Određivanje prijevoznih ruta primjenom teorije igara

Ilak, Anto

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET PROMETNIH ZNANOSTI

Anto Ilak

ODREĐIVANJE PRIJEVOZNIH RUTA PRIMJENOM TEORIJE IGARA

DIPLOMSKI RAD

Zagreb, 2019.

Sveučilište u Zagrebu

Fakultet prometnih znanosti

DIPLOMSKI RAD

ODREĐIVANJE PRIJEVOZNIH RUTA PRIMJENOM TEORIJE IGARA

DETERMINATION OF THE TRANSPORT ROUTES USING GAME THEORY

Mentor: prof. dr. sc. Jasmina Pašagić Škrinjar

Student: Anto Ilak

JMBAG:0135234209

Zagreb, rujan 2019.

SAŽETAK:

Određivanje prijevoznih ruta predstavlja jedan od mnogih zadataka s kojima se svakodnevno suočavaju brojni prijevoznici. Zbog važnosti i kompleksnosti problema razvijene su razne intuitivne i matematičke metode i programski alati za određivanje prijevoznih ruta. Te metode i alati najčešće određuju rute po kriterijima udaljenosti, vremena i troškova prijevoza, no zanemaruju mogući utjecaj drugih prijevoznika i sudionika prometnog sustava na korisnika. Veći broj korisnika istog prometnog sustava stvara zagušenje na pojedinim dijelovima sustava. Zagušenje se može razmatrati kao konfliktna situacija između korisnika sustava u kojoj zadržavanje korisnika jednog dijela sustava ovisi o broju korisnika tog istog dijela sustava, a takvim tipom konfliktnih situacija se bavi grana teorije igara pod nazivom igre zagušenja. U radu će biti prikazan način korištenja koncepta igara zagušenja u svrhu određivanja optimalnih prijevoznih ruta.

KLJUČNE RIJEČI: teorija igara, igra zagušenja, Nashova ravnoteža

SUMMARY:

Determining transportation routes is one of many tasks that many carriers face on a daily basis. Due to the importance and complexity of the problem, various intuitive and mathematical methods and software tools have been developed to determine transportation routes. These methods and tools most often determine routes based on the criteria of distance, time and cost of transportation, but neglect the possible influence of other carriers and transport system participants on the user. Multiple users of the same traffic system create congestion on certain parts of the system. Congestion can be seen as a conflicting situation between system users where the delay of users of one part of the system depends on the number of users of that same part of the system, and this type of conflict situation is addressed by a branch of game theory called congestion games. This thesis will outline how to use the congestion game concept to determine optimal transportation routes.

KEY WORDS: game theory, congestion game, Nash equilibrium

SADRŽAJ

1. UVOD

Suvremeni gospodarski sustavi postavljaju nove uvjete poslovanja u poduzećima s namjerom da se ostvari što veći profit. Povećanje profita se ostvaruje na dva načina, povećanjem prihoda i/ili smanjenjem rashoda. Zbog globalizacije i naglog povećanja konkurencije povećanje prihoda predstavlja teško ostvariv zadatak, stoga se poduzeća okreću ka smanjenju rashoda kao primarnom zadatku.

Logistika predstavlja značajan faktor u globalnoj ekonomiji te poduzeća diljem svijeta primjenom logističkih načela i metoda uvelike smanjuju svoje troškove poslovanja, što u konačnici predstavlja povećanje njihovog profita. Prema raznim istraživanjima provedenim na teritoriju zapadne Europe, udio logističkih troškova u ukupnim troškovima poslovanja poduzeća u prosjeku iznosi 10 do 25%. Stoga je smanjenje troškova logistike predmet mnogih istraživanja posljednjih godina.

Troškovi distribucije i transporta iznose i do 60% ukupnih logističkih troškova. Zbog tako velikog udjela u ukupnim logističkim troškovima, smanjenje troškova distribucije i transporta je ključ optimizacije troškova logistike.

Pravilan odabir rute kojom će se vršiti prijevoz robe pozitivno utječe na smanjenje troškova distribucije i transporta, a time i na ukupne logističke troškove. Brojne su metode razvijene u svrhu odabira najbolje rute za prijevoz i svakodnevno se koriste od strane velikog broja prijevoznih tvrtki, no one obično ne uzimaju u obzir konfliktnu situaciju nastalu zagušenjem rute.

Konfliktne situacije su područje rada teorije igara, grane primijenjene matematike koja se bavi proučavanjem situacija u kojima uspjeh jednog subjekta ovisi o odlukama drugih subjekata. Korištenje principa teorije igara omogućuje pronalazak optimalnog rješenja u svim međuovisnim poslovnim situacijama.

Konfliktne situacije nastale zagušenjem prijevozne rute izučava posebna grana teorije igara nazvana *igre zagušenja*. Igre zagušenja korisniku daju mogućnost pronalaska za njega najbolje rute u situaciji kada u istoj prometnoj mreži djeluju i drugi korisnici te svojim djelovanjem utječu na njega.

Rad je podijeljen u pet cjelina:

1. Uvod
2. Teorija igara
3. Igra zagušenja
4. Primjer korištenja igre zagušenja
5. Zaključak.

U drugom poglavlju rada definirani su osnovni pojmovi teorije igara i njezina podjela, nakon čega se u trećem poglavlju opisuju elementi igara zagušenja i način pronalaska rješenja u njima, kao i gubitci koji nastaju zbog samostalnog ili nekoordiniranog djelovanja igrača. U četvrtom poglavlju rada prikazani su principi pronalaska optimalnih ruta u igrama zagušenja na primjeru iz svijeta.

2. TEORIJA IGARA

Teorija igara predstavlja matematičku teoriju koja se bavi racionalnim odlučivanjem u konfliktnim i djelomično konfliktnim uvjetima, kada međusobna povezanost akcija dvaju ili više sudionika determinira sve individualne rezultate. [1]

Jednostavna i najčešće korištena definicija teorije igara glasi: „Teorija igara je znanost o strateškom interaktivnom donošenju odluka." [2]

U teoriji igara posljedice odluka ovise o interakciji s odlukama koje donosi druga ili druge strane, te ako te situacije karakteriziraju suprotstavljene interese sudionika u odlučivanju, kažemo da su strane koje donose odluke u konfliktu. Na primjer, dvije logističke tvrtke koje djeluju na istom zatvorenom tržištu i žele dobiti što više klijenata te time povećati svoju dobit su u konfliktu zbog toga što se povećanjem broja klijenata jedne tvrtke smanjuje broj klijenata druge.

Ovakvi slučajevi neizvjesnosti u odlučivanju mogu se prikazati *igrom*, a znanstvena disciplina koja se bavi analizom takvih problema i nalaženjem optimalnih rješenja se naziva *teorija igara*. Aktivnosti jednog subjekta imaju povratni utjecaj na odluke ostalih subjekata, pa konačni rezultati koji svatko od njih postiže predstavlja rezultat brojnih individualnih odluka i njihovih interakcija. Ponekad se ovi utjecaji zasnivaju na suglasnim interesima ili dobroj volji, dok u drugim slučajevima proistječu iz konfliktnih interesa ili pak neprijateljstva. Situacije djelomičnog ili potpunog konflikta između različitih donositelja odluke analiziraju se u okviru teorije igara.

Igrom se opisuje konfliktna situacija između dva ili više sudionika u kojoj svaki sudionik utječe djelomično, ali ne i potpuno na ishod igre. Igre koje koristi poslovni svijet opisuju se matematičkom simbolikom i matematičkim metodama. Igre su važan dio znanosti i predmet su raznih istraživanja, a u posljednje vrijeme se koriste i kao alat za potrebe transportnog i logističkog odlučivanja.

Teorija igara ne analizira konkretne realne situacije koje imaju konfliktni karakter, već matematičke modele tih situacija. Zato se kaže da je teorija igara matematička teorija konfliktnih situacija. Teorijom igara mogu se analizirati problemi konkurentskih situacija koji su prisutni, između ostalog, i u prometu i logistici. Teorija igara je važna tehnika u procesu odlučivanja, odnosno donošenja poslovnih odluka. [1]

Interesi jednog poslovnog subjekta ili skupine pojedinih subjekata u gospodarstvu se često sukobljavaju s interesima drugog poslovnog subjekta ili skupine poslovnih subjekata. To je tipično za situaciju gdje vlada konkurencija ili natjecanje. Svaki subjekt za cilj ima postići optimalno rješenje za sebe, no to je moguće samo na račun drugih poslovnih subjekata. Primjeri takvih sukoba interesa su mnogobrojni. Na primjer, pri prodaji proizvoda ili usluga, proizvođači nastoje postići što veću dobit, dok potrošači nastoje kupovati proizvode ili usluge po što nižoj cijeni. Kada je potražnja za proizvodima ili uslugama manja od ponude, svaki poslovni subjekt nastoji privući što više potrošača, a to je moguće samo na račun konkurencije.

Kada se matematičkim modelima istražuju konfliktne situacije, potrebno je obaviti predradnje, tj. potrebno je odrediti parametre koji trebaju biti mjerljivi. Pridruživanje matematičkih vrijednosti kvalitativnim podacima utječe na krajnji rezultat. Također, za svaki parametar potrebno je odrediti intervale vrijednosti koji su značajni za dani problem. Istraživač, sam ili uz pomoć stručnjaka iz područja matematike, definira matematički model za događaje i procese koje želi istražiti. [1]

Teorija igara pri rješavanju određenih problema zahtijeva definiranje pravila koja vrijede za obje strane u konfliktu. Glavna pravila teorije igara su:

- svaki sudionik ili igrač želi postići određeni cilj, odnosno ostvariti što veću korist za sebe. Strane su u konfliktu, stoga oba sudionika ne mogu istovremeno postići svoj cilj,
- svi sudionici se moraju pridržavati zadanih pravila. (npr. u vojnim sukobima obje strane se moraju pridržavati međunarodnih dogovora kao što su zabrana korištenja bojnih otrova ili ubijanja zarobljenika),
- sve sukobljene strane alternative biraju razumno, odnosno na način da im izbor osigurava najveći dobitak, odnosno najmanji gubitak. [1]

Očekivana korist koju sudionik želi ostvariti određenim aktivnostima se određuje raznim procjenama. Kod stvarnih konfliktnih situacija očekivanu korist je vrlo teško predvidjeti.

Neka od osnovnih pitanja koja se postavljaju pri primjeni teorije igara u rješavanju određenih problema su:

- Kako izabrati najbolju strategiju kad ishod ovisi o strategijama koje biraju protivnici ili su informacije nepouzdane?

- Donosi li sudionik igre racionalne odluke?
- Kada igra dozvoljava dobitak za sve igrače, da li surađivanje sa drugim igračima predstavlja bolje rješenje od samostalnog djelovanja?
- Kakvo je realno ponašanje igrača u odnosu na model koji nudi teorija igara?

Koncept racionalnog pojedinca koji bira strategiju tako da maksimizira očekivanu korist je procjena realnog ponašanja ljudskih bića. Međutim, ponašanje pojedinaca je često iracionalno i ovisi o psihološkim karakteristikama osobe. I dalje, ova procjena se pokazuje dovoljno dobrom za objašnjenje prosječne reakcije pojedinca prilikom donošenja određenih odluka.

Teorija igara bavi se poslovnim ponašanjem, tj. strategijama u slučajima kada se dva ili više subjekata nalaze u konfliktnim okolnostima iz kojih žele ostvariti, svatko za sebe, što povoljniji rezultat. Svaka tvrtka u postupku definiranja svojih planova prodaje mora voditi računa o potencijalnim potezima konkurentskih tvrtki, koje u svom tržišnom nastupu žele ostvariti što povoljniji rezultat (veću dobit). U poslovnom odlučivanju svaka tvrtka u uvjetima razvijenog tržišnog gospodarstva vodi računa o potencijalnom ponašanju ekonomskih subjekata (tržišta, banke, konkurentskih tvrtki, potrošača, itd.) s kojima se tvrtka nalazi u odnosima izraženog sukoba interesa. Nijedan od ekonomskih subjekata ne može u potpunosti kontrolirati rezultate svojih odluka zato što i suprotstavljena strana odlučuje u uvjetima nepoznavanja odluka „protivnika". [1]

2.1. Pojam igre

Igra je znanstvena metafora za skup interakcija u kojima ishod interakcija ovisi o strategijama dvaju ili više strana s konfliktnim interesima.

Svaka igra prikazuje sukob interesa gdje svaki sudionik igre bira strategiju s najvećom vrijednosti isplate igre. Svaki sudionik igre pretpostavlja da će i protivnik izabrati strategiju koja njemu donosi najveću vrijednost isplate. Ta pretpostavka predstavlja osnovni aksiom racionalnog ponašanja igrača i njihovog izbora pojedinih strategija.

Igra predstavlja model realne konfliktne situacije s pravilima koja definiraju ponašanje igrača. Odnosno, igra je *skup pravila i dogovora (konvencija) po kojima se moraju ravnati igrači*. Pravila utvrđuju:

- akcije koje igrači mogu birati,
- informacije dostupne svakom od igrača te
- isplate po završetku igre. [1]

Za vrijeme igre, igrači iz skupa opcija biraju opciju koju smatraju najboljom. Čin odabira se zove *izbor*, a etapa igre u kojoj se obavlja izbor naziva se *potez* ili *stanje igre*.

Formalno, svaka igra mora sadržavati tri ključna sastojka, a to su igrači, strategije i isplate. Konačna igra se označava s Γ i uređena je trojka konačnog skupa igrača, konačnog skupa strategija te funkcija isplata:

1. Skup igrača $N = 1, \dots, n$.
2. Konačan skup strategija $S_i = s_1, \dots, s_m,\ i \in N$. Skup $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ je skup svih mogućih kombinacija strategija.
3. Funkcija isplate $u_i : S \to \mathbb{R},\ i \in N$, predstavlja isplate $u_i(s_1, \dots, s_n)$ igrača i s obzirom na kombinaciju strategija svih igrača u igri. [3]

Igrači su autonomni donositelji odluka, odnosno sudionici u igri i predstavljaju osnovne sastavne dijelove svake igre. Igrači mogu biti pojedinci, skupine, organizacije ili pak sama priroda. najmanji broj igrača u igri je dva, a ukupni broj može biti puno veći, no mora biti konačan i poznat.

Strategija u teoriji igara ne predstavlja opći pristup igri, nego specifičan tijek akcija. Strategija u kontekstu teorije igara znači unaprijed definirani sup odabira za svaku moguću okolnost koja se može pojaviti. Strategija je skup izbora koje igrači imaju na raspolaganju za vrijeme igre.

U igri, svakom igraču se pridružuje numerička ljestvica koja se koristi pri usporedbi svih logički mogućih ishoda igre koji odgovaraju svakoj raspoloživoj kombinaciji izbora strategija svih igrača. Brojka pridružena svakom mogućem ishodu naziva se **isplatom** igrača za taj ishod. [4]

Prema karakteru vrijednosti igara, igre se dijele na igre s nultom sumom i igre s nenultom sumom. Kada je ukupan dobitak jednog ili više igrača jednak ukupnom gubitku ostalih igrača, tada je riječ o igri nulte sume. Kada zbroj dobitaka i gubitaka svih igrača nije jednak nuli, tada je riječ o igri nenulte sume.

Isplate igre s dva igrača najčešće se prikazuju matrično. U slučaju kada dva igrača sudjeluju u igri s nultom sumom, u matrici isplata dovoljno je prikazati isplate jednog od igrača, a isplate drugog su jednake suprotnim vrijednostima isplate prvog igrača. U slučaju kada dva igrača sudjeluju u igri s nenultom sumom, u matrici isplata isplate su prikazane u bimatričnoj formi.

Neki od faktora koji utječu na igru su:

- broj igrača,
- trajanje igre,
- broj mogućih strategija,
- pravila igre,
- neizvjesnost,
- raspoloživost informacija,
- optimalna strategija i sl. [1]

Broj igrača

Gledajući broj igrača koji sudjeluju u igri, igra može biti s dva ili više igrača. Primjeri igara s dva igrača mogu biti bilateralni pregovori ili sklapanje kupoprodajnih ugovora, a primjeri igara s više igrača mogu biti aukcije, tenderi, ili pak odlučivanje u parlamentu.

Postojanje tri ili više igrača stvara mogućnost sklapanja koalicija između igrača, odnosno usklađivanja interesa nekoliko igrača. Igrači u koaliciji se koordinirano opredjeljuju u izboru strategija.

Najistraženija igra je igra dva igrača s „nultom sumom“. Igra nulte sume znači da je dobitak jednog igrača jednak gubitku drugog, pa je ukupan zbroj jednak nuli.

Trajanje igre

Prema broju pojedinačnih poteza, pri čemu jedan potez predstavlja jedan izbor igrača, igre se dijele na igre s konačnim i igre s beskonačnim brojem poteza. Igre uglavnom imaju veći broj naizmjeničnih poteza, a igre s beskonačnim brojem poteza se također pojavljuju.

Broj mogućih strategija

Pojam strategije pripada osnovnim pojmovima teorije igara. Strategija predstavlja skup uputa za igrača koje sadrže instrukcije o akcijama koje igrač može vršiti za vrijeme igre. Drugim riječima, strategija predstavlja pravila ponašanja igrača i potencijalne rezultate izbora pojedinih alternativa u svim mogućim situacijama. Ovisno o broju mogućih strategija, igre se dijele na konačne i beskonačne. Igra je konačna ako svaki igrač ima konačan broj strategija, a beskonačna ako je broj strategija beskonačan.

Koncepti ’strategije’ i ’poteza’ nisu isti. Dok ’potez’ znači aktivnost koju igrač poduzima igrajući igru, ’strategija’ podrazumijeva igračevo razmišljanje, tj. algoritam igranja igre na osnovu kojega igrač povlači poteze.

Pravila igre

U šahu, kartaškim igrama, sportskim igrama i sl. pravila su jasno postavljena i strogo definirana, dok su u različitim vrstama pregovora ona samo grubo postavljena. U različitim konfliktima pravila često nisu jasno postavljena.

Teorija igara se može baviti samo problemima koji imaju jasno definirana pravila.

Neizvjesnost

U slučaju da na rezultate igre utječu slučajni čimbenici, odnosno da postoji određena neizvjesnost, onda je riječ o igrama na sreću. U tom slučaju neophodno je uključiti faktor slučajnosti u analizu. Politička nestabilnost u okruženju, vremenske nepogode i percepcija neki su od nepredvidivih čimbenika koji mogu utjecati na tijek igre, te s tim i na njen rezultat.

Tri su glavna uzroka nastanka neizvjesnosti:

1. Pravila igre dopuštaju velik broj varijanti njenog odvijanja, što onemogućuje precizno predviđanje rezultata. Ovu vrstu izvora neizvjesnosti nazivamo kombinacijskom, a igra se naziva kombinacijska igra.
2. Pojava slučajnih čimbenika. Igre kod kojih su slučajni čimbenici dominantni uzrok neizvjesnosti nazivaju se hazardnim.
3. Nedostatak informacija o strategiji protivnika.

Raspoloživost informacija

Prema karakteru i opsegu informacija kojima igrači raspolažu pri odabiru strategija, igre se mogu podijeliti na igre s potpunom i igre s nepotpunom informacijom. U igri s potpunom informacijom svaki igrač pri svakom potezu raspolaže s informacijama o ranije učinjenim potezima i o stanju igre u danom momentu.

Većina igara koje opisuju realne konfliktne situacije su igre s nepotpunom informacijom, tako da je neraspoloživost informacija o budućim akcijama protivnika važan element realne konfliktne situacije.

U igrama s nepotpunom informacijom kod igrača se pojavljuje nesigurnost. Postoje dvije vrste nesigurnosti, eksterna nesigurnost i strateška nesigurnost. Eksterna nesigurnost može biti uzrokovana nedostatkom informacija o planovima konkurentne tvrtke, ili pak kvaliteti proizvoda koji se želi kupiti. Strateška nesigurnost je uzrokovana nedostatkom informacija o prethodnim ili trenutnim potezima drugih igrača.

Pokušaj igrača da prikrije ili otkrije svoje informacije je bitan dio strategije igrača. Selektivna objava informacija jedna je od osnovnih strategija igrača, a predstavlja otkrivanje određenih informacija koje sugeriraju protivnika na djelovanje koje zapravo doprinosi igraču koji je otkrio informacije, dok se ostale informacije, koje bi mogle nanijeti štetu igraču, pokušavaju sakriti.

No, prema aksiomu teorije igara, igrači su racionalni i pretpostavljaju da su i drugi igrači također racionalni, stoga su sposobni prepoznati motivaciju protivnika za skrivanjem informacija. Racionalni igrači ne prihvaćaju neutemeljene izjave protivnika, nego samo objektivne dokaze.

Optimalna strategija

Pri izboru strategije pretpostavlja se racionalan protivnik koji nije sklon riziku. Igrač bira svoje ponašanje tako da mu dobitak u igri bude maksimalan uz, za njega, najnepovoljnije djelovanje protivnika. [1]

Cilj teorije igara je analiziranje konfliktne situacije i određivanje racionalne strategije za svakog igrača egzaktnim matematičkim alatom ili heurističkim metodama.

Optimalna strategija igrača predstavlja strategiju koja, nakon višestrukog ponavljanja igre, igraču donosi maksimalan očekivani dobitak, odnosno minimalan očekivani gubitak.

2.2. Klasifikacija igara

Igre koje teorija igara analizira se dijele na mnogo načina. Osnovne podjele igara su podjele na:

- igre s nultom sumom i igre s promjenjivom (nenultom) sumom,
- sekvencijalne i simultane igre,
- kooperativne i nekooperativne igre te
- igre sa savršenim informacijama i igre s nesavršenim informacijama.

Igre s nultom sumom i igre s nenultom sumom

Guillermo (1995) je postavio definiciju igre nulte sume kao one u kojoj svaka kombinacija strategija ima za rezultat nulu. Iz tog razloga dovoljno je navesti samo dobitke, odnosno gubitke prvog igrača, iz čega se mogu ustanoviti dobitci ili gubitci drugog igrača. Ako u igri sudjeluje više od dva igrača, igra je nulte samo ako je zbroj dobitaka i gubitaka svih igrača jednak nuli.

Igre dva igrača s nultom sumom nazivaju se antagonističkim igrama. Normalna forma konačne antagonističke igre opisuje se matricom P s brojem redaka jednakom broju akcija (izbora) prvog igrača i s brojem stupaca jednakom broju akcija (izbora) drugog igrača. Ako prvi igrač odabere i-tu akciju, a drugi igrač odabere j-tu akciju, dobitak (gubitak) je za prvog igrača definiran elementom matrice a_{ij}, koji se nalazi u i-tom retku i j-tom stupcu matrice P, a dobitak (gubitak) drugog igrača iznosi $-a_{ij}$ [1]

U igrama s nultom sumom sudionici imaju strogo konfliktne interese, odnosno ne postoji mogućnost kooperacije između igrača.

U tablici 1 je prikazana matrica isplate u primjeru igre s nultom sumom.

Tablica 1: Primjer igre s nultom sumom

	B_1	B_2
A_1	3	-1
A_2	0	1

Redci odgovaraju strategijama prvog igrača, stupci strategijama drugog igrača, a brojevi unutar tablice isplatu prvog igrača za sve četiri moguće kombinacije. Pozitivan broj znači da prvi igrač dobiva odgovarajući iznos, a negativan da ga gubi. Tako na primjer, ukoliko igrač A odabere strategiju A_1 a igrač B strategiju B_1, isplata igrača A je a_{11} i ima vrijednost 3. Isplata igrača B jednaka je $-a_{11}$, odnosno -3.

Tipičan primjer igre s nultom sumom je igra pokera, u kojoj je ukupna suma dobitaka i gubitaka jednaka nuli. Još neki primjeri mogu biti igra šaha ili pak igra oglašavanja u zatvorenom tržištu, gdje broj klijenata koje tvrtka privuče predstavlja broj izgubljenih klijenata drugih tvrtki.

Igra s nenultom sumom je svaka igra u kojoj je zbroj dobitaka i gubitaka svih sudionika igre različit od nule. Ako u igri s nenultom sumom sudjeluju dva igrača, tada se igra može prikazati u bimatričnoj formi. Zbog toga se igre s nenultom sumom u kojima sudjeluju dva igrača nazivaju *bimatrične igre*.

Bimatrične igre se također prikazuju matricom isplate P s brojem redaka jednakom broju akcija (izbora) prvog igrača i s brojem stupaca jednakom broju akcija (izbora) drugog igrača. Razlika u odnosu na matricu isplate igre s nultom sumom je u tome što dobitak jednog igrača nije jednak gubitku drugog, te se zbog toga u matricu upisuju dobitci, odnosno gubitci oba igrača.

U igrama s nenultom sumom interesi igrača nisu strogo konfliktni, nego su djelomično konfliktni, a djelomično suglasni. Stoga, ovisno o tome da li igrači komuniciraju i postoji li mogućnost dogovora, igre s nenultom sumom se mogu podijeliti na kooperativne i nekooperativne igre.

U tablici 2 je prikazana matrica isplate u primjeru igre s nenultom sumom.

Tablica 2: Primjer igre s nenultom sumom

	B_1	B_2
A_1	$(2,1)$	$(3,0)$
A_2	$(1,3)$	$(4,2)$

U ovoj situaciji u slučaju odabira strategije A_1 igrača A i strategije B_1 igrača B, isplata je $(2,1)$, odnosno dobitak igrača A iznosi 2, a dobitak igrača B iznosi 1.

Matrica isplate igre s nenultom predstavlja kombinaciju dviju matrica isplate, matrice isplate za igrača A i matrice isplate za igrača B, te je te matrice moguće odvojiti. U tablici 3 je prikazana matrica isplate prvog igrača iz primjera, igrača A, a u tablici 4 je prikazana matrica isplate drugog igrača, igrača B.

Tablica 3:Matrica isplate igrača A

	B_1	B_2
A_1	2	3
A_2	1	4

Tablica 4: Matrica isplate igrača B

	B_1	B_2
A_1	1	0
A_2	3	2

Primjer igre s nenultom sumom može biti igra lutrije u kojoj organizator zadržava dio ukupnog dobitka za sebe. Još neki primjeri ove vrste igara su pregovori o plaćama zaposlenih između menadžera i sindikata, kupoprodajni i drugi ugovori, predsjedničke kampanje više kandidata itd.

Sekvencijalne i simultane igre

Prema vrsti poteza razlikuju se dva tipa igara, sekvencijalne i simultane.

Kod sekvencijalnih igara igrači naizmjenično povlače poteze, odnosno igra se odvija na način da najprije jedan igrač povlači potez (donosi odluku – poduzima akciju), a potom drugi igrač promatra odluku prvog igrača prije nego što donese svoju. Ovisno o pojedinoj situaciji prednost za igrača može biti da on prvi povuče potez, a također u pojedinim situacijama prednost se može ostvariti ukoliko je njegov suparnik prethodno odigrao potez. Kao primjer sekvencijalne igre može se uzeti popularna igra "šah" ili igra "križić-kružić". Drugi naziv za sekvencijalne igre je *dinamičke igre*.

U slučaju simultanih igara, pretpostavka je da se donošenje odluka vrši istovremeno, odnosno da igrač donosi odluku bez znanja o odlukama njegovih suparnika koji sudjeluju u igri. Kod igara ovog tipa igrač nema informacije o tome koje korake poduzima protivnik, već on svoju strategiju temelji isključivo na onome što misli da bi protivnik mogao poduzeti. Ovakve igre se u većini slučajeva prikazuju u normalnom obliku tj. u matričnom obliku ili pomoću tablica. Primjer simultane igre je poznata dječja igra "par-nepar". Drugi naziv za simultane igre je *statičke igre*. [1]

Sekvencijalne i simultane igre zahtijevaju različite načine interaktivnih promišljanja, odnosno različite analitičke pristupe. [4]

Kooperativne igre i nekooperativne igre

Igre u kojima su sporazumi i dogovori provedivi i primjenjivi nazivaju se kooperativnim (koalicijskim) igrama. Igrači u kooperativnim igrama su u djelomičnom konfliktu ili uopće nisu u konfliktu.

Igre u kojima provedba sporazuma nije moguća i pojedinim sudionicima se mora dopustiti djelovanje u vlastitom interesu nazivaju se nekooperativnim (strateškim) igrama. Igrači u nekooperativnim igrama su u potpunom konfliktu i svoje odluke donose bez drugih igrača. [4]

Kooperativnost u igrama može rezultirati ostvarenjem mnogo veće dobiti za svakog igrača nego u situaciji kada bi djelovali samostalno. Više igrača se može udružiti i na taj način formirati koaliciju. Prije nego što se odluče na takav potez svaki od igrača će analizirati hoće li veću korist ostvariti ukoliko igra sam ili ukoliko igra zajedno s drugima. Prednost koalicije se ogleda u tome što igračima stoje na raspolaganju pojedine nove strategije koje ne bi mogli primijeniti ukoliko bi djelovali zasebno. Minimalan uvjet da igrač pristupi koaliciji je taj da unutar nje ostvari barem jednaku korist koju bi ostvario i kada bi igrao sam.

Do raspada koalicije može doći ukoliko pojedini članovi naruše prethodno postignuti dogovor, odnosno ukoliko se prekrše postavljena pravila koalicije.

Igre sa savršenim informacijama i igre s nesavršenim informacijama

Klasifikacija igara u ovisnosti o informacijama s kojima igrači raspolažu u igri se vrši u ovisnosti ima li svaki sudionik igre informaciju o najvažnijim elementima igre, odnosno zna li svaki igrač:

- tko su igrači u igri,
- koje strategije stoje na raspolaganju svakom igraču i
- koje su potencijalne isplate za sve igrače.

Ako svaki igrač zna odgovore na ova tri pitanja, u pitanju je igra s potpunom informacijom. Nasuprot tome, ukoliko jedan ili više igrača ne zna odgovor na neko od gore navedena tri pitanja, u pitanju je igra s nepotpunom informacijom.

2.3. Nashova ravnoteža

U slučaju kada postoje dva ili više igrača te svaki igrač zna strategiju koju ostali igrači igraju, ako bilo koji igrač želi promijeniti strategiju te pri promjeni igrač nije na dobitku, riječ je o Nashovoj ravnoteži. Dakle, ukoliko svaki igrač igra strategiju i nijedan igrač nema mogućnost ostvarivanja dobitka mijenjajući svoju strategiju, a da pritom ostale strategije ostaju nepromijenjene, igra je u stanju Nashove ravnoteže.

Nashova ravnoteža nastaje kao posljedica odabira najboljih strategija od strane svih strana u konfliktu, pri čemu svaki od konkurenata bira svoju najbolju strategiju vodeći računa da će konkurencija odgovoriti svojim najboljim strategijama. U Nashovoj ravnoteži nijedna strana u interakciji nema interesa odstupiti od svoje vlastite strategije ako se svi ostali pridržavaju svojih strategija.

Odabir strategija $(s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$ n igrača u nekoj igri Γ naziva se Nashova ravnoteža ako svaki igrač i odabire strategiju s_i^*, koja predstavlja njegov najbolji odgovor obzirom na odabir strategija ostalih igrača.

Teorija igara predstavlja Nashovu ravnotežu kao stabilan i predvidljiv ishod igre, no dinamika igara može biti vrlo kompleksa, te stoga nije uvijek primjenjiva u praksi, ali i dalje predstavlja dobru polaznu točku. [4]

Ravnoteža igre ne mora nužno biti najbolji ishod igre.

3. IGRA ZAGUŠENJA

Igra zagušenja je vrsta igara u teoriji igara koju je prvi predložio američki ekonomist Robert W. Rosenthal 1973. godine. U igri zagušenja definiraju se igrači i resursi, a isplata svakog igrača ovisi o resursima koje odabere i broju igrača koji odaberu isti resurs.

Igre zagušenja najčešće se prikazuju grafički, skupom vrhova koji su povezani bridovima. U prometu i logistici grafovi predstavljaju prometnu mrežu, gdje vrhovi predstavljaju mjesta proizvodnje, mjesta potrošnje, logističko-distribucijske centre, skladišta i slično, dok bridovi predstavljaju prometnice.

Prema teoriji grafova, grani matematike koja se bavi proučavanjem grafova, definicija grafa glasi:

„Graf je uređeni par $G = (V, E)$, gdje je $V = V(G)$ skup vrhova i $E = E(G)$ skup bridova pri čemu svaki brid $e \in E$ spaja dva vrha $u, v \in V$. Tada su vrhovi u i v susjedni i incidentni s e i piše se $e = u, v$.“ [5]

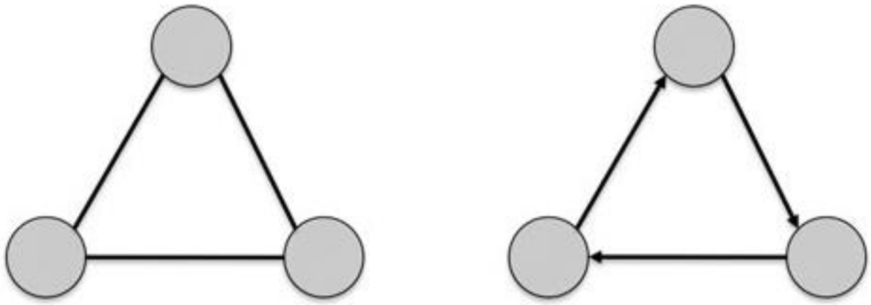
Ukoliko su skup bridova E i skup vrhova V grafa G konačni skupovi, tada je graf konačan, a u suprotnom graf je beskonačan. U nastavku rada promatrati će se samo konačni grafovi.

Za konačne grafove mogu se definirati sljedeći parametri:

- $v(G)$ = $|V(G)|$ = red od G = broj vrhova u G
- $e(G)$ = $|E(G)|$ = veličina od G = broj bridova u G

Brid čiji se krajevi podudaraju se naziva petlja. Dva ili više bridova s istim parom krajeva nazivamo višestrukim bridovima. Ukoliko graf nema niti petlju niti višestruke bridove, za njega kažemo da je jednostavan graf. Jednostavan graf u kojem je svaki par vrhova spojen bridom je potpuni graf. [6]

Bridovi u grafu mogu biti usmjereni ili neusmjereni. Graf kojemu su bridovi usmjereni zovemo usmjereni graf, u suprotnom zovemo ga neusmjereni. Primjer usmjerenog i neusmjerenog grafa prikazan je na slici 1:



Slika 1: Neusmjereni i usmjereni graf
Izvor: [6]

U prikazu prometne mreže grafom, usmjereni bridovi predstavljaju prometnice koje je moguće koristiti samo u smjeru strelice, dok neusmjereni bridovi predstavljaju prometnice koje je moguće koristiti u bilo kojem smjeru.

3.1. Elementi igre zagušenja

Igre zagušenja su definirane sljedećim elementima [7]:

- skup igrača – $N = 1, \ldots, n$,
- skup resursa – $R = 1, \ldots, m$,
- strategija igrača $i \in N - S_i$, gdje je svaka strategija $S_i \in \Sigma_i$ neprazni podskup skupa resursa R,
- funkcija zadržavanja za resurs $r - d_r$.

Pri svakom stanju igre $S = (S_1, \ldots, S_i) \in \Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ opisani su [7]:

- broj igrača $i \in N$ koji koriste resurs $r \in S_i$ - $n_r(S)$
- zadržavanje na resursu r - $d_r\big(n_r(S)\big)$
- zadržavanje igrača i - $\delta_i(S) = \sum_{r \in S_i} d_r\big(n_r(S)\big)$.

Trošak igrača i u stanju igre S jednak je njegovom zadržavanju:

$$c_i(S) = \delta_i(S)$$

te stoga svaki igrač u igri zagušenja za cilj ima minimizirati svoje zadržavanje u igri, odnosno riješiti sljedeći problem optimizacije:

$$min \sum_{r \in S_i} d_r\big(n_r(S)\big)$$

Svi igrači koji sudjeluju u igri su jednaki u smislu „težine“, odnosno nije bitno koji igrači koriste resurs, nego koliko igrača ga koristi.

Neka je $S_{-i} = (S_1, \dots, S_{i-1}, S_{i+1}, \dots, S_n)$ skup strategija svih igrača osim igrača $i \in N$. Takva notacija omogućuje definiranje jednostranih devijacija pojedinog igrača. Za $i \in N, S \in \Sigma$ i $S_i' \in \Sigma_{-i}$ vrijedi:

$$(S_i', S_{-i}) = (S_1, \dots, S_{i-1}, S', S_{i+1}, \dots, S_n)$$

Strategija S_i se naziva najboljim odgovorom za igrača $i \in N$ protiv skupa strategija S_{-i} ako je:

$$c_i(S) \leq c(S_i', S_{-i})$$

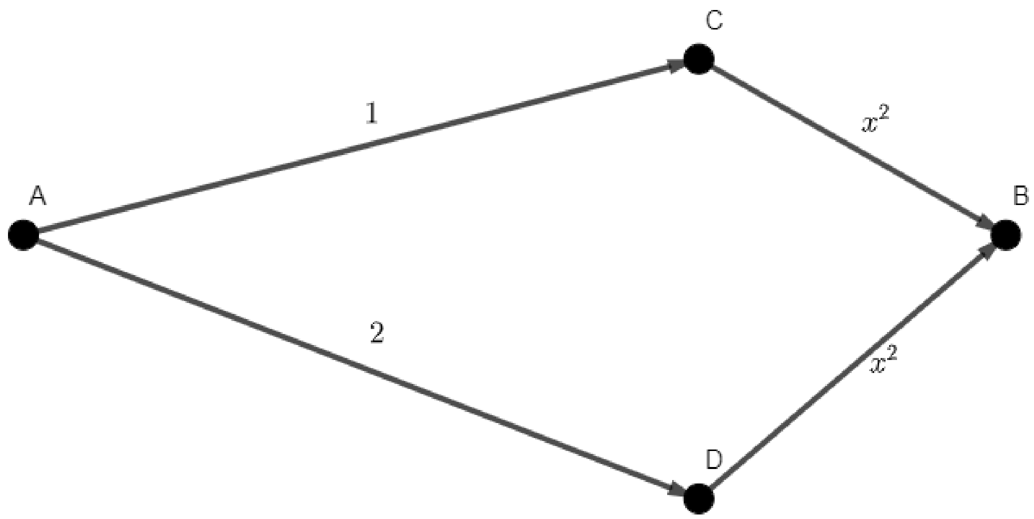
za svaki $S_i' \in \Sigma_i$.

Stanje igre $S \in \Sigma$ u kojem za svakog igrača $i \in N$ vrijedi da je strategija S_i najbolji odgovor na skup strategija svih ostalih igrača S_{-i} naziva se Nashova ravnoteža igre zagušenja. [7]

Igra zagušenja naziva se mrežnom igrom zagušenja ukoliko postoji graf $G = (V, E)$ koji prikazuje situaciju u kojoj se igra nalazi.

Svaki igrač i u mrežnoj igri zagušenja za cilj ima odrediti strategiju, odnosno rutu $S_i \in \Sigma_i$ koja omogućuje najmanje zadržavanje igrača δ_i između točke polazišta i točke odredišta iz skupa vrhova V.

Na slici 2 prikazan je primjer mrežne igre zagušenja.



Slika 2: Primjer mrežne igre zagušenja
Izradio autor

Dva igrača za cilj imaju doći od polazišta A do odredišta B. Točke A i B su povezane preko čvorova C i D, te je veza preko čvora C kraća od veze preko čvora D, odnosno igrači će vjerojatnije izabrati rutu preko čvora C. Obje rute se lako zagušuju, što znači da što više igrača koristi jednu rutu, više se povećava zadržavanje svakog igrača koji koristi tu rutu. Najbolji rezultat u ovoj igri je koordinacija dvaju igrača, odnosno odabir različitih ruta, no takav ishod je moguće postići samo koordinacijom igrača.

Kao i isplate svih drugih igara u kojima sudjeluju dva igrača, tako se i isplate, odnosno u ovom slučaju zadržavanja, iz primjera mogu prikazati matrično. S obzirom da su interesi igrača u djelomičnom konfliktu, odnosno dobitak jednog igrača nije jednak gubitku drugog, matrica kojom se prikazuju rezultati je u bimatričnoj formi. U tablici 5 su prikazana zadržavanja igrača u igri iz primjera.

Tablica 5: Matrica zadržavanja igrača

	C	D
C	$(5,5)$	$(2,3)$
D	$(3,2)$	$(6,6)$

S obzirom da su vrijednosti u matrici zadržavanja, cilj svakog igrača je što manji rezultat. Kombinacije strategija (C, D) i (D, C) predstavljaju Nash-ove ravnoteže u navedenoj igri jer svaka jednostrana promjena jednog od igrača igre zagušenja povećava njegovo zadržavanje.

U ovom primjeru su definirani:

- skup igrača $\mathrm{N} = \{1,2\}$,
- resursi igre R, prikazani bridovima grafa G
- funkcije zadržavanja za svaki resurs d_r
- skup mogućih strategija od točke A do točke B - $\Sigma_i = \{C, D\}$.

U primjeru oba igrača imaju za cilj doći iz zajedničke početne točke A do zajedničkog odredišta B, te su skupovi strategija za oba igrača jednaki. Ovakav tip igre zagušenja naziva se simetrična igra zagušenja. Ukoliko su početne i odredišne točke igrača u igri zagušenja različite, odnosno ukoliko igrači nemaju jednake skupove mogućih strategija, igra se naziva asimetrična igra zagušenja.

3.2. Nashova ravnoteža u igrama zagušenja

Nashova ravnoteža je prevladavajući koncept rješavanja igara zagušenja. Stanje igre je u Nashovoj ravnoteži ako nijedan od igrača ne može promijeniti strategiju kako bi umanjio svoje kašnjenje.

U igrama zagušenja se pretpostavlja da igrači imaju potpune informacije o igri, što znači da svaki igrač posjeduje informacije o cijelom skupu resursa, mogućim strategijama, funkcijama zadržavanja za svaki resurs odnosno strategiju, te izborima ostalih igrača u svakom stanju igre. Dakle, svaki igrač ima pristup informacijama potrebnim za utvrđivanje je li odabrana strategija najbolja za odabir ili postoji bolja alternativa.

Nadalje, kao i u ostalim igrama, u igrama zagušenja se pretpostavlja da igrači djeluju racionalno, što znači da je njihovo ponašanje određeno njihovim zadržavanjem u igri. Igrač koji mijenja svoju strategiju uvijek prelazi na strategiju u kojoj je zadržavanje strogo manje nego u prethodnoj. Odluke koje donose igrači nisu obavezno temeljene samo na zadržavanjima igrača. Na primjer, igrač možda ne želi dijeliti resurs igre s određenim suparnicima, ili pak igrači se mogu ponašati strateški i predvidjeti ponašanje drugih igrača kako bi donijeli odluku s kojom ostvaruju dugoročnu prednost.

Pod ovim pretpostavkama, Nashova ravnoteža se definira kao stanje u kojem nitko od igrača ne može jednostrano umanjiti svoje zadržavanje mijenjajući svoju strategiju s obzirom na fiksni izbor drugih igrača. Ovakav oblik Nashove ravnoteže naziva se čista Nashova ravnoteža. [8]

Ako je očekivano smanjenje zadržavanja mijenjanjem strategije malo, igrač možda neće htjeti mijenjati svoju strategiju, posebice u situacijama kada promjena strategije nije besplatna. U situaciji kada igrač mijenja strategiju ako i samo ako bi mu se zadržavanje smanjilo za više od faktora $1 + \varepsilon$ za bilo koji $\varepsilon > 0$, igrači se nazivaju ε-pohlepni igrači, a stanje igre kada ε-pohlepni igrači nemaju mogućnost smanjenja zadržavanja za faktor $1 + \varepsilon$ se naziva *približna Nashova ravnoteža*. [8]

3.2.1. Funkcija potencijala

Metoda funkcije potencijala je jedna od tehnika koja se koristi za dokazivanje postojanja Nashove ravnoteže u igrama zagušenja.

Najvažnije svojstvo funkcije potencijala je mogućnost prikaza postojanja boljeg stanja igre, stanja igre s manjim potencijalom od stanja igre koje se razmatra u danom trenutku, ako i samo ako je novo stanje igre generirano tako što je jedan od igrača promijenio svoju strategiju i time smanjio svoje zadržavanje. [8]

Funkcije potencijala prate „globalno zadržavanje“ u sustavu. Minimiziranje potencijala jednako je pronalaženju Nashove ravnoteže u igri zagušenja.

Funkcije potencijala vrlo su elegantan način dokazivanja postojanja Nashove ravnoteže. Dinamika u kojoj jedan igrač za drugim poboljšava svoju strategiju jamči približavanje, te na posljetku i postizanje Nashove ravnoteže. Drugim riječima, iz postojanja potencijalne funkcije možemo zaključiti da se nakon ograničenog broja poboljšavajućih poteza postiže stanje Nashove ravnoteže u igri zagušenja. [8]

Svaka igra zagušenja stvara funkciju potencijala, odnosno svaka igra zagušenja je igra potencijala. [9]

Potencijal $\Phi(S)$ se računa na način da se u igru uvrštavaju igrači jedan za drugim, nakon čega se zbrajaju zadržavanja svih igrača u trenutku kada su igrači uvršteni. Redoslijed uvrštavanja nije bitan. [7]

Dakle, za svako stanje igre S, Rosenthal-ova funkcija potencijala glasi:

$$\Phi(S) = \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{n_r(S)} d_r(k)$$

Neka je igrač i posljednji igrač koji je umetnut u igru prilikom računanja potencijala $\Phi(S)$. Tada potencijal koji se računa za igrača odgovara kašnjenju igrača i u stanju S. Mijenjajući svoju strategiju, igrač i mijenja stanje igre iz S u stanje S', te se zadržavanje igrača i smanjuje za Δ, a s tim se i potencijal Φ smanjuje za Δ.

Dakle, neka je S stanje igre Γ. Nakon što igrač i povuče potez te poboljša svoju funkciju zadržavanja za $\Delta > 0$, igra prelazi iz stanja S u stanje S' te tada vrijedi [7]:

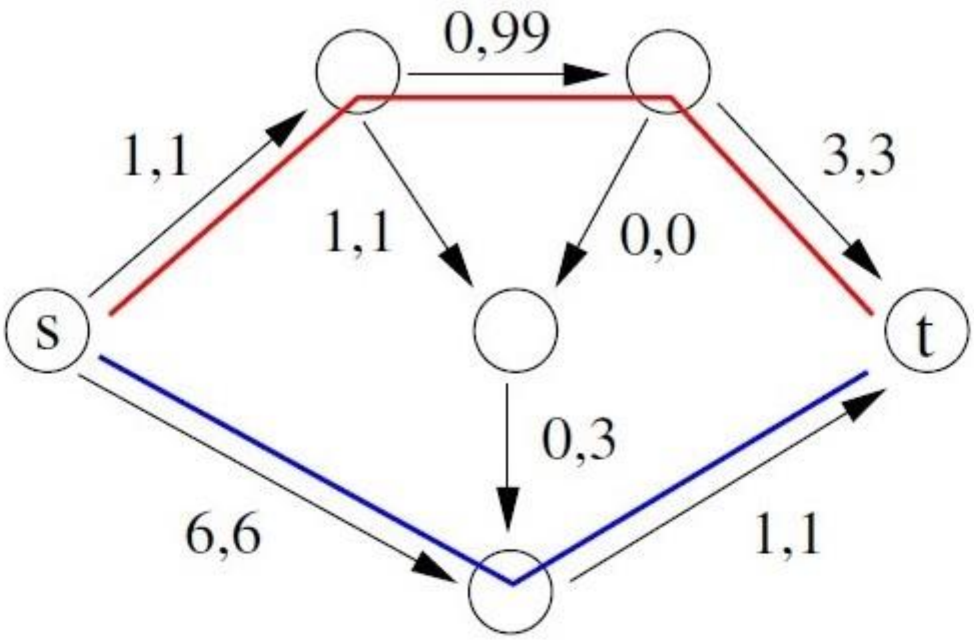
$$\Phi(S') = \Phi(S) - \Delta$$

Nadalje, u svakoj igri zagušenja vrijedi [7]:

- za svako stanje igre S, $\Phi(S) \leq \sum_{r \in R} \sum_{i=1}^{n} |d_r(i)|$,
- za svako stanje igre S, $\Phi(S) \geq -\sum_{r \in R} \sum_{i=1}^{n} |d_r(i)|$

U svakoj igri zagušenja sekvenca poteza koji poboljšavaju isplatu igrača (umanjuju zadržavanje) je konačna. [9]

Na slikama 3, 4, 5 i 6 prikazana je sekvenca poboljšavajućih poteza dva sudionika simetrične igre zagušenja.



Slika 3: Početno stanje primjera simetrične igre zagušenja
Izvor: [7]

U početnom stanju mrežne igre zagušenja definira se mreža, odnosno graf G sa skupom vrhova V i skupom bridova E. Svakom bridu $e \in E$ pridružuje se funkcija zadržavanja d_e. Također, na grafu se prikazuje početno stanje igre, odnosno rute koje svaki igrač koristi u početku igre.

Neka su igrači iz primjera igre zagušenja označeni s A i B. Njihove početne rute su označene različitim bojama. Neka je ruta označena crvenom bojom ruta igrača A, a ruta označena plavom bojom ruta igrača B.

Elementi igre zagušenja iz primjera sljedeći:

- skup igrača $N = \{A, B\}$,
- skup resursa R prikazan bridovima $e \in E$,
- funkcije zadržavanja d_e za svaki brid $e \in E$ te
- početne strategije, odnosno rute $S_A, S_B \in \Sigma_i$.

Funkcija potencijala u mrežnim igrama zagušenja iznosi:

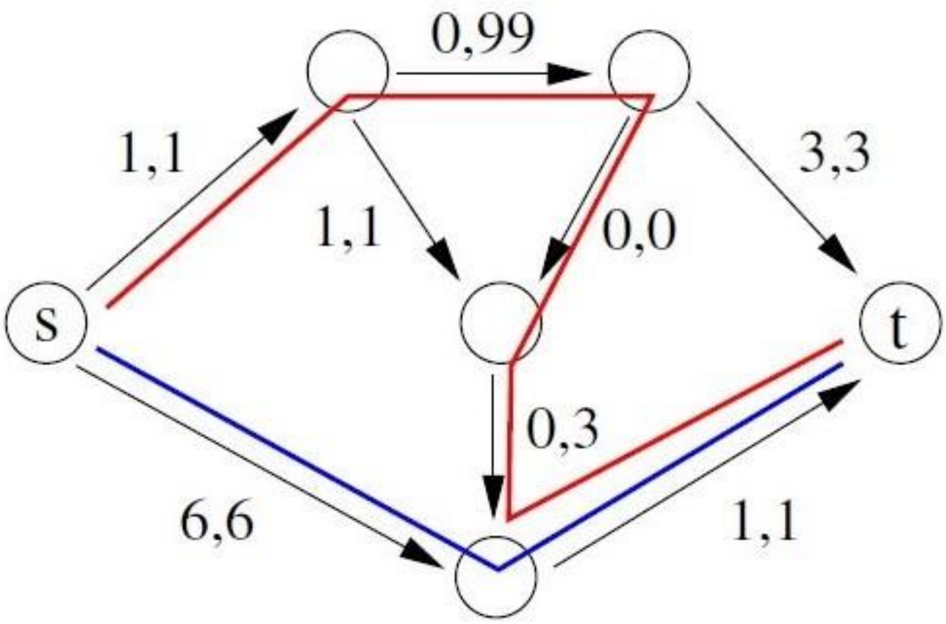
$$\Phi(S) = \sum_{e \in E} \sum_{k=1}^{n_e(S)} d_e(k)$$

Uvrštavanjem zadržavanja igrača $N = \{A, B\}$ na bridovima $e \in E$ u funkciju potencijala dobije se:

$$\Phi(S) = 1 + 0 + 3 + 6 + 1 = 11$$

Dakle, početno stanje S igre zagušenja iz primjera ima potencijal $\Phi(S) = 11$.

Neka igrač A primijeti mogućnost odabira povoljnije rute za sebe i na taj način poboljša svoju funkciju zadržavanja. Tada igrač A povlači prvi potez u igri i mijenja svoju rutu, a s tim i stanje igre iz S u S'.

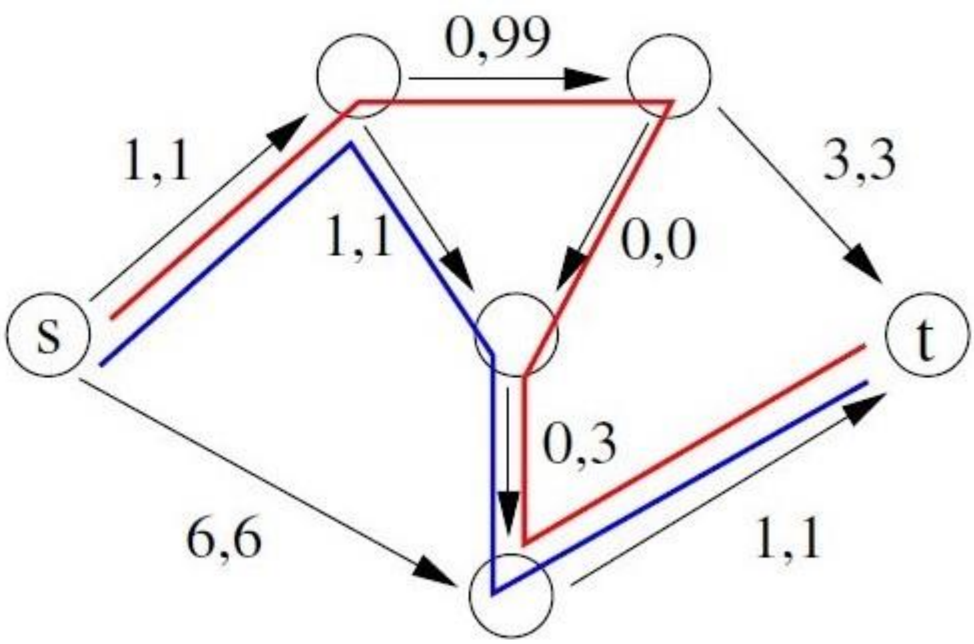


Slika 4: Stanje igre nakon povlačenja prvog poteza igrača A
Izvor: [7]

Sada je vrijednost funkcije potencijala $\Phi(S')$ jednaka:

$$\Phi(S') = (1 + 0 + 0 + 0 + 1) + (6 + 1) = 9$$

U stanju S' igre zagušenja igrač A nema mogućnost poboljšanja zadržavanja mijenjajući svoju rutu, no igrač B ima. Stoga, igrač B povlači svoj prvi potez, mijenja rutu u sebi povoljniju, te mijenja stanje igre iz S' u S''.

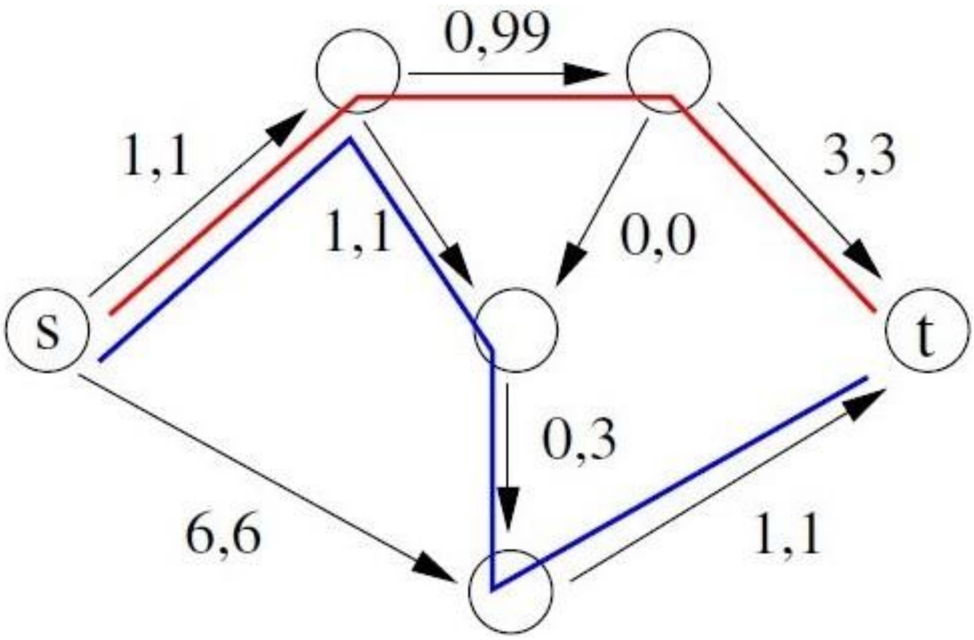


Slika 5: Stanje igre nakon prvog poteza igrača B
Izvor: [7]

Stanje igre nakon prvog poteza igrača B, odnosno stanje S'', ima funkciju potencijala $\Phi(S'')$ koja iznosi:

$$\Phi(S'') = (1+0+0+0+1) + (1+1+3+1) = 8$$

Nakon što je igrač B povukao svoj prvi potez, igraču A se otvara nova mogućnost poboljšanja svoje funkcije zadržavanja. Najbolji potez za igrača A u ovome stanju je povratak na početnu rutu.



Slika 6: Stanje igre nakon drugog poteza igrača A
Izvor: [7]

Funkcija potencijala u posljednjem stanju igre S'''iz primjera iznosi:

$$\Phi(S''') = (1+0+3) + (1+1+0+1) = 7$$

Povratkom igrača A na početnu rutu dolazi se do stanja igre gdje svaka promjena rute bilo kojeg od igrača rezultira povećanjem njegovog zadržavanja i potencijala igre. Ovo stanje se naziva Nashova ravnoteža igre zagušenja.

3.2.2. Efikasnost ravnoteže

Nashova ravnoteža u igrama zagušenja često nije optimalno rješenje igre. Ona nam jamči da nijedan igrač ne može poboljšati svoju funkciju zagušenja mijenjajući strategiju koju koristi, no to ne znači da se stanje igre ne može poboljšati kada bi više igrača promijenilo svoje strategije istovremeno. Stanje igre u kojem ne postoji mogućnost poboljšanja naziva se društveno optimalno stanje igre zagušenja.

Omjer Nashove ravnoteže i društveno optimalnog stanja igre u teoriji igara se naziva *cijena anarhije*. [10]

Koncept cijene anarhije se koristi kao standardna mjera za mjerenje potencijalnih gubitaka nastalih nedostatkom koordinacije između igrača ili pak sebičnim djelovanjem pojedinca koji zanemaruje dobrobit društva zbog svojih interesa. [11]

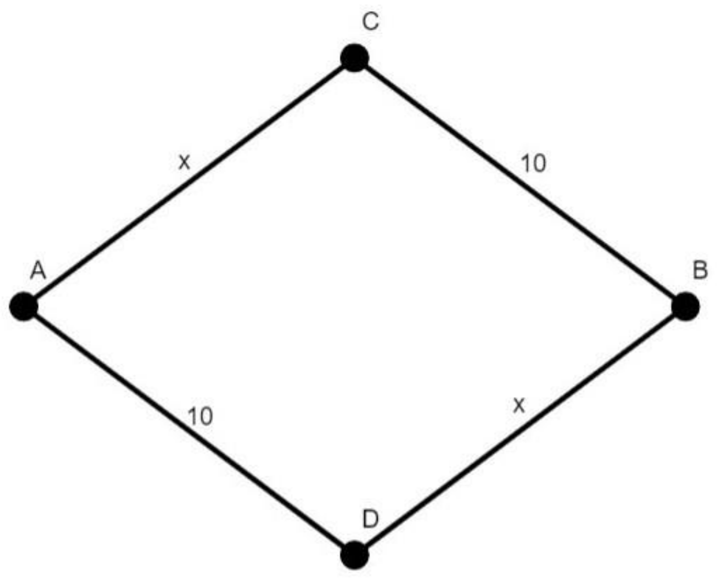
U slučaju igara zagušenja, cijena anarhije je omjer zbroja zadržavanja svih igrača u Nashovoj ravnoteži i zbroja zadržavanja svih igrača u društveno optimalnoj ravnoteži. Neka je S stanje igre u Nashovoj ravnoteži a S^* društveno optimalno stanje igre, tada cijena anarhije iznosi:

$$\frac{\sum_{i\in N} \delta_i(S)}{\sum_{i\in N} \delta_i(S^*)}$$

Cijena anarhije je prilično česta pojava u teoriji igara, a u igrama zagušenja najčešće se opisuje pomoću *Braessovog padaroksa*.

Dietrich Braess je njemački matematičar koji 1968. godine dokazuje kako dodavanje kapaciteta prometnoj mreži može rezultirati smanjenom performansom mreže. [12]

Na slici 7 prikazana je prometna mreža s dvije prometnice koje se zagušuju i dvije prometnice koje se ne zagušuju:



Slika 7: Početna mreža prometnica u prikazu Braessovog paradoksa
Izradio autor

Neka deset igrača za cilj ima doći od točke A do točke B. Svaki igrač na raspolaganju ima dvije mogućnosti, odnosno strategije. Prva strategija je ruta kroz točku C – A-C-B, a druga kroz točku D, A-D-B. Prometnice između vrhova su resursi igre zagušenja. Funkcija zagušenja resursa A-D i C-B je konstantna i jednaka 10, dok je funkcija zagušenja resursa A-C i D-B jednaka broju korisnika tog resursa, označen s x.

U teoriji igara svi igrači odluke donose racionalno. Stoga, u primjeru iz slike 7, racionalni igrači odabiru strategiju koju koristi manje igrača, te će naposlijetku svaku strategiju koristiti pet igrača. Ni jedan igrač nema mogućnost poboljšanja svojeg zadržavanja, pa je stanje igre u kojem pet igrača koristi jednu, a pet drugu strategiju Nashova ravnoteža igre zagušenja iz primjera.

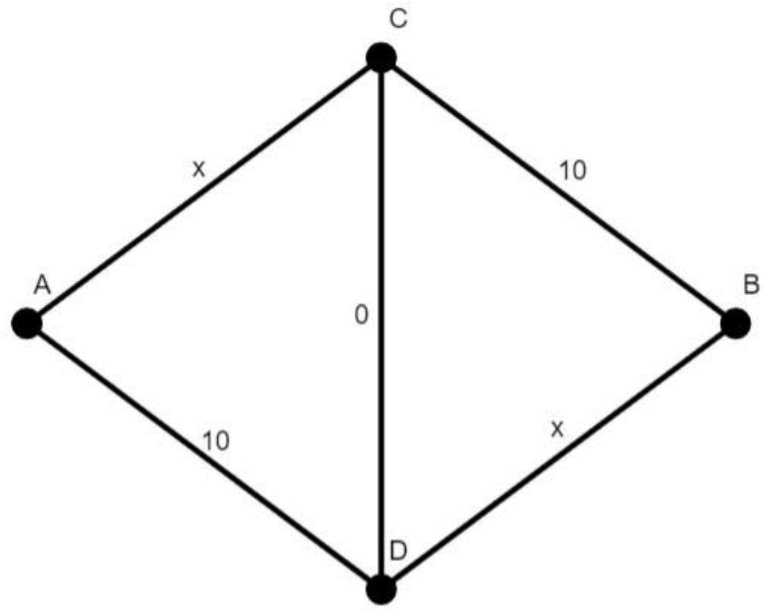
Ukupno, tzv. „globalno" zadržavanje svih sudionika igre zagušenja iz primjera u Nashovoj ravnoteži iznosi:

$$\sum_{i \in N} \delta_i \,(S) = x \cdot x + x \cdot 10 + x \cdot 10 + x \cdot x = 5 \cdot 5 + 5 \cdot 10 + 5 \cdot 10 + 5 \cdot 5$$

$$= 25 + 50 + 50 + 25 = 150$$

Nashova ravnoteža u ovom primjeru jednaka je društveno optimalnoj ravnoteži, odnosno cijena anarhije ne postoji.

Dodavajući novu prometnicu, odnosno resurs bez zagušenja između vrhova C i D, dobiva se prometna mreža prikazana na slici 8:



Slika 8: Mreža prometnica nakon dodavanja resursa bez zagušenja C-D
Izradio autor

Nakon dodavanja resursa bez zagušenja C-D, igračima se nude dodatne dvije moguće strategije. Prva dodatna strategija je odabir rute A-C-D-B, a druga A-D-C-B.

Svaki racionalan igrač u točki A bira rutu A-C jer je zadržavanje na ruti A-C u najgorem slučaju jednako 10, odnosno jednako zadržavanju na ruti A-D, a u svakom drugom slučaju je zadržavanje manje od 10. Iz istog će razloga iz točke C igrači odabrati rutu preko točke D.

Svi sudionici igre zagušenja iz primjera odabiru strategiju A-C-D-B, a s obzirom da ni jedan igrač ne može poboljšati svoje zadržavanje mijenjanjem strategije, igra je u Nashovoj ravnoteži.

U novonastaloj situaciji globalno zadržavanje iznosi:

$$\sum_{i \in N} \delta_i\,(S) = x \cdot x + 0 \cdot x + x \cdot x = 10 \cdot 10 + 0 \cdot 10 + 10 \cdot 10 = 100 + 100 = 200$$

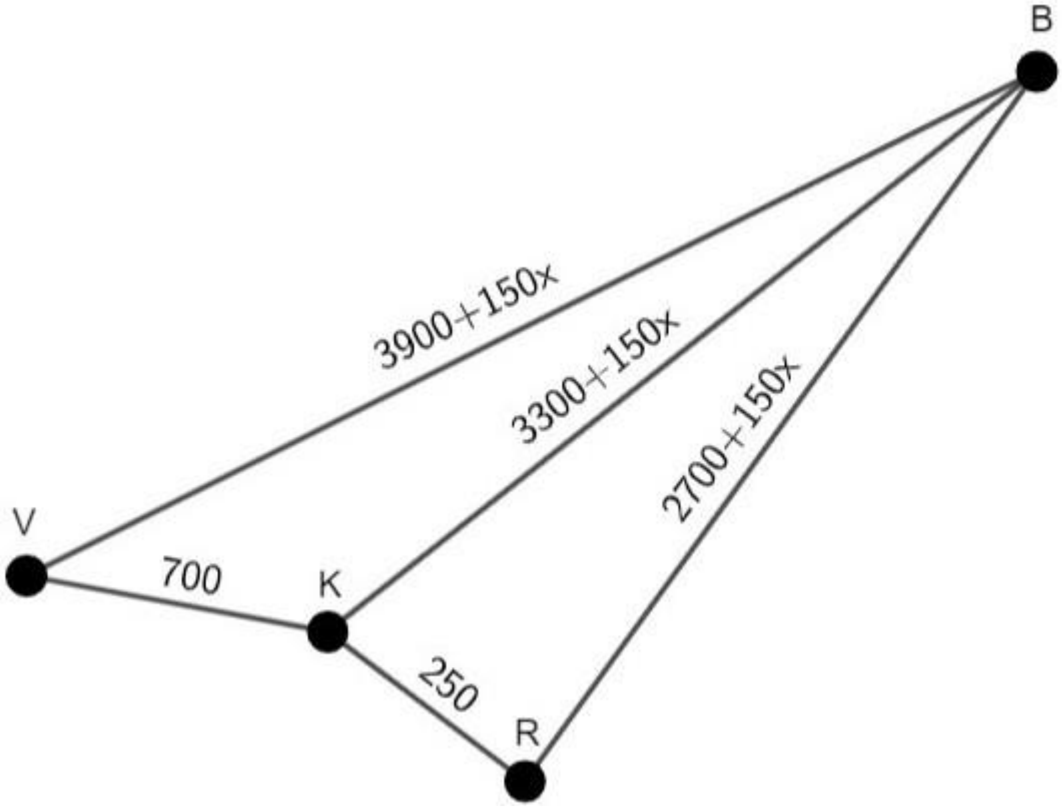
Dodavanje novog resursa u igru zagušenja rezultiralo je većim zagušenjem mreže i zadržavanjem svakog igrača u sustavu. U društveno optimalnom stanju igre globalno zadržavanje iznosi 150, a u Nashovoj ravnoteži 200, stoga je cijena anarhije igre zagušenja iz primjera jednaka:

$$\frac{200}{150} = \frac{4}{3}$$

Samostalno djelovanje svih deset sudionika u igri zagušenja iz primjera rezultira cijenom anarhije $\frac{4}{3}$, što znači da je globalno zadržavanje samostalnih sudionika igre zagušenja za $\frac{1}{3}$ veće od zadržavanja sudionika igre koji djeluju koordinirano.

4. PRIMJER IGRE ZAGUŠENJA U PROMETU

Neka roba namijenjena za mađarsko tržište stiže pomorskim putem u luke Rijeka, Kopar i Venecija. Također, neka se sva roba namijenjena za mađarsko tržište prvotno dostavlja u logističko distribucijski centar u Budimpešti, odakle se vrši daljnja distribucija. Sve tri luke povezane su direktno s Budimpeštom, te su povezane luka Venecija i luka Kopar, te luka Kopar i luka Rijeka. Zagušenje nastaje na direktnim vezama luka s Budimpeštom. Igra zagušenja je prikazana grafički na slici 7.

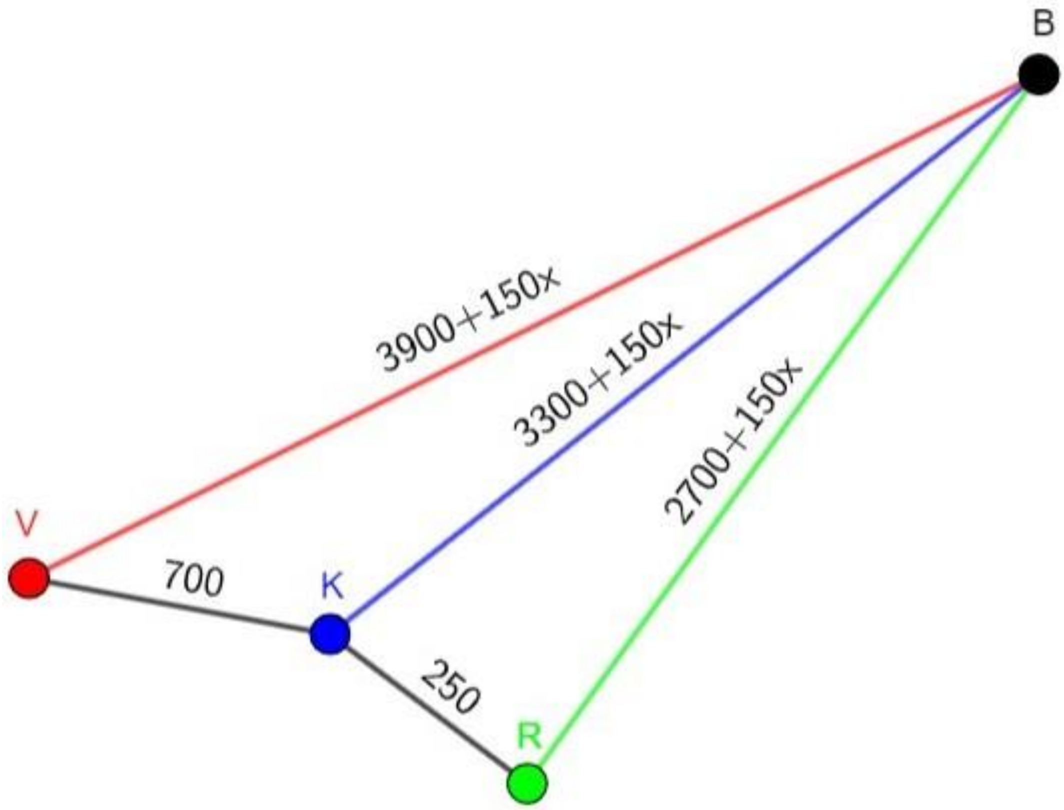


Slika 9: Grafički prikaz primjera igre zagušenja iz svijeta
Izradio autor

Vrhovi grafa $V(G) = \{V, K, R, B\}$ predstavljaju redom Veneciju, Kopar, Rijeku te Budimpeštu. Neka prijevoznici iz Venecije predstavljaju jednog igrača, prijevoznici iz Kopra drugog, a prijevoznici iz Rijeke trećeg igrača u igri zagušenja. Svaki igrač za cilj ima odrediti rutu za prijevoz pristigle robe do Budimpešte koja mu osigurava najniže moguće troškove. S obzirom da početne točke svakog igrača nisu jednake, rute koje svaki od njih može izabrati su različite.

Jedini kriterij za odabir rute u igri iz primjera je trošak prijevoza, stoga su zadržavanja na prometnicama zapravo troškovi korištenja te prometnice. Zadržavanja su približne vrijednosti troškova cestarina i goriva za tegljače na tim rutama u kunama.

U početnom stanju igre zagušenja prijevoznici iz sve tri luke koriste direktne veze s Budimpeštom. Početno stanje je prikazano na slici 8, a strategije, odnosno rute svakog igrača su prikazane različitim bojama, prijevoznici iz Venecije plavo, iz Kopra crveno, te iz Rijeke zeleno.

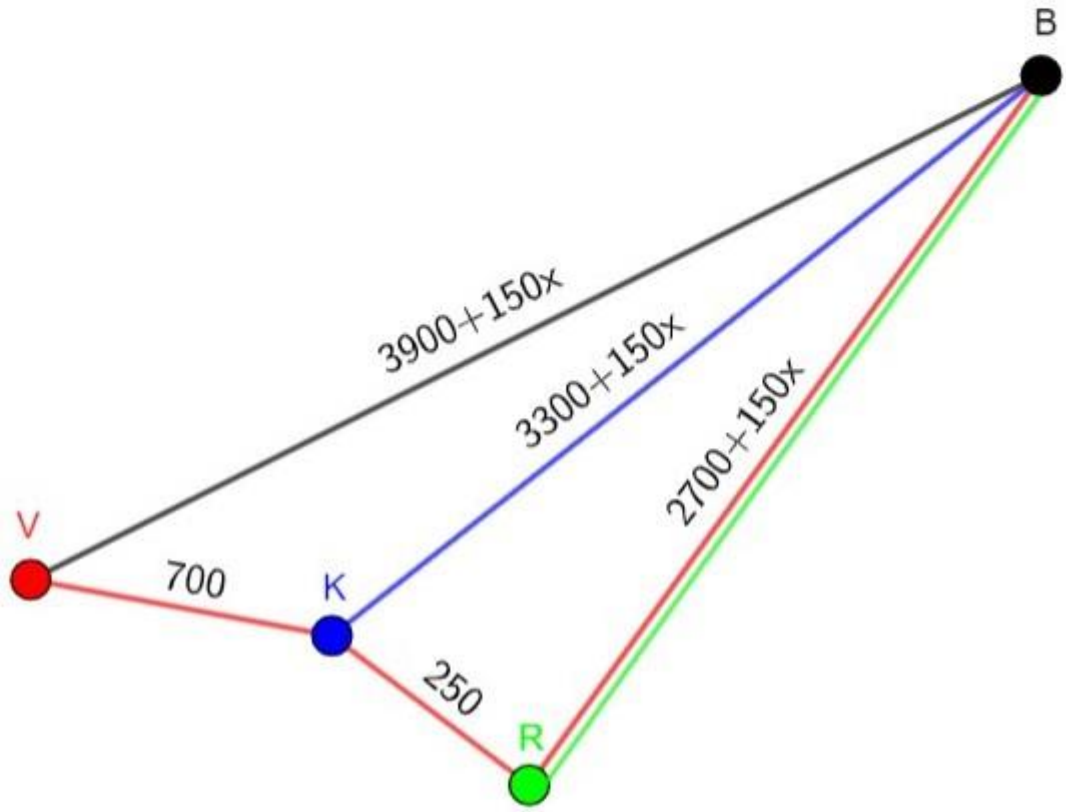


Slika 10: Početno stanje primjera igre zagušenja iz svijeta
Izradio autor

Zadržavanje svakog igrača u početnom stanju igre zagušenja iz primjera jednako je:

- Venecija: $3900 + 150 \cdot 1 = 4050$
- Kopar: $3300 + 150 \cdot 1 = 3450$
- Rijeka: $2700 + 150 \cdot 1 = 2850$.

Neka prijevoznici iz Venecije primijete mogućnost poboljšanja svog zadržavanja, tj. troškova u igri promjenom rute. U ovom stanju najpovoljnija ruta za prijevoznike iz Venecije je ruta kroz Rijeku. Novonastalo stanje igre nastalo mijenjanjem strategije prijevoznika iz Venecije prikazano je na slici 9.



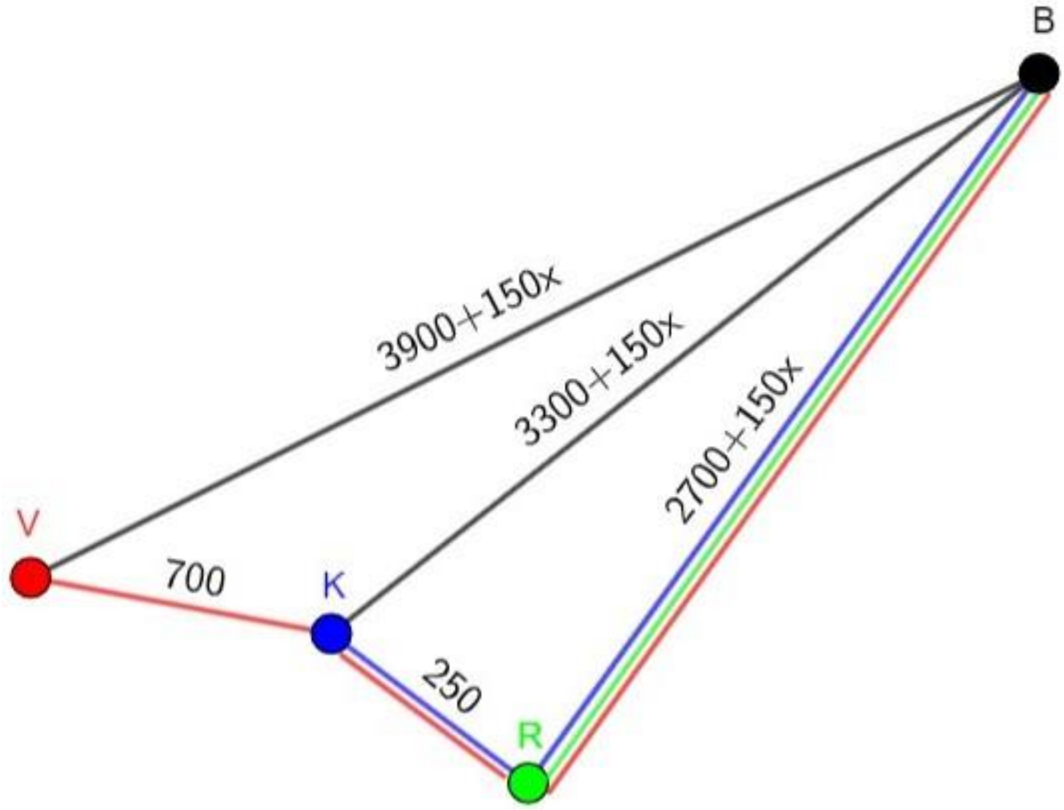
Slika 11: Drugo stanje primjera igre zagušenja iz svijeta
Izradio autor

Zadržavanje svakog igrača u drugom stanju igre zagušenja iz primjera jednako je:

- Venecija: $700 + 250 + (2700 + 150 \cdot 2) = 3950$
- Kopar: $3300 + 150 \cdot 1 = 3450$
- Rijeka: $2700 + 150 \cdot 2 = 3000$

Prijevoznici iz Venecije mijenjajući svoju strategiju umanjuju svoje zadržavanje, odnosno troškove za 100, no tim potezom povećavaju zadržavanje prijevoznika iz Rijeke za 150. Ukupni troškovi sva tri igrača u igri zagušenja nakon poboljšavajućeg poteza prijevoznika iz Venecije su se pogoršali, odnosno pojavljuje se cijena anarhije – trošak nastao zbog manjka koordinacije i sebičnog djelovanja svakog igrača.

U ovom stanju igre prijevoznici iz Kopra imaju mogućnost smanjiti svoje troškove mijenjajući direktnu rutu za rutu kroz Rijeku. Stanje igre nastalo odabirom nove strategije prijevoznika iz Kopra prikazano je na slici 10.



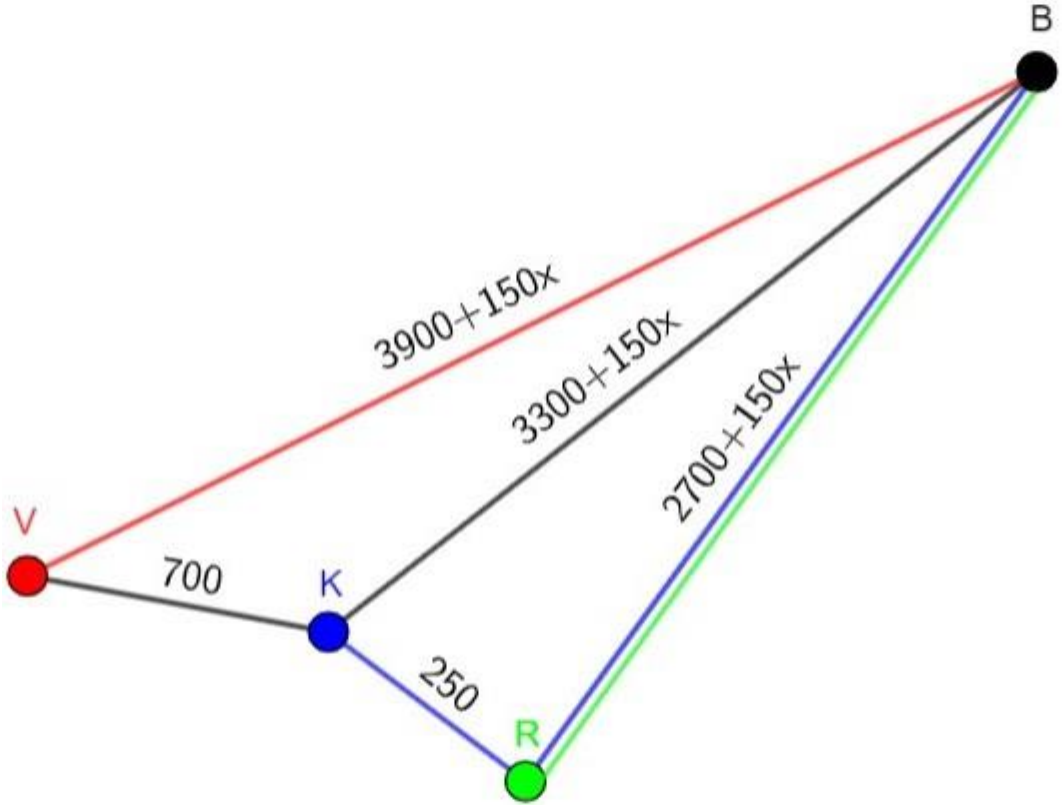
Slika 12: Treće stanje primjera igre zagušenja iz svijeta
Izradio autor

Zadržavanje svakog igrača u trećem stanju igre zagušenja iz primjera jednako je:

- Venecija: $700 + 250 + (2700 + 150 \cdot 3) = 4100$
- Kopar: $250 + (2700 + 150 \cdot 3) = 3400$
- Rijeka: $2700 + 150 \cdot 3 = 3150$

Ponovno se pojavljuje cijena anarhije, jer prijevoznici iz Kopra umanjuju svoj trošak za 50, dok se troškovi prijevoznika iz Venecije i Rijeke povećava za 150.

Mijenjanjem svoje rute, prijevoznici iz Kopra povećavaju troškove prijevoza prijevoznicima iz Venecije na troškove veće od troškova korištenja direktne rute za Budimpeštu. Stoga, igrači iz Venecije mogu poboljšati svoje troškove ponovnim mijenjanjem strategije i odabirom početne, direktne rute za Budimpeštu. Novo stanje igre nastalo vraćanjem prijevoznika iz Venecije na direktnu rutu prikazano je na slici 11.



Slika 13: Četvrto stanje primjera igre zagušenja iz svijeta
Izradio autor

Zadržavanje svakog igrača u četvrtom stanju igre zagušenja iz primjera jednako je:

- Venecija: $3900 + 150 \cdot 1 = 4050$
- Kopar: $250 + (2700 + 150 \cdot 2) = 3250$
- Rijeka: $2700 + (150 \cdot 2) = 3000$

Promjenom strategije prijevoznici iz Venecije, uz to što umanjuju svoje troškove za 50, umanjuju i troškove prijevoznika iz Kopra i Rijeke za 150.

U ovom stanju igre ni jedan prijevoznik nema mogućnost smanjenja troškova mijenjanjem svoje rute, stoga je igra u Nashovoj ravnoteži. Također, ne postoji kombinacija strategija u kojoj su ukupni troškovi svih igrača manji od ukupnih troškova u Nashovoj ravnoteži, odnosno u primjeru igre zagušenja ne postoji cijena anarhije.

5. ZAKLJUČAK

Konfliktne situacije dio su svakodnevnice svakog poduzeća. Nagli razvoj tehnologije i globalizacija doveli su do povećanja konkurencije u mnogim gospodarskim djelatnostima, što je rezultiralo brojnijim i značajnijim konfliktnim situacijama. Mnogi poduzetnici za pronalaženje optimalnih rješenja u takvim situacijama koriste principe iz teorije igara, znanstvene discipline koja se bavi opisivanjem i pronalaženjem najboljih rješenja u konfliktnim situacijama.

U procesu određivanja prijevoznih ruta konfliktne situacije se pojavljuju kada veći broj korisnika prometnog sustava stvara zagušenje koristeći istu prometnicu ili dio prometne mreže. Kao i ostalim oblicima konfliktnih situacija, i ovome se može pristupiti s teorijom igara, točnije igrama zagušenja.

U radu je prikazana mogućnost pronalaska najbolje prijevozne rute uzimajući u obzir utjecaj drugih sudionika prometnog sustava na korisnika. Pomoću koncepta igara zagušenja, u radu je prikazano racionalno ponašanje sudionika lako zagušljive prometne mreže prilikom procesa odabira optimalne prijevozne rute.

Prijevoznici u prometnom sustavu uglavnom nisu u potpunom konfliktu. Djelujući samostalno, prijevoznici često ostvaruju lošije rezultate nego što bi ostvarivali sklapajući koalicije s drugim prijevoznicima. U radu su, uz pomoć Braessovog paradoksa, opisani gubitci nastali sebičnim ili nekoordiniranim djelovanjem sudionika u prometnoj mreži, što je u literaturi poznato pod nazivom „cijena anarhije“.

Koordiniranim korištenjem mreže ostvarilo bi se rasterećenje zagušenih prometnica i povećanje sveukupnog protoka, što rezultira manjim ukupnim vremenom zadržavanja svih sudionika u sustavu.

POPIS LITERATURE

[1.] Škrinjar, J.P.; Abramović, B.: Primjena teorije igara u prometu i logistici, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 2017.

[2.] Dixit, A.; Skeath, S.; Reiley, D.H.: Games of Strategy, W.W. Norton, 3rd edition, New York, 2009.

[3.] Leyton-Brown, K.;Shoham, Y.: Essentials of Game Theory, Morgan & Claypool, 2008.

[4.] Kopal, R.; Korkut, D.: Teorija igara - praktična primjena u poslovanju, Comminus d.o.o., Visoka poslovna škola Libertas, Zagreb, 2011.

[5.] Tutte, W.T.: Graph Theory, University of Waterloo, Waterloo, 1984.

[6.] Fošner, M.; Kramberger, T.: Teorija grafova i logistika, Fakultet za logistiku, Celje, 2009.

[7.] Dütting, P.: Introduction to Congestion Games, Algorithmic Game Theory, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Zürich, 2015

[8.] Ackermann, H: Nash equilibria and Improvement Dynamics in Congestion Games, Fakultat fur Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften, Aachen, 2009.

[9.] Rosenthal, R.; A class of games possessing pure-strategy Nash equilibria, International Journal of Game Theory, 1973.

[10.] Koutsoupias, E.; Papadimitriou, C.: Worst-case equilibria, Proceedings of the 16th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS), University of California, 1999.

[11.] Chien, S.; Sinclair, A.: Strong and Pareto Price of Anarchy in Congestion games, Automata, Languages and Programming, 36th International Colloquium, ICALP 2009, Rhodes

[12.] Braess, D.: Uber ein paradoxon aus der verkehrsplanung, Unternehmensforschung, Münster, 1968.

POPIS SLIKA

POPIS TABLICA