablica 13. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1 pomoću metode najbližeg susjeda .....	31
Tablica 14. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1 pomoću metode najbližeg susjeda .....	32
Tablica 15. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1 pomoću metode najbližeg susjeda .....	32
Tablica 16. Kompletirani matrični prikaz optimizirane rute metodom najbližeg susjeda.....	33
Tablica 17. Podaci o ruti vozila 2 .....	34
Tablica 18. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila 2 .....	34
Tablica 19. Uštede za vozilo 2 prema redoslijedu vrhova .....	35
Tablica 20. Uštede za vozilo 2 rangirane prema količini uštede .....	35

Tablica 21. Prikaz matrice ušteda rute vozila 2 dobivene Clark-Wright-ovim algoritmom s indikatorom T.....	38
Tablica 22. Matrični prikaz izračuna rute vozila 2 pomoću Clark-Wright-ove metode s indikatorom T .....	39
Tablica 23. Matrični prikaz izračuna rute vozila 2 pomoću metode najbližeg susjeda .....	40
Tablica 24. Podaci o ruti vozila 2 .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
Tablica 25. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila 3 .....	42
Tablica 26. Uštede za vozilo 3 prema redoslijedu vrhova .....	42
Tablica 27. Uštede za vozilo 3 rangirane prema količini uštede .....	43
Tablica 28. Prikaz matrice ušteda rute vozila 3 dobivene Clark-Wright-ovim algoritmom s indikatorom T.....	45
Tablica 29. Matrični prikaz izračuna rute vozila 3 pomoću Clark-Wright-ove metode s indikatorom T .....	46
Tablica 30. Matrični prikaz izračuna rute vozila 3 pomoću metode najbližeg susjeda .....	47
Tablica 31. Prikaz dobivenih rješenja koristeći matematičke modele .....	48



## **POPIS GRAFIKONA**

Grafikon 1. Prikaz Logističkih troškova.....	9
Grafikon 2. Odnos dobivenih rješenja na temelju matematičkih metoda.....	49



Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet prometnih  
znanosti  
10000 Zagreb  
Vukelićeva 4

## IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI I SUGLASNOST

Izjavljujem i svojim potpisom potvrđujem kako je ovaj \_\_\_\_\_ diplomski rad isključivo rezultat mog vlastitog rada koji se temelji na mojim istraživanjima i oslanja se na objavljenu literaturu što pokazuju korištene bilješke i bibliografija.

Izjavljujem kako nijedan dio rada nije napisan na nedozvoljen način, niti je prepisan iz necitiranog rada, te nijedan dio rada ne krši bilo čija autorska prava.

Izjavljujem također, kako nijedan dio rada nije iskorišten za bilo koji drugi rad u bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili obrazovnoj ustanovi.

Svojim potpisom potvrđujem i dajem suglasnost za javnu objavu \_\_\_\_\_ diplomskog rada pod naslovom **Mogućnosti optimizacije ruta u prijevoznjoj logistici**

na internetskim stranicama i repozitoriju Fakulteta prometnih znanosti, Digitalnom akademskom repozitoriju (DAR) pri Nacionalnoj i sveučilišnoj knjižnici u Zagrebu.

Student/ica:

U Zagrebu, \_\_\_\_\_ 20.8.2020 \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
(potpis)