

# Analiza vrednovanja prometnih rješenja temeljena na DEA metodi

---

Međurečan, Luka

Master's thesis / Diplomski rad

2019

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Transport and Traffic Sciences / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:119:591793>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-24**



*Repository / Repozitorij:*

[Faculty of Transport and Traffic Sciences -  
Institutional Repository](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**FAKULTET PROMETNIH ZNANOSTI**

**Luka Međurečan**

**ANALIZA VREDNOVANJA PROMETNIH  
RJEŠENJA TEMELJENA NA DEA METODI**

**DIPLOMSKI RAD**

**Zagreb, 2019.**

Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet prometnih znanosti

## **DIPLOMSKI RAD**

**ANALIZA VREDNOVANJA PROMETNIH RJEŠENJA  
TEMELJENA NA DEA METODI**

**EVALUATION OF TRAFFIC SOLUTIONS BASED ON THE  
DEA METHOD**

Mentor: dr. sc. Damir Budimir

Student: Luka Međurečan

JMBAG: 0035182693

Zagreb, rujan 2019.

Zagreb, 5. travnja 2019.

Zavod: **Zavod za gradski promet**  
Predmet: **Tehnološki modeli prijevoza putnika u gradovima**

## DIPLOMSKI ZADATAK br. 5304

Pristupnik: **Luka Međurečan (0035182693)**  
Studij: **Promet**  
Smjer: **Gradski promet**

Zadatak: **Analiza vrednovanja prometnih rješenja temeljena na DEA metodi**

### Opis zadatka:

Ovaj će diplomski rad pokazati prednosti i nedostatke korištenja DEA analize kod donošenja odluka o odabiru varijantnih rješenja u prometnim studijama na primjeru jedan prometne studije. Zbog specifičnosti metode i mogućnosti određivanja relativne efikasnosti izlaza u odnosu na ulaze omogućit će se relativne kvantifikacije varijantnih prometnih rješenja.

Donošenje odluka u prometnim studijama zasnovano na DEA metodi predstavlja novu mogućnost kvalificiranja i kvantificiranja varijantnih rješenja. DEA metoda omogućuje usporedbu postojećeg stanja s varijantnim rješenjima te usporedbu samih varijantnih rješenja. DEA metoda predstavlja korak između simulacije i procjene inženjera za određivanje najboljeg varijantnog rješenja.

Uz samo unapređivanje analize varijantnih rješenja ovaj rad istražuje i mogućnost korištenja meta podatka kao rješenja za usporedbu i analizu prometnih veličina (prvenstveno sukobljavanja prometnih tokova i broj kritičnih točaka u odnosu prema vršnom opterećenju mreže) koje se inače teško korelirati. Te korelacije rezultiraju ocjenom uspješnosti koja se kreće između nule i jedan i predstavljaju relativni "stupanj učinkovitosti" varijantnog rješenja.

Mentor:

Predsjednik povjerenstva za  
diplomski ispit:

---

dr. sc. Damir Budimir

## Sažetak

U literaturi, opisano je mnoštvo aplikacija zasnovanih na DEA metodi (Data Envelopment Analysis) koja se koristi u ocjenjivanju uspješnosti pokazatelja vezanih uz aktivnosti u različitim kontekstima (političkim, gospodarskim, socijalnim demografskim, ekološkim i sl.). Primjena DEA metode je otvorila mogućnosti za upotrebu baziranu na relativnim učinkovitostima izlaznih u odnosu na ulazne podatke, u slučajevima koji su nekompatibilni za druge pristupe zbog složene (često nepoznate) prirode odnosa između ulaznih i izlaznih veličina koje je često gotovo nemoguće usporediti. U radu je analizirana svrha uporabe DEA metode u izboru najboljeg prometnog rješenja iz skupa svih mogućih alternativa ovisnih o postavljenim ciljevima. Formalno se optimizacija svodi na određivanje ekstrema (minimuma ili maksimuma) ovisno o vrstama relacija koje se pojavljuju u matematičkom modelu u užemu smislu i postavljenim uvjetima. Pokazane su mogućnosti usporedbe modela temeljenog na dinamičkim varijablama koje karakteriziraju svako od varijantnih prometnih rješenja. Suština analize svedena je na pronalaženje najboljeg od ponuđenih rješenja.

Ključne riječi: Data Envelopment Analysis; Učinkovitost; Procjena varijantnih rješenja; Identifikacija performansi

## Summary

In the literature, there are many applications based on the DEA method (Data Envelopment Analysis), which are used to evaluate the performance of activity-related indicators in different contexts (political, economic, social demographic, environmental, etc.). The use of the DEA method has opened up opportunities for it to be used, based on the relative efficiencies of output versus input, in cases that are incompatible with other approaches due to the complex (often unknown) nature of the relation between input and output quantities, which is often nearly impossible to compare. This paper analyzes the purpose of using the DEA method in selecting of the best traffic solution from a set of all possible alternatives depending on the set goals. Formally, optimization comes down to determining the extremes (minimum or maximum) depending on the types of relations that appear in the mathematical model in the narrowest sense in the set conditions. The possibilities of comparing a model based on dynamic variables that characterize each of the variant transport solutions are shown. The essence of the analysis is to find the best solution.

Key words: Data Envelopment Analysis; Effectiveness; Evaluation of variant solutions; Performance identification

## Sadržaj

1. UVOD.....	1
2. PRINCIP RADA DEA METODE I ODREĐIVANJE DMU-A .....	3
2.1. Matematičko-statističke osnove DEA metode .....	3
2.2. Opis DEA metode.....	7
3. OSNOVNI MODELI DEA ANALIZE.....	13
3.1. Charnes Cooper Rhodesov model (CCR).....	14
3.2. Banker Charner Cooperov model (BCC).....	18
3.3. Usmjerenost modela .....	22
3.4. Identifikacija performansi .....	26
4. VARIJANTNA RJEŠENJA TEMELJENA NA ORGANIZACIJI I REGULACIJI PROMETNIH TOKOVA .....	27
5. ANALIZA MOGUĆNOSTI KORIŠTENJA DEA METODE U PROMETNIM STUDIJAMA .....	33
5.1. Pokazatelji uspješnosti.....	34
5.2. DEA analiza kod sukobljavanja prometnih tokova .....	36
5.3. Izrada DEA modela .....	37
6. ANALIZA DOBIVENIH REZULTATA .....	45
7. ZAKLJUČAK.....	48
Literatura:.....	50
POPIS SLIKA .....	51
POPIS TABLICA.....	52
POPIS GRAFIKONA .....	53
POPIS KRATICA.....	54

## 1. UVOD

Priča o DEA metodi počinje s doktorskom disertacijom Edwarda Rhodesa, koji je pokušao ocijeniti obrazovni program javnih škola u Texasu u SAD-u. U to je vrijeme bio izazov procijeniti relativnu efikasnost škola kao gospodarskih subjekata s više ulaznih parametara (inputa) i izlaznih parametara (outputa), bez uobičajenih informacija o cijenama i troškovima. Kao rezultat dobivena je formulacija modela CCR (jedan od dva osnovna modela DEA metode) i u *European Journal of Operational Research* 1978. godine objavljen je prvi rad u kojem je primijenjena DEA metoda.

DEA je prvotno razvijena kao alat za mjerenje efikasnosti organizacija koje rade na neprofitnoj osnovi (javnih škola i bolnica, vojnih ustanova), gdje nije moguće na osnovi vrijednosti njihovih ulaznih parametara (inputa) i izlaznih parametara (outputa) odrediti efikasnost. Poslije je našao primjenu i u profitnim organizacijama (poduzeća, banke), a o njezinu razvoju svjedoči preko 3000 objavljenih radova i ukupno 196 doktorskih disertacija koje su u osnovi imale razmatranja primjene DEA metode u mjerenju performansi. Dvije bibliografije su objavljene o DEA metodi, prva koja je objavljena 1994. godine (Charnes i dr. 1994) bilježi 472 rada koja su objavljena u razdoblju 1978 – 1992. godine dok druga bibliografija iz 2002. godine (Tavares 2002) navodi još 3203 rada u razdoblju 1978 – 2001. godine. Takav broj radova govori o velikom značenju i interesu za metodologiju DEA-e i njezinu primjenu. Točnije, DEA metoda se koristi u profitnome i neprofitnome sektoru posljednja tri desetljeća s tendencijom širenja primjene.

Danas se na primjenu DEA metode nailazi u mnogim područjima, npr. obrazovanju (javne škole i sveučilišta), zdravstvu (bolnice, klinike, domovi zdravlja), bankarstvu, sportu, istraživanju tržišta, poljoprivredi, maloprodaji, transportu, hotelijerstvu, graditeljstvu itd., te je postala središnja tehnika u analizama produktivnosti i efikasnosti, korištena pri uspoređivanju organizacija, tvrtki, te regija i zemalja. U određivanju efikasnosti poslovanja primijenjena je u bankarstvu, poljoprivredi, drvnoj industriji, školstvu i dr.



Zbog mogućnosti korištenja mnogo različitih vrsta ulaznih i izlaznih podataka koji uključuju ekonomske, gospodarske, socijalne i sigurnosne parametre te različite varijacije uspješnosti, učinkovitosti i efikasnosti kao izlazne vrijednosti.

Takve procjene učinkovitosti često imaju različite oblike u uobičajenim analizama. Primjeri uključuju trošak po jedinici, dobit po jedinici, zadovoljstvo po jedinici i tako dalje, a to su mjere navedene u obliku omjera poput sljedećeg,

$$= \frac{\text{Output (izlazni parametri)}}{\text{Input (ulazni parametri)}}$$

To je uobičajeno mjerilo učinkovitosti. Uobičajena mjera učinkovitosti također podrazumijeva oblik omjera kada se koristi za procjenu rada radnika, zaposlenika ili sustava.

Razlozi za nagli rast korištenja DEA metode nalaze se u činjenici da je metodologija interdisciplinarno primjenjiva, a također je pogodna i u slučajevima kada ostali pristupi ne daju zadovoljavajuće rezultate zbog kompleksne ili nepoznate prirode veza između višestrukih inputa i outputa. [2]

Ukratko, DEA metoda omogućuje usporedbu učinkovitosti usporedivih jedinica unutar varijantnih rješenja.

## 2. PRINCIP RADA DEA METODE I ODREĐIVANJE DMU-A

### 2.1. Matematičko-statističke osnove DEA metode

Data Envelopment Analysis - DEA (hrv. Analiza omeđivanja podataka - AOMP ili AOP) je posebno dizajnirana tehnika za mjerenje učinkovitosti kompleksnih jedinica u kojima nije jasno izraženo koji ulazni parametri (inputi) u kojoj mjeri sudjeluju u stvaranju određenog izlaznog parametra (outputa). DEA se u hrvatskoj literaturi prevodi kao metoda analize omeđivanja podataka, a predstavlja tehniku ne parametarskoga linearnog programiranja koja se koristi za procjenu relativne učinkovitosti projekta ili efikasnosti jedinica za odlučivanje, odnosno donositelja odluka DMU (eng. Decision making units – DMU) koje imaju iste ulaze i izlaze, a međusobno se razlikuju prema razini resursa kojima raspolažu i razini aktivnosti unutar procesa transformacije [3]

Donositelji odluke (od engl. Decision Making Unit, DMU) su bilo koje proizvodne ili neproizvodne jedinice koje imaju iste inpute i iste outpute, a međusobno se razlikuju prema razini resursa kojima raspolažu i razinama aktivnosti unutar procesa transformacije. [2]

Pojam donositelj odluke (DMU) je uveden kako bi pokrio, na fleksibilan način, bilo kakav parametar koji utječe na efikasnost, pri čemu se svaki takav parametar vrednuje kao dio cjeline koja koristi slične ulazne podatke za proizvodnju sličnih rezultata. Ove procjene rezultiraju ocjenom uspješnosti koja se kreće između nule (minimalne vrijednosti, 0% učinkovitosti) i jedinice (maksimalne vrijednosti, 100% učinkovitosti) i predstavlja "stupanj učinkovitosti".

Pri postizanju tih rezultata DEA također identificira izvore i iznose neučinkovitosti za svaki ulaz i izlaz za svaku DMU. Također identificira DMU-ove (koji se nalaze na "granici učinkovitosti") koji su aktivno sudjelovali u postizanju tih rezultata. Subjekti za ocjenjivanje i procjenu efikasnosti su svi učinkoviti DMU-i i stoga mogu poslužiti kao mjerila na putu do poboljšanja u budućim izvedbama.

Definicija DMU je prilično otvorena kako bi se omogućila fleksibilnost u njezinoj uporabi u širokom rasponu mogućih primjena. Općenito se DMU smatra entitetom odgovornim za pretvaranje ulaznih parametara u izlazne i čije se performanse procjenjuju. U ekonomiji i gospodarstvu, DMU-i mogu uključivati banke, robne kuće i supermarkete, proširiti se na proizvođače automobila, bolnice, škole, narodne knjižnice i tako dalje. U inženjerstvu, DMU-i mogu biti u oblik zrakoplova ili njihovih komponenti kao što su mlazni motori. [1]

Zbog tako široke mogućnosti primjene ovaj rad razmatra korištenje DEA metode za procjenjivanje efikasnosti prometnih rješenja i ocjenjivanju varijantnih rješenja. U prometu DMU mogu biti razne veličine koje karakteriziraju određene prometne situacije kao što su na primjer konfliktni tokovi, propusna moć, LOS, rep čekanja itd. Točnije, DEA metoda omogućuje utvrđivanje relativne efikasnosti više usporedivih entiteta na osnovi odabranih ulaza (eng. input) i izlaza (eng. output).

DEA metoda mjeri relativnu efikasnost jedinica konstruiranjem empirijske granice efikasnosti ili granice proizvodnih mogućnosti (ovaj se termin koristi iako može biti riječ o analizi ne proizvodnoga sektora) na temelju podataka o korištenim inputima i ostvarenim outputima svih jedinica. Najuspješnije jedinice (engl. best practice units), one koje određuju granicu efikasnosti, dobivaju ocjenu »1«, a stupanj tehničke neefikasnosti ostalih jedinica računa se na osnovi udaljenosti njihova omjera input-output u odnosu na granicu efikasnosti. [2]

U znanstvenoj primjeni ocjena se dobiva iz teorijskih razmatranja, da bi se dobila vrijednost  $0 < x < 1$ , pri čemu se vrijednost jedan ne može dobiti. U primijenjenoj znanosti ili inženjerstvu koriste se alternativni pristupi. Na primjer, ocjena proizvoda koja se razvija za prodaju se procjenjuje usporedbom s "referentnim proizvodom" s vrijednošću jedinice koja se dobije kada su dobivene referentne vrijednosti jednake onima referentnog proizvoda te će se taj pristup primjeniti u ovom radu.

DEA proširuje definiciju omjera učinkovitosti da bi bilo moguće uvesti više izlaza i ulaza tj. više donositelja odluka. Ovo proširenje na višestruke ulaze i izlaze ostvaruje se bez korištenja unaprijed određenih težinskih koeficijenata ili drugih metoda, točnije nije potrebna apriorna identifikacija referentnih jedinica. Nastavljajući na taj način DEA identificira skup "najboljih izvođača" iz zbirke DMU-a i koristi ih za generiranje "rezultata učinkovitosti"

dobivenih vrednovanjem svakog od DMU-a. To se postiže identificiranjem točke na granici koja dodjeljuje vrijednost između  $0 < x < 1$  svakom od  $n$  DMU-a.

Ovaj rezultat dobiva se usporedbom performansi DMU-a koje treba procijeniti u odnosu na performanse svih DMU-a.

Kao što je dobiveno iz DEA metode, rezultat odražava niz parametara određenih iz podataka DEA metode - jedan za svaki izlaz i jedan za svaki ulaz - koji daje najvišu ocjenu učinkovitosti koju će podaci omogućiti u odnosu na vrijednosti  $0 < x < 1$  za svaki od  $DMU_j$   $j = 1, \dots, n$ , koji se razmatraju. Štoviše, ove ocjene koje se dodjeljuju ulazima i izlazima (koji se nazivaju "težinski koeficijenti" zbog razlike od uobičajenih fizikalnih procesa) imaju dodatne primjene. Težinski koeficijent se može koristiti, na primjer, za procjenu promjena u ocjeni učinkovitosti za DMU-a koji će pratiti promjenu odgovarajućeg ulaza ili izlaza. Budući da su ovi koeficijenti primjenjivi na sve DMU-ove, oni se također mogu koristiti za provođenje "analiza osjetljivosti" kako bi se utvrdile promjene u svim podacima (koji se razmatraju istodobno), što će rezultirati promjenom klasifikacije iz "učinkovitog" u "neučinkovito", ili obrnuto za svaku DMU, te također identificiraju raspone varijacija podataka koje se mogu dopustiti prije takve primjene. [1]

Za svaku jedinicu rješava se poseban problem linearnoga programiranja i određuje maksimalna efikasnost u odnosu na druge jedinice u referentnom skupu. Relativna efikasnost određene jedinice računa se kao omjer težinske sume izlaza i težinske sume ulaza. Težine izlaza i težine ulaza za svaku jedinicu određuju se tako da njezina mjera efikasnosti bude maksimalna, uz ograničenje da rezultat relativne efikasnosti ne može biti veći od jedan ( $\gg 1 \ll$ ). [2]

Iz navedenih objašnjenja primjene težina i multiplikatora dolazi do sljedećih definicija efikasnosti i neefikasnosti.

Definicija efikasnosti (prema Pareto-Koopmans definiciji) - DMU je efikasan ako i samo ako nije moguće poboljšati bilo koji ulaz ili izlaz bez pogoršanja bilo kojeg drugog ulaza ili izlaza.

Iz ovoga također proizlazi:

Definicija neefikasnosti - DMU-a je neefikasan ako i samo ako je moguće poboljšati neki ulaz ili izlaz bez pogoršanja nekih drugih ulaznih i izlaznih podataka.

Stoga karakterizacija neefikasnosti vrijedi ako i samo ako promatrane točke (tj. ulazno-izlazne vrijednosti - za DMU koji se ocjenjuje) su ispod granice učinkovitosti skupa promatranih vrijednosti koje DEA može generirati iz podataka o svim zapažanjima. Suprotno tome, geometrijske točke povezane s radom DMU-a kojima se procjenjuje efikasnost pomoću DEA metode, pokazat će se efikasnim ako i samo ako se nalaze iznad granice učinkovitosti. [1]

Tako definiran model maksimizira rezultat relativne efikasnosti svake jedinice s tim da skup težina koji se dobije mora biti moguć i ostvariv i za svaku drugu jedinicu u promatranom skupu. Dakle, određuje se najbolja moguća ostvariva granica proizvodnih mogućnosti, odnosno maksimalni output za svaku jedinicu uz danu razinu njezinih inputa.

DEA metoda se temelji na ekstremnim vrijednostima i svaku proizvodnu jedinicu uspoređuje samo s onim najboljima. Osnovna je pretpostavka pritom da ako određena jedinica može s  $X$  ulaznih resursa proizvesti  $Y$  izlaznih proizvoda, isto bi trebale moći učiniti i ostale jedinice ako rade učinkovito.

Središte analize leži u pronalaženju »najbolje« virtualne proizvodne jedinice za svaku realnu jedinicu.

Ako je virtualna jedinica bolja od originalne bilo da postiže više outputa s istim inputima ili da ostvaruje iste outpute s manje inputa od stvarne, tada je ova neefikasna.

Danas je u primjeni mnogo modela DEA metode koji se razlikuju s obzirom na izbor ulaznih i izlaznih parametara i s obzirom na opseg djelovanja (modeli koji pretpostavljaju konstantne i modeli koji pretpostavljaju varijabilne prinose), izbor geometrije granice skupa proizvodnih mogućnosti (po dijelovima linearna, log-linearna ili Cobb-Douglasova granica efikasnosti), izbor putanje projekcije neefikasnih jedinica na granicu efikasnosti (modeli usmjereni na smanjenje inputa i modeli usmjereni na povećanje outputa). Iako postoje razne varijacije DEA metode model CCR (po Charnes, Cooper i Rhodes) jedan je od osnovnih i najčešće primjenjivanih modela. [2]

## 2.2. Opis DEA metode

Znanstvenu osnovu za mjerenje učinkovitosti predložio je 1957. godine M.J. Farrell koji je za mjerenje tehničke (proizvodne) efikasnosti uzeo više ulaza koji sudjeluju u stvaranju jednog izlaza i definirao granicu efikasnosti uzevši u obzir najbolju praksu iz skupa analiziranih jedinica. Nakon dva desetljeća (1978.) njegove su ideje proširili Charnes, Cooper i Rhodes koji su predstavili kvantitativni model za procjenu relativne efikasnosti jedinica (DMU-a) u kojem je moguće obuhvatiti više ulaza i više izlaza pri čemu se u njihovom najpovoljnijem omjeru određuju ekstremne točke izlaza s obzirom na raspoložive ulaze (Cooper & Ray, 2008.). Tijekom godina, DEA metoda je postala važan operativni alat za analizu učinkovitosti u privatnome i javnome sektoru. [3]

Metodologija koja se koristi u ovom radu temelji se na linearnoj algebri, matricama te grafovima radi lakšeg prikaza osnovnih principa DEA metode. Prednost ovakvog pristupa je u tome što on vrlo prirodno i lako uspostavlja kontakte s metodama linearnog programiranja i konceptima na kojima se odvija razvoj ovog rada. [1]

Jednostavan primjer analize osam raskrižja s jednim ulaznim parametrom (protokom vozila u raskrižju), i jednim izlazom (kritičnom gustoćom) će poslužiti za tumačenje osnova DEA metode (Tablica 1).

Kritična gustoća [Kc] je gustoća pri kojoj je protok najveći ( $q = q_{max}$ ).

Protok [q] je ukupan broj prometnih entiteta (vozila/pješaka) koji prolaze kroz zadani presijek ili odsječak prometnice za vrijeme određenog vremenskog intervala. [4]

**Tablica 1:** Primjer DEA metode s jednim ulazom i jednim izlazom

DMU	A	B	C	D	E	F	G	H
Input/Protok (voz/km)	2	3	3	4	5	5	6	8
Output/Kritična gustoća (voz/h)	1	3	2	3	4	2	3	5
Učinkovitost raskrižja (CCR)	<b>0,5</b>	<b>1</b>	<b>0,667</b>	<b>0,75</b>	<b>0,8</b>	<b>0,4</b>	<b>0,5</b>	<b>0,625</b>

Izvor: [1]

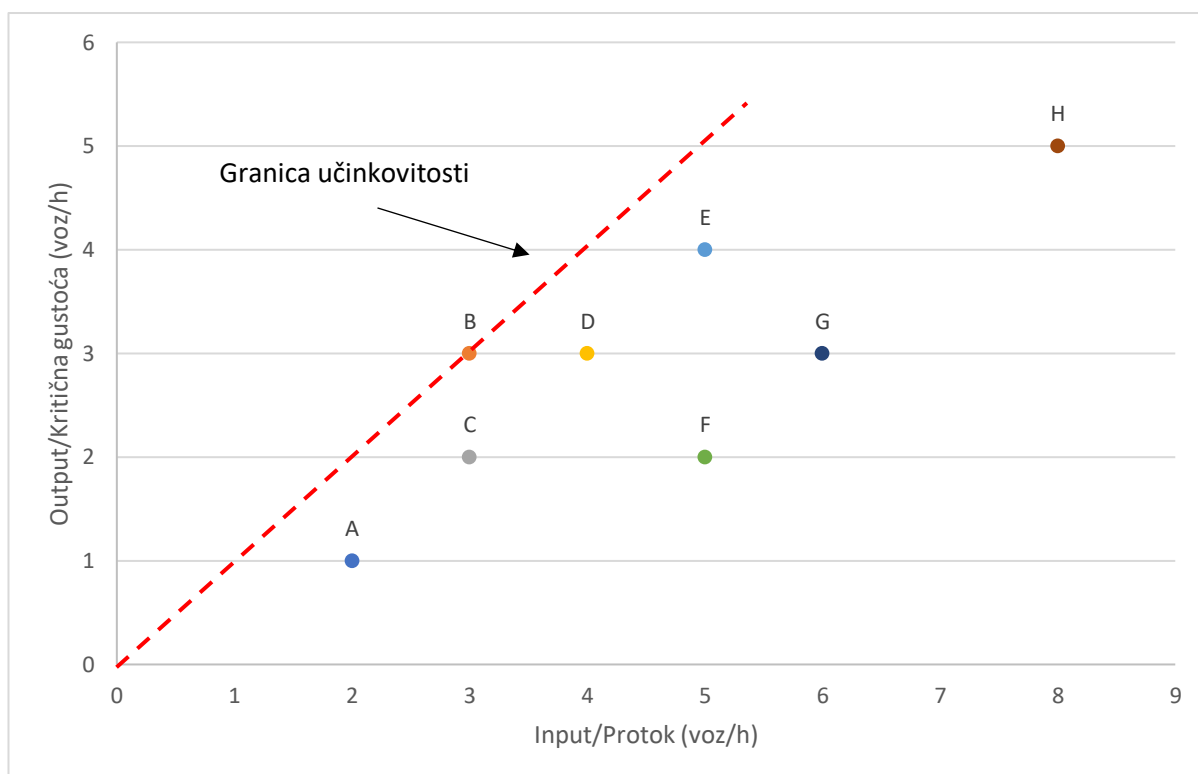
Metodom linearnog programiranja izračunata je relativna efikasnost svakog DMU-a u odnosu na druge iz skupa analiziranih i svakom neefikasnom je ponuđen referentni partner (eng. *benchmarking*) (Tablica 2).

**Tablica 2:** Rezultat CCR efikasnosti DEA metode

DMU	Efikasnost (CCR)	Referentni DMU
A	0,500	<b>B</b>
B	1,000	<b>B</b>
C	0,667	<b>B</b>
D	0,750	<b>B</b>
E	0,800	<b>B</b>
F	0,400	<b>B</b>
G	0,500	<b>B</b>
H	0,625	<b>B</b>

Izvor [1]

Samo je DMU B efikasan i kao takav je u referentna polazna točka za sva preostala promatrana raskrižja kao primjer dobre prakse. Prikaz na Grafikonu 1 se prikazuju geometrijske performanse u koordinatnom sustavu i granicu učinkovitosti koju u slučaju jednog ulaza i jednog izlaza predstavlja pravac koji polazi kroz ishodište kroz točku B.

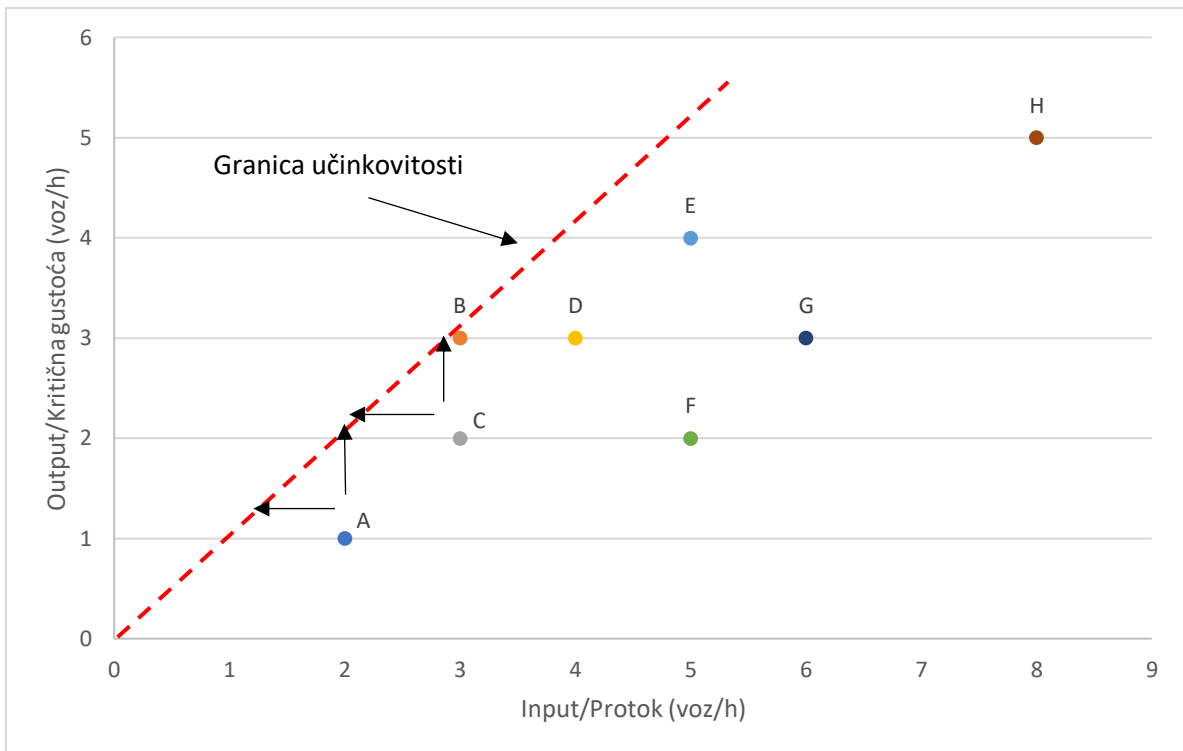


**Grafikon 1.** Prikaz granice učinkovitosti putem DEA metode

Vrijednosti relativne efikasnosti u Tablici 2 pokazuju što mora poduzeti svaka jedinica za projekciju na granicu učinkovitosti. Na primjer relativna učinkovitost za entitet A = 0,5 sugerira reduciranje ulaza na 1 ( $2 \times 0,5 = 1$ ) za ostvarivanje iste razine izlaza ili povećanje izlaza na 2 ( $1 \times 0,5 = 2$ ) s istim ulazima. Jednako tako relativna efikasnost za C = 0,667 sugerira smanjenje ulaza na 2 ( $3 \times 0,667 = 2$ ), odnosno povećanje izlaza na 3 ( $2 \times 0,667 = 3$ ).

Dakle na osnovi podataka o ulazima i izlazima, DEA metodom se ocjenjuje je li neka jedinica uspješna ili nije u odnosu na ostale jedinice koje su uključene u analizu. Ta je metoda razvijena za analizu relativne efikasnosti donositelja odluka (DMU), konstrukcijom granice efikasnosti i projekcijom svakoga DMU-a u odnosu na granicu.



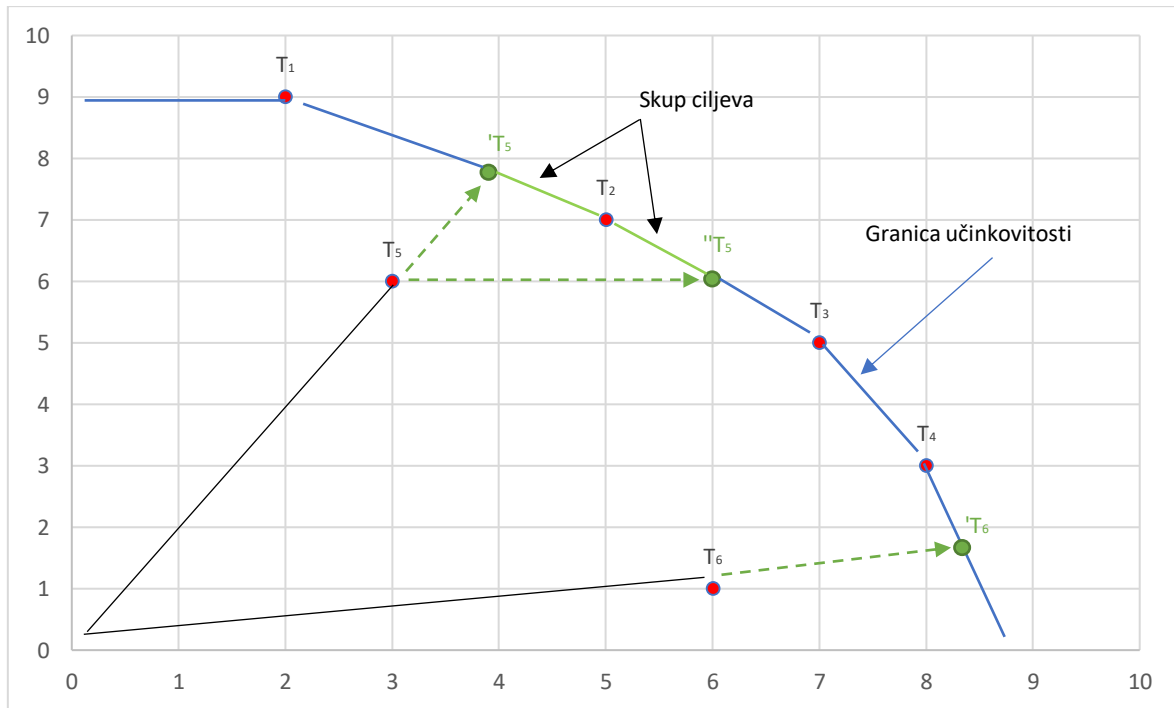


**Grafikon 2.** Projekcije na granicu učinkovitosti

Granica efikasnosti jest empirijski dobiven maksimum izlaza koji svaki DMU može ostvariti s raspoloživim ulazima. Analizira se svaki DMU i provjerava njegova mogućnost postizanja istih izlaza s manjom količinom ulaza, takozvano omeđivanje ulaza „odozdo“, imajući u vidu vrijednosti ulaza ostalih jedinica uključenih u analizu, kao i mogućnost postizanja boljih rezultata s istim ulazima ili omeđivanje izlaza „odozgo“ na osnovi vrijednosti rezultata ostalih jedinica.

Dakle DEA je tehnika matematičkoga programiranja koja daje informaciju je li neki entitet, na osnovi podataka o njegovim ulazima i izlazima, efikasan ili nije, uspoređujući ga s drugim entitetima koji su obuhvaćeni analizom. Za razliku od parametarskih metoda koje procjenjuju performanse nekoga entiteta u odnosu na prosječne performanse, DEA metoda je ta koja za svaku jedinicu uključenu u analizu izračunava njezine maksimalne mjere performansi u odnosu na druge dodjeljujući svakom pokazatelju optimalnu težinu. [1]

Grafikon 3. prikazuje DEA analizu u skupu od šest jedinica (P1, P2,..., P6) koje djeluju u sličnim okolnostima, koristeći se istom količinom resursa za proizvodnju različitih količina učinaka s proporcionalno promjenjivom varijablom ( $y_1$  i  $y_2$ ).



**Grafikon 3.** Granica učinkovitosti prema BCC modelu

Učinkovitije su one jedinice koje za određeni iznos ulaza (resursa) pružaju veći iznos izlaza (učinaka). DEA je identificirala jedinice  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  i  $T_4$  kao učinkovite i one određuju granicu učinkovitosti ispod koje se nalaze jedinice  $T_5$  i  $T_6$  koje su neučinkovite. Za jedinicu  $T_5$  primjeri dobre prakse su jedinice  $T_1$  i  $T_2$  koje ostvaruju veću količinu outputa, a skup ciljeva za  $T_5$  nalazi se u točki  $'T_5$ . Ti su ciljevi ostvarivi razmjernim povećanjem izlaza jedinice  $T_5$ , pri čemu postoje i drugi alternativni ciljevi za  $T_5$  ( $''T_5$ ). Za jedinicu  $T_6$  proporcionalno povećanje izlaza dovodi do ciljeva  $'T_6$ , međutim  $T_4$  unatoč tomu jasno dominira jer ostvaruje istu razinu  $y_1$ , ali veću razinu  $y_2$  izlaza. U tome slučaju povećanje izlaza mora biti dopunjeno proporcionalnim porastom izlaza  $y_2$ . U tome okviru moguće je procijeniti (ne)učinkovitost određenoga entiteta pomoću njegove udaljenosti do empirijske granice učinkovitosti.

Jedinice koje određuju granicu učinkovitosti su uspješne, a stupanj (ne)uspješnosti ostalih jedinica mjeri se na osnovi udaljenosti njihova ulaz/izlaz omjera (kontribucije) u odnosu na granicu uspješnosti. Dakle DMU koji se nalazi na granici je učinkovit dok su svi ostali ispod granice neučinkoviti. Neučinkoviti DMU svoju efikasnost postiže projekcijom na granicu efikasnosti, a nju može postići reduciranjem ulaza (resursa) ili povećanjem izlaza (rezultata). S obzirom na to da postoji velik broj mogućih poboljšanja u sferi ulaza i izlaza postoji i mnogo rješenja za pojedine neučinkovite DMU-ove kako bi se poboljšala učinkovitost. [3]

### 3. OSNOVNI MODELI DEA ANALIZE

Kao što je već spomenuto DEA metoda se konstantno razvija od njenog nastanka. Prema Cooperu primarni koncept mjerenja učinkovitosti donositelja odluka (DMU) formaliziran je u obliku matematičkoga modela razlomljenog linearnog programiranja koji se može transformirati u linearno programiranje koje se može izraziti sljedećim matematičkim izrazom:

$$\text{Max } h_0 = \sum_{j=1}^n u_j y_{jk0}$$

kao i:

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ik0} = 1$$

$$\sum_{j=1}^n u_j y_{jk0} \leq \sum_{i=1}^m v_i x_{ik0}$$

gdje je:

- $k$  broj jedinica odlučivanja
- $m$  broj ulaza (inputa)
- $n$  broj izlaza (outputa)
- $u$  težinski koeficijent izlaza
- $v$  težinski koeficijent ulaza

Tijekom korištenja ove metode u proteklih trideset godina razvijen je veći broj modela, ali u ovom će radu biti prikazani samo osnovni modeli koji se uobičajeno koriste u istraživanjima učinkovitosti: CCR i BCC modeli nazvani prema inicijalima svojih autora (CCR po Charnes Cooper Rhodes, a BCC po Banker Charner Cooperu). Osnovna se razlika između tih dvaju modela sastoji u pretpostavljenoj transformaciji inputa u outpute. [3]

### 3.1. Charnes Cooper Rhodesov model (CCR)

Ovaj je model vjerojatno najčešće korišten i najpoznatiji DEA model koji je zasnovan na pretpostavci konstantnih prinosa, što znači da svaka izvedivost aktivnosti ( $xy$ ) povlači izvedivost aktivnosti ( $x_t, y_t$ ) za svaki pozitivan broj  $t$ . Model su prvi predstavili Charnes, Cooper i Rhodes 1978. godine u članku objavljenome u *European Journal of Operational Research*, vol. 2, br. 6, str. 429–444, te je stoga i nazvan prema njihovim inicijalima.

Za svaki DMU formira se virtualni ulaz i izlaz prema (još nepoznatim) težinama ( $v_i$ ) i ( $u_j$ ):

$$\text{Virtualni ulaz} = v_1x_{1o} + \dots + v_mx_{mo}$$

$$\text{Virtualni izlaz} = u_1y_{1o} + \dots + u_sy_{so}.$$

Nakon određivanja inputa i outputa određuje se težinski koeficijent pomoću linearnog programiranja kako bi se maksimizirao omjer:

$$\frac{\text{virtualni izlaz}}{\text{virtualni ulaz}}$$

Optimalni težinski koeficijent varira od jednog DMU do drugog DMU-a. Dakle, "težinski koeficijenti" u DEA analizi su izvedeni iz podataka, umjesto da budu unaprijed određeni.

CCR model (eng. *Constant return to scale* CRS), izračunava ukupnu učinkovitost za svaku jedinicu u koju je uključena čista tehnička učinkovitost i efikasnost kao učinkovitost ovisna o obimu poslovanja pri čemu se tehnička učinkovitost i mjerila učinkovitosti spajaju u jednu vrijednost. U modelu se za svaku DMU jedinicu nastoji maksimalizirati tako da se svakoj varijabli odabranih pokazatelja dodjeljuje težinski koeficijent koji joj najviše odgovara. Dodjelom najpovoljnijih težinskih koeficijenata svakoj varijabli dobivaju se virtualni ulazi i izlazi.

Potrebno je pronaći nenegativne težinske koeficijente koristeći linearno programiranje tako da se maksimizira omjer virtualni output/virtualni input, uz ograničenja da njihov omjer ne može biti veći od jedan za svaki promatrani DMU. Autori Charnes, Cooper i Rhodes su predložili model za optimizaciju svake DMU koji se može izraziti kao:

$$\text{Max } h_k = \sum_{j=1}^n u_j y_{jk} / \sum_{i=1}^m v_i x_{ik}$$

uz uvjet da:

$$\sum_{j=1}^n u_j y_{jk} \leq \sum_{i=1}^m v_i x_{ik}$$

odnosno:

$$\sum_{j=1}^n u_j y_{jk} / \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} \leq 1$$

pri čemu:

$$u_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n; \text{ kao i } u_j \geq \varepsilon$$

$$v_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; \text{ kao i } v_i \geq \varepsilon$$

gdje je:

- $h_k$  relativna učinkovitost  $k$ -og DMU-a
- $k$  broj jedinica odlučivanja
- $m$  broj ulaza ( $x$ )
- $n$  broj izlaza ( $y$ )
- $v$  težinski koeficijenti ulaza ( $x$ )
- $u$  težinski koeficijenti izlaza ( $y$ )
- $\varepsilon$  mala pozitivna vrijednost (najčešće  $=10^{-6}$ ) [3]

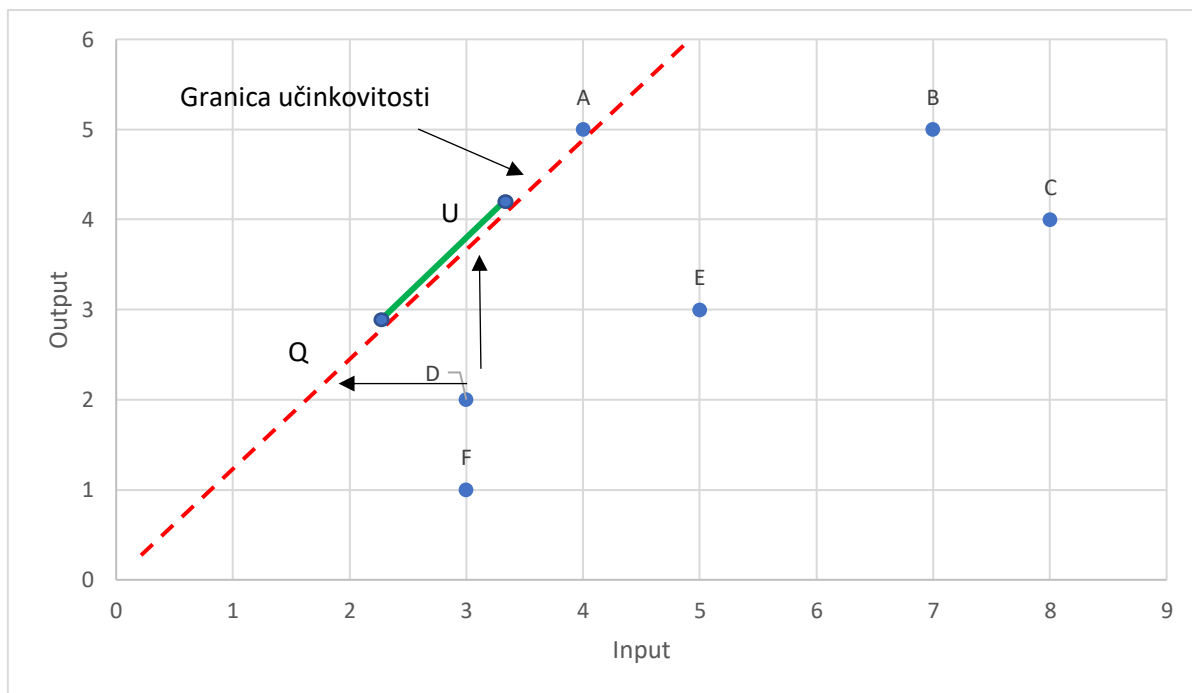
Za  $k$ -ti DMU se traži maksimizacija učinkovitosti uz uvjet da je težinska suma izlaza manja od težinske sume ulaza iz čega slijedi  $0 < h_k \leq 1$ . Ako je funkcija  $h_k = 1$  onda je  $k$ -ti DMU relativno učinkovit, a ako je manja  $h_k < 1$  onda je  $k$ -ti DMU relativno neučinkovit, a sama vrijednost  $h_k$  pokazuje koliko je potrebno relativno racionalizirati potrošnju resursa ili povećati rezultate da bi  $k$ -ti DMU postao učinkovit. [3]

S obzirom na podatke, mjerimo učinkovitost svakog DMU-a jednom i stoga trebamo n optimizacija, po jedan za svaki DMU koji se vrednuje. DMU koji se procjenjuje na bilo kojoj iteraciji bude označen kao  $DMU_0$  gdje je 0 raspon od 1, 2, ..., n. Rješavamo sljedeći problem frakcijskog programiranja za dobivanje vrijednosti za ulazne težinske koeficijente  $\{v_i\}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) i izlazne težinske koeficijente  $\{u_j\}$  ( $j = 1, \dots, 5$ ) kao varijable.

Određeni DMU se može smatrati učinkovitim ako ni jedna druga jedinica iz  $k$  skupa s njegovim optimalnim težinskim koeficijentima ne može ostvariti veću vrijednost izlaza za dati ulaz i takve jedinice definiraju granicu učinkovitosti. Drugim riječima učinkovitost svakog DMU-a je maksimizirana odabirom optimalnih težinskih koeficijenata za svaku varijablu, a DMU je učinkovit ako ne postoji ni jedan drugi DMU iz promatranog skupa, koji sa svojim optimalnim težinskim koeficijentima i njegovim ulazima postiže bolje izlaze. Težinski koeficijenti prema ograničenjima sadržanim u izrazu mogu imati samo nenegativnu vrijednost, a vrijednost  $\epsilon$  sprječava potpuno zanemarivanje varijable u izračunu relativne učinkovitosti.

Ograničenja znače da omjer "virtualnog izlaza" nasuprot "virtualnog ulaza" i ne smije prelaziti vrijednost od 1 za svaki DMU. Cilj je dobiti težinske koeficijente ( $v_i$ ) i ( $u_j$ ) koji maksimiziraju omjer  $DMU_0$ , DMU koji se ocjenjuje. Na temelju ograničenja, optimalna objektivna vrijednost je najviše 1. Matematičko ograničenje ne negativnosti nije dovoljno da djelomični izrazi imaju pozitivnu vrijednost. Ovu pretpostavku ne tretiramo u eksplicitnom matematičkom obliku u ovom trenutku. Umjesto toga, stavlja se u upravljačke pojmove pretpostavljajući da svi izlazi i ulazi imaju neku nultu vrijednost i da se to odražava u težinskim koeficijentima  $U_j$  i  $V_i$  koji su dodijeljene nekoj pozitivnoj vrijednosti.

Učinkovite DMU jedinice definiraju granicu učinkovitosti koja se u CCR modelu zbog pretpostavke konstantnih prinosa prikazuje linijom, a u primjeru s jednim ulazom i jednim izlazom u kojem granicu učinkovitosti definira DMU „A“ označena je pravcem (Grafikon 4.) koji ilustrira primjer analize učinkovitosti šest DMU jedinica. Neučinkovite jedinice se nalaze ispod granice učinkovitosti, a njihova projekcija na granicu učinkovitosti se postiže smanjenjem ulaza (inputa) ili povećanjem izlaza (outputa). Za DMU „D“ točka Q predstavlja projekciju na granicu učinkovitosti prema ulazno usmjerenom CCR modelu, a točka U prema izlazno usmjerenom CCR modelu. [3]



**Grafikon 4.** Prikaz granice učinkovitosti prema CCR modelu

Značajne promjene ulaza ili izlaza u praksi je teško ostvariti, stoga se traži kompromisno rješenje koje se nalazi na dužini između točke Q i U koja se postiže istovremenom racionalizacijom ulaza uz povećanje izlaza.

Ovaj model je ujedno najčešće korišten model u analizi efikasnosti (učinkovitosti), a dobiveni rezultati izražavaju ukupnu tehničku učinkovitost, a za čistu tehničku efikasnost koristi se BCC model.[3]



### 3.2. Banker Charner Cooperov model (BCC)

U slučaju rastućeg ili opadajućeg prinosa, kada proporcionalna promjena varijable ulaza rezultira više ili manje proporcionalnim povećanjem izlaza, koristi se BCC model DEA analize. Ime je dobio po autorima (Banker, Charnes i Cooperu) koji su ga prvi predstavili u članku objavljenome u Management Science (1984, Vol. 30/9, str. 1078-1092). BCC modelom mjerimo čistu tehničku efikasnost, odnosno on daje mjeru efikasnosti koja zanemaruje utjecaj opsega poslovanja tako što se  $j$ -ta jedinica DMU-a uspoređuje samo s jedinicama sličnoga opsega. On se može definirati sljedećim izrazom:

$$\begin{aligned} \text{Max } h_k &= \sum_{j=1}^n u_j y_{jk} + u_0 \\ \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} &= 1 \\ \sum_{j=1}^n u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} + u_0 &\leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \\ u_j &\geq \epsilon, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \text{ i } \quad v_i \geq \epsilon, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

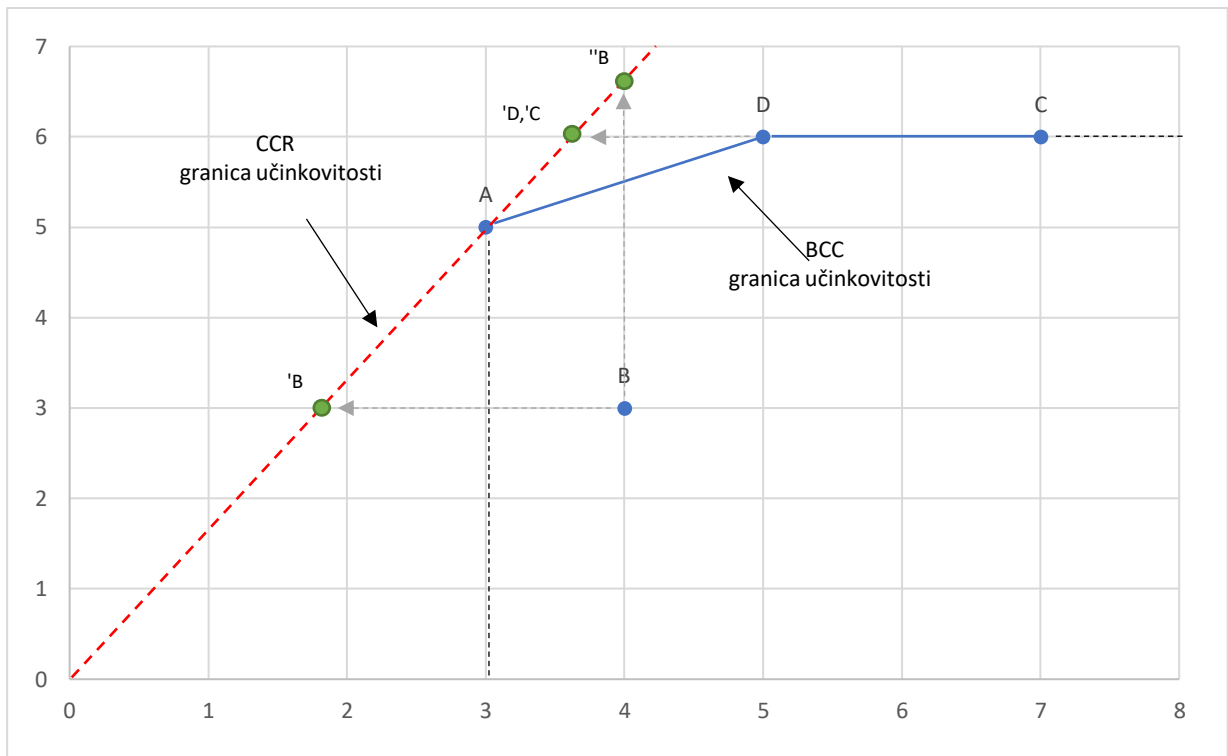
gdje je:

- $h_k$  rezultat učinkovitosti  $k$ -te jedinice DMU-a,
- $y_j$  predstavlja  $j$ -ti izlaz (output)  $k$ -tog DMU-a,
- $x_i$  je težinski koeficijent  $i$ -tog ulaza (inputa),
- $u_j$  je težinski koeficijent  $j$ -tog izlaza,
- $n$  broj izlaza
- $m$  broj ulaza
- $u_0$  je dodatna varijabla koja definira utjecaj opsega poslovanja. [3]

Dakle tim se modelom analizira učinkovitost jedinica koje ostvaruju varijabilni prinos u odnosu na opseg (eng. *Variable return to scale VRS*), a granica efikasnosti u ovome slučaju je konveksna krivulja. Prema Savić (2009.) za DMU koji definiraju granicu učinkovitosti dodatna varijabla definira prirodu poslovanja na sljedeći način:

- ako je vrijednost  $u_0 = 0$  onda se BCC model svodi na CCR model, a  $DMU_k$  djeluje s konstantnim prinosom s obzirom na opseg poslovanja,
- ako je vrijednost  $u_0 \leq 0$ ,  $DMU_k$  posluje s neopadajućim prinosom s obzirom na opseg poslovanja i
- ako je vrijednost  $u_0 \geq 0$ ,  $DMU_k$  posluje s ne rastućim prinosom s obzirom na opseg poslovanja.

U cilju lakšeg prikaza osnovnih razlika u interpretaciji učinkovitosti između tih dvaju osnovnih modela DEA metode, koristit će se jednostavan prikaz učinkovitosti pet jedinica s jednim ulazom i jednim izlazom prema grafikonu 5. Svaki DMU je prikazan u koordinatnom sustavu kao jedna točka koju određuje vrijednost ulaza i izlaza, a prikazane su i granice efikasnosti prema CCR i BCC modelu. Učinkovitost prema CCR modelu definira linija koja prolazi od ishodišta kroz točku A. [3]



**Grafikon 5.** Granica učinkovitosti prema CCR i BCC modelu

U slučaju kada se učinkovitost određuje na osnovi samo jednog ulaza i izlaza, granicu efikasnosti predstavlja pravac, jer model predviđa konstantan prinos. Ako se analizira CCR učinkovitost jedinica A i D može se zaključiti da jedinica A ostvaruje za 1,7 veći izlaz u odnosu na ulaz, dok je za DMU D taj odnos 1,2 : 1. To znači da je D neefikasna jedinica jer je njezin prinos na opseg manji od prinosa koji ostvaruje A. Ona bi mogla postati efikasna kada bi se projicirala na granicu učinkovitosti koju definira pravac OA (na točku 'D'), odnosno u ovom slučaju smanjenjem ulaza. Za razliku od CCR granice učinkovitosti, prema BCC modelu granicu učinkovitosti predstavlja linija koja spaja točke A i C. U ovom slučaju izračuna efikasnosti DMU C je učinkovit iako mu je odnos izlaza i ulaza 0,85 : 1. S obzirom na to da BCC model dopušta varijabilne prinose s obzirom na opseg i ne postoji ni jedna jedinica DMU-a koja bi imala sličnu ulazno-izlaznu kontribuciju s kojom bi se ona mogla usporediti, nju je model proglasio efikasnom. [3]

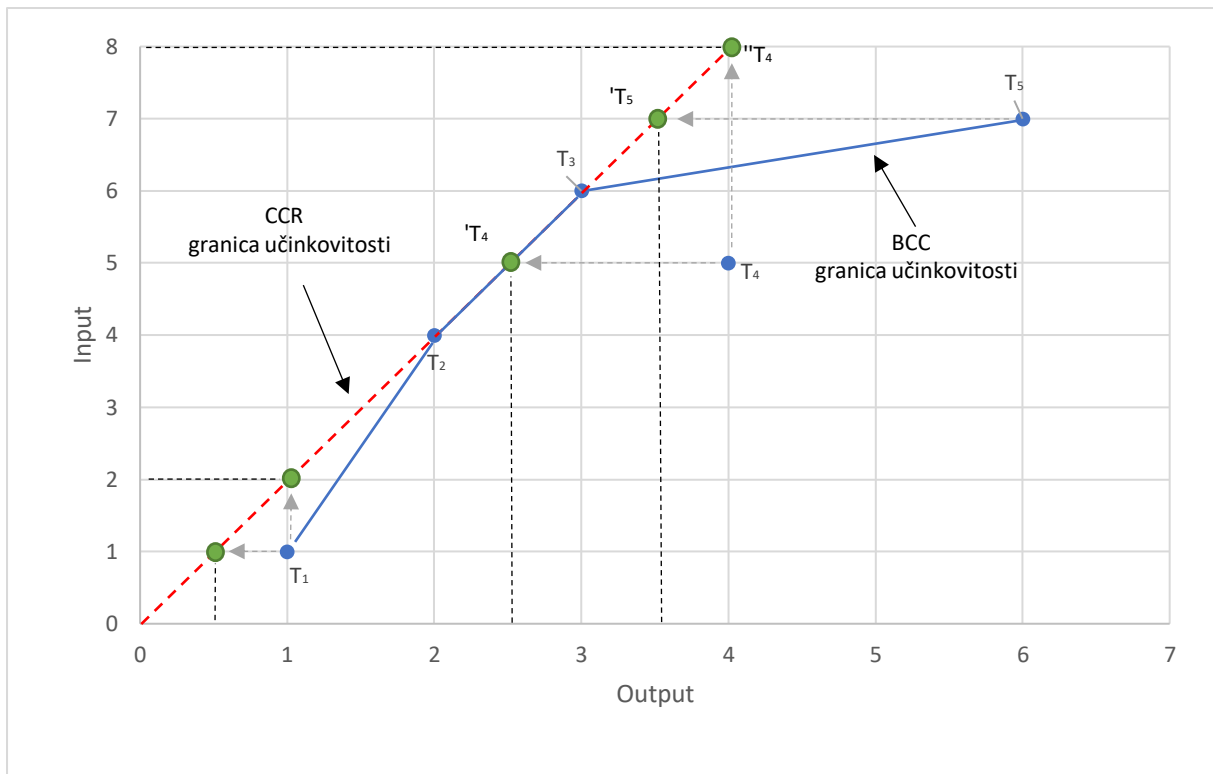
Isprekidana linija koja povezuje apscisu s dužinom AC i nastavlja se paralelno s apscisom ilustrira krivulju (konveksnu) granice efikasnosti prema BCC modelu DEA analize. Prema prikazu i analizi može se zaključiti da je učinkovitost prema CCR modelu uvijek manja ili jednaka od učinkovitosti koju daje BCC model, odnosno svaki DMU koji je učinkovit prema CCR modelu, učinkovit je i prema BCC modelu, dok obrnuto ne vrijedi. Dakle CCR model je restriktivniji i „strože „ ocjenjuje učinkovitost i pretpostavlja konstantan prinos s obzirom na dostupne ulazne podatke, a istovremeno iskazuje ukupnu tehničku efikasnost i efikasnost prema opsegu poslovanja, dok BCC model mjeri samo čistu tehničku efikasnost i daje najveću vrijednost za indekse učinkovitosti.

S jedne strane taj se oblik DEA analize koristi ako je potrebno ispitati stabilnost indeksa efikasnosti i trend efikasnosti, a s druge strane odrediti performanse promatranih jedinica za nekoliko vremenskih perioda i istovremeno pratiti njihovu dinamiku. Kao i u osnovnom modelu DEA analize (CCR model), BCC analiza se može odrediti prema usmjerenosti na povećanje izlaza ili smanjenje ulaza. [3]

### 3.3. Usmjerenost modela

Modeli DEA analize, BCC i CCR, mogu biti izlazno usmjereni (*IU*) i ulazno usmjereni (*UU*). Izlazno usmjerenje potiče ostvarivanje većih izlaza s ograničenim ulazima, a ulazno usmjerenje racionalno korištenje ulaza za postizanje iste razine izlaza. Dakle u *IU* modelima je neučinkovita svaka jedinica kojoj se može povećati bilo koji izlaz bez povećanja bilo kojeg ulaza i smanjenja nekoga od preostalih izlaza. U ulazno usmjerenim modelima je neučinkovita svaka jedinica obuhvaćena analizom kojoj je moguće smanjiti bilo koji ulaz bez smanjenja bilo kojeg izlaza i bez uvećanja bilo kojeg preostalog ulaza. [3]

U cilju simulacije teorijskih pretpostavki iznesenih modela i utvrđivanja učinkovitosti konstruiran je virtualni model s pet jedinica *DMU*-a s jednim ulazom i jednim izlazom. Matrica ulaza je zapisana kao  $X = (1, 2, 3, 4, 6)$ , a matrica izlaza  $Y = (1, 4, 6, 5, 7)$ . Za izračun stope učinkovitosti korišteni su *IU-CCR*, *UU-CCR* i *UU-BCC*. Na osnovi izračuna *IU-CCR* i *UU-CCR*, za jedinice *DMU*<sub>2</sub> i *DMU*<sub>3</sub> utvrđena je vrijednost funkcije 1 (jedan), što znači da su one učinkovite. (Grafikon 6.) Prema *IU-BCC* modelu, učinkovite su jedinice *DMU*<sub>1</sub>, *DMU*<sub>2</sub>, *DMU*<sub>3</sub> i *DMU*<sub>5</sub>.



**Grafikon 6.** Grafički prikaz ocjene učinkovitosti prema modelima CCR i BCC

Krivulja koja povezuje učinkovite jedinice DMU-a definiraju granicu efikasnosti. Ostale jedinice čija je vrijednost manja od 1 nalaze se ispod krivulje granične efikasnosti i one su neefikasne. Kao što prikazuje Tablica 3., modeli daju različit stupanj učinkovitosti određenim DMU jedinicama. Slijedom toga, različit je pomak kojim će one postići relativnu učinkovitost. S obzirom na to da su oba modela CCR analize izdvojila  $DMU_2$  i  $DMU_3$  kao učinkovite jedinice, oni definiraju granicu učinkovitosti (Grafikon 6.).

**Tablica 3:** Stupanj učinkovitosti prema CCR i BCC modelu

DMU	Input	Output	Stupanj učinkovitosti		
			CCR - UU	CCR - IU	BBC - UU
1	1	1	0,5	2	1
2	2	4	1	1	1
3	3	6	1	1	1
4	4	5	0,625	1,6	0,625
5	6	7	0,5833	1,7143	1

Izvor: [2]

Sve su ostale jedinice neučinkovite, odnosno njihov je rezultat ispod granice učinkovitosti. UU-CCR model sugerira neučinkovitim jedinicama racionalizaciju ulaza (smanjenje utroška resursa), u ovom slučaju DMU<sub>1</sub>, DMU<sub>4</sub> i DMU<sub>5</sub> će postati efikasne transformacijom ulaza na niže razine, u točke 'T<sub>1</sub>', 'T<sub>4</sub>' i 'T<sub>5</sub>'.

Da bi se izračunala razina ulaza za postizanje učinkovitosti neučinkovitih jedinica DMU-a možemo koristiti koeficijent relativne učinkovitosti i empirijski podatak o veličini ulaza.

Iz navedenoga slijedi da je učinkovita razina ulaza (X) jednaka:

- 1) za DMU<sub>1</sub> =>  $0,5 \times 1 = 0,5$  (točka 'T<sub>1</sub>')
- 2) za DMU<sub>4</sub> =>  $0,625 \times 4 = 2,5$  (točka 'T<sub>4</sub>')
- 3) za DMU<sub>5</sub> =>  $0,583 \times 6 = 3,5$  (točka 'T<sub>5</sub>')

Dakle neučinkovite jedinice će postati učinkovite ako smanje korištenje ulaza uz zadržavanje postojeće razine izlaza.

S obzirom na to da IU-CCR model inicira postizanje efikasnosti povećanjem izlaza, za neefikasne jedinice DMU<sub>1</sub> i DMU<sub>4</sub> potrebno je postići višu razinu izlaza transformacijom u točke "T<sub>1</sub>" i "T<sub>4</sub>" na granici učinkovitosti (Grafikon 6.). Vrijednosti učinkovite razine izlaza mogu se izračunati slično kao za učinkovitu razinu ulaza:

- 1) za DMU<sub>1</sub> =>  $1/0,5 = 2$  (točka "T<sub>1</sub>")
- 2) za DMU<sub>4</sub> =>  $5/0,625 = 8$  (točka "T<sub>4</sub>") [3]

Prag učinkovitosti izračunat pomoću UU-BCC modela je znatno niži, odnosno veći broj jedinica DMU-a je učinkovit prema tom modelu pri čemu granicu učinkovitosti definiraju učinkovite jedinice  $DMU_1$ ,  $DMU_2$ ,  $DMU_3$  i  $DMU_5$ . Zbog padajuće stope povrata granica učinkovitosti kod UU- BCC nije pravac nego konveksna krivulja.

Kao što je vidljivo iz prikaza na grafikonu 6, orijentacija modela DEA analize određuje pravac projekcije neučinkovite jedinice na granicu učinkovitosti. U ulazno usmjerenom modelu učinkovitost se povećava smanjenjem ulaza, a u izlazno usmjerenom modelu projekcija je orijentirana na proporcionalno povećanje izlaza. To grafički znači da se kod UU modela projekcija obavlja „nalijevo – horizontalno“ u koordinatnome sustavu, a kod IU modela „na gore – vertikalno“. Kod CCR modela bez obzira na orijentaciju, granica učinkovitosti je ista, samo što je projekcija na tu granicu različita.

Treba napomenuti da postoje brojne modifikacije osnovnih modela DEA metode koje su nastale kao rezultat prilagodbe specifičnim potrebama analize i nastojanjima da se unaprijedi sama metodika. [3]



### 3.4. Identifikacija performansi

Subjektivnost inženjera kod identificiranja ključnih performansi ulaza (eng. *inputa*) i izlaza (eng. *outputa*) konačno je ograničenje u korištenju DEA analize u svim područjima primjene. Iako je metoda pogodna za analizu u sustavima koji nemaju jasno definiranu transformaciju ulaza u izlaze i u kojima nije moguće jasno utvrditi koji su ulazi i u kojoj mjeri utjecali na koje izlaze, pretpostavka je da bi drugačiji izbor ulaza i izlaza generirao drugačiji rezultat. Zbog navedenoga ograničenja, za što objektivniji odabir ulaza i izlaza nužno je poznavanje procesa unutar entiteta koji su predmet analize. Značajna je i činjenica da je DEA analiza, kao i sve druge metode koje se koriste u sustavima koji imaju nedefinirane procese transformacije ulaze u izlaze, ograničena na manji broj indikatora koji se uzimaju u razmatranje iako na rezultate upravljanja utječe velik broj čimbenika. Neki autori sporadično navode utjecaj identificiranih performansi na dobivene rezultate, ali u svojim istraživanjima nisu nastojali uspostaviti sustav koji bi definirao odnos skupa pokazatelja i dobivenih rezultata. Iako ne postoje čvrsto zadani okviri ni mehanizmi odabira ulaza i izlaza, kao ni čvrstih veza koje odražavaju njihovu eksplicitnu povezanost ulazi i izlazi moraju u najboljoj mjeri odražavati zajedničke interese prometnog inženjera i analitičara. U postupku odabira relevantnih ulaza (resursa) i izlaza (učinaka) koje ostvaruje menadžment upravljanjem javnim resursima, svakako treba poći od osnovnih nadležnosti i ostvarenih učinaka. [3]

## 4. VARIJANTNA RJEŠENJA TEMELJENA NA ORGANIZACIJI I REGULACIJI PROMETNIH TOKOVA

DEA metoda je tehnika linearnog programiranja koja omogućuje objektivnu procjenu relativne učinkovitosti određenih organizacijskih jedinica. Te organizacijske jedinice poznate su kao jedinice za donošenje odluka (DMU).

DMU-ovi koriste identične inpute za proizvodnju identičnih outputa, a DEA analizom se pokušavaju identificirati najučinkovitije DMU jedinice. Također DEA analiza ukazuje na specifične učinkovitosti u preostalim DMU-ovima.

DEA reducira višestruke ulazno / izlazne parametre na jedinstveni virtualni input i virtualni output pomoću izračunatih vrijednosti težinskih koeficijenata dodijeljenih svakom ulaznom i izlaznom parametru. Omjer pojedinačnih virtualnih ulaza i pojedinačnih virtualnih izlaza daje analizu granice učinkovitosti koja je već prikazana u prijašnjim poglavljima. Točnije DEA se primjenjuje kako bi se ispitala efikasnost niza opcija.

Relativno mali broj DMU postavlja ograničenje na broj ulaza i izlaza koji se mogu koristiti u DEA analizi. Prema Cooper i sur. (2000) teoremima, ako je broj DMU-a manji od kombiniranog broja ulaza i izlaza, veliki dio DMU-a će biti identificiran kao učinkovit te će se razlike između njih slabije istaknuti. Stoga se sugerira da je broj DMU-a minimalno jednak zbroju inputa i outputa. Zbog toga se u ovom radu koriste 2 ulaznih parametara i 1 izlazni parametara.

Općenito kod izrade analiza učinkovitosti pomoću DEA metode, koriste se tri glavna ulazna parametra,

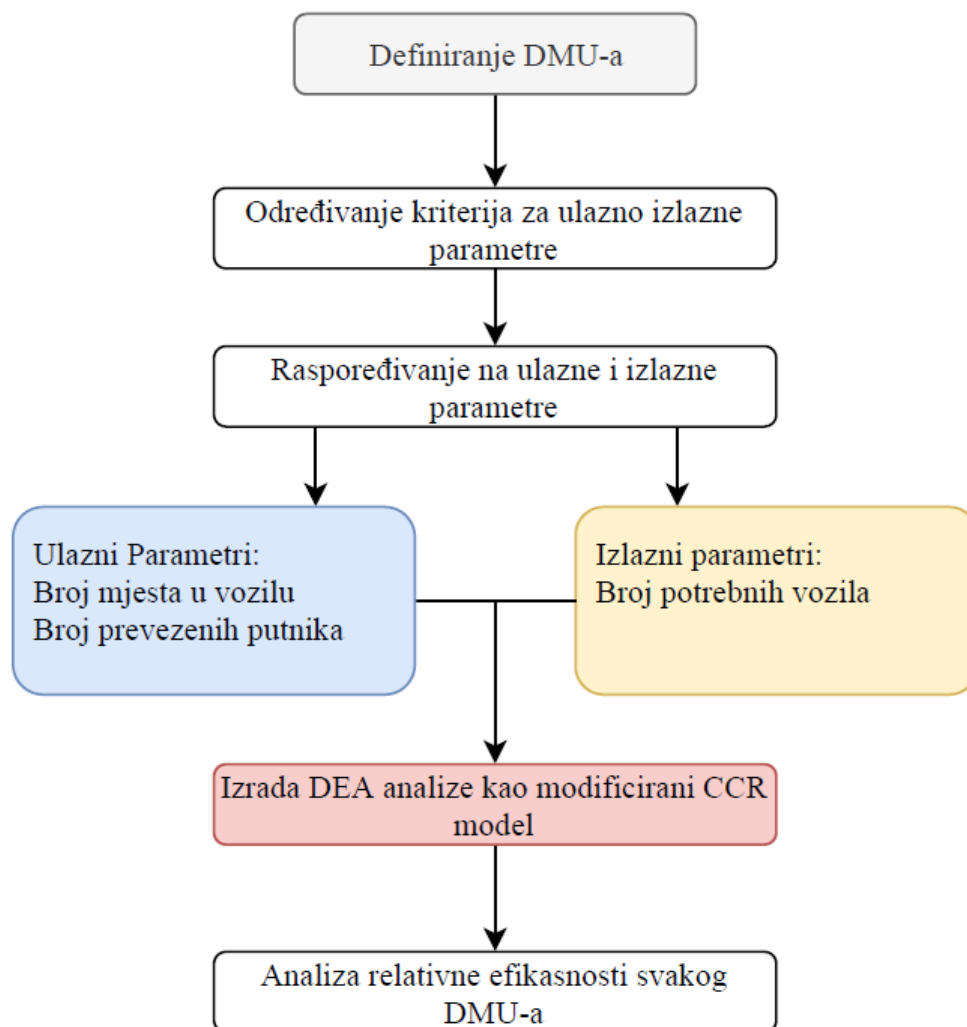
- 1) Utrošeni rad
- 2) Financijski aspekt
- 3) Potrošena energija

Dok se za izlazni parametar uglavnom koristi prevezeni broj putnika ili neki drugi konkretni parametar.[6]

Iako korištenje drugih ulaznih i izlaznih parametara ima svoje prednosti, ovi parametri su se kroz nekoliko istraživanja pokazali kao najbolji prilikom iskazivanja efikasnosti u većini istraživanja.

Za ovaj rad DMU jedinice i ulazni i izlazni parametri (input i output) su se određivali na sličan način.

**Tablica 4:** Izrada DEA modela



Izvor: [6]

Radi simplifikacije i lakšeg shvaćanja same metode DEA analize, u ovome radu se kao izlazni parametar uzima element kvalitativnog pokazatelja, koji se može mijenjati prema potrebi analize, te pokazati učinkovitost varijantnog rješenja.

Prvi ulazni parametar je broj prevezenih putnika. Ovo je uzeto kao prvi ulazni parametar da bi se dobila realna dimenzija prometne studije.

Drugi ulazni parametar je neki vid operativnih karakteristika prometne mreže. Ovdje se ponovo može uzeti bilo koji mjerljivi aspekt varijantnih rješenja sve dok je on u direktnoj ili indirektnoj korelaciji s izlaznim parametrima.

Također, zbog lakšeg shvaćanja principa DEA metode i smanjenja broja potrebnih DMU-a, nisu uzete konkretni parametri, nego relativne vrijednosti te je ekološki aspekt zanemaren. Kao što je već ranije navedeno konstrukcija analize bi trebala sadržavati otprilike jednak ili manji broj ulazno-izlaznih parametara od broja DMU-ova kako bi se dobili točniji podaci efikasnosti samog varijantnog rješenja.

U prometu, mnogi ulazni parametri proizvode mnoge izlazne parametre. Zbog toga izbor jedinica za odlučivanje i ulazno-izlaznih parametara je izrazito bitan. U slučaju drugačijih ulazno-izlaznih parametara može doći do drugačijih pokazatelja učinkovitosti. Točnije, DEA analiza nudi mogućnost izračunavanja mnogih aspekata učinkovitosti u vrlo različitim okruženjima. Uz tako veliki raspon mogućnosti DEA analize, dolazi i do kompleksnosti same studije.

Na primjer, primarna zadaća javnog gradskog prijevoza je prijevoz putnika, ali bitni segmenti su i zarada, ekološki utjecaj, pokrivenost gradskog područja, pristupačnost starijima itd. Zbog lakšeg prikaza rada DEA analize, ovaj rad uzima u obzir samo učinkovitost prijevoza putnika te kombinacija kvalitativnih i kvantitativnih pokazatelja.

Istraživanja organizacije prometnih tokova najčešće su fokusirana na rješavanje nekih od prometnih zahtjeva te ne omogućava utvrđivanje koji su ukupni krajnji efekti predloženih rješenja, a što je često primarni cilj.

Tvorci DEA metode (A. Charnes, W. W. Cooper, i E. Rhodes), koja je tijekom godina modificirana i proširivana, su potvrdili da pri ocijeni efektivnosti ulaznih ili izlaznih parametara (jedinica, vrijednosti i sl.) ne mora postojati objektivan postupak za određivanje vrijednosti težinskih koeficijenata.

Osnovni element DEA analize je potvrđivanje vrijednosti varijable čija se efektivnost procjenjuje, točnije, koji su to ulazi i izlazi koje treba uzeti u obzir i koje su najmanje dozvoljene vrijednosti za težinske koeficijente. Pored toga, jedinstveno se rješava problem skaliranja tako da se efikasnost pojedine veličine izražava kao broj između 0 i 1. Svaki DMU (jedinica odlučivanja) ima slobodu da odredi vrijednosti težinskih koeficijenata na način koji njoj najviše odgovara, odnosno tako da maksimizira svoju efikasnost. Naknadnom analizom moguće je pokazati koje su od razmatranih jedinica efektivnije, a koje nisu.

Granica efikasnosti u prometnom smislu predstavlja empirijski dobiven maksimum izražen kroz izlazne varijable gdje se svaka varijabla (indikator) može povezati sa zadanim ulazima i ponaša se kao ovojnica za neefikasne vrijednosti varijabli. Metoda analizira svaku vrijednost izlaza i provjerava je li njene ulazne parametre moguće obaviti odozdo (ostvarene izlaze postići s manjom količinom ulaznih parametara, odnosno s većom učinkovitošću) imajući u vidu vrijednosti ulaza preostalih varijabli, kao i da li je moguće njene izlaze obaviti odozgo (tj. provjeriti da li je sa zadanim ulazom moguće dobivati povoljnije izlaze) na osnovu vrijednosti izlaza preostalih varijabli. Ako je moguće DMU obaviti ona je relativno neefikasna, a ako nije ona sudjeluje u formiranju granice efikasnosti koja ovdje predstavlja ekvivalent za graničnu funkciju efikasnosti.

Postupak definiranja novog varijantnog rješenja počinje analizom postojećeg stanja i organizacije prometa s ciljem uočavanja nedostataka. Nova rješenja (varijante) predlažu prometni stručnjaci. Problem pronalaženja rješenja leži u nastojanju da se postigne što veća efikasnost prometne mreže pri određenim opterećenjima prometnih tokova (kad dolazi do zastoja u postojećoj organizaciji prometa). Dakle, nastoji se granica opterećenja što više povećati bez da dođe do anomalija u odvijanju prometnih tokova.

Temeljne odrednice za predlaganje i/ili poboljšanje varijantnog (alternativnog) rješenja ostvaruju se kroz kvalitetu podataka tj. poboljšanje vrijednosti odabranih jedinica odlučivanja na ulazima i/ili izlazima postavljenog modela vodeći se sljedećim načelima važnim za donositelja odluka:

- a) U početku se rabi model na temelju postojećeg stanja prometne mreže, a tek nakon detaljnog izučavanja problema definiraju se varijantna rješenja.
- b) Model se razvija tako da se pomoću njega mogu razmatrati usmjerenja i odnosi među prometnim tokovima, što se danas lako postiže u GIS (geoprostorni informacijski sustav) sučeljima zasnovano na vektorskoj grafici. Općeniti modeli se nisu pokazali praktični zbog velikoga broja zahtjeva vezanih za parametre koji su vektorski definirani u prostoru.
- c) Prije prijedloga varijantnog rješenja čija će se efikasnost komparirati utvrđuje se je li rješenje tehnički izvodivo, ekonomski vrijedno, te hoće li biti (organizacijski) prihvaćeno od lokalne zajednice (poželjno je da u njegovu razvoju sudjeluju i potencijalni korisnici).
- d) Dobivanje podataka pojedinih varijantnih rješenja odvija se usporedno s razvojem modela.
- e) Usavršavanje modela izvodi se na temelju uočenih nedostataka i eventualnih novih zahtjeva i varijabli koje se pojavljuju u razvojnom modelu, a radi njihove što bolje optimizacije u praksi (najčešće se radi o povećanom broju vozila na ulazima u prometnu mrežu koja se analizira).

Izračun relativne efikasnosti varijanti iz skupa rješenja prema kriterijima i opterećenjima koja su identična dobar je pokazatelj (indikator) relativnih odnosa naspram varijantama tj. DMU-ovima.

Odabir ulaza i izlaza je ključna faza definiranja modela.

Prvo, neophodno je da postoji veza između izlaza i ulaza pomoću koje se može dokazati da će se izlazi povećavati s povećanjem ulaza. Također, sve ulazne i izlazne vrijednosti moraju postojati za sve promatrane DMU i u svakom vremenskom intervalu bi trebalo da budu pozitivne (osobina pozitivnosti).

Drugo je pitanje, treba li se zadržati na postojećim podacima ili kreirati neke nove tipove varijabli. U općem slučaju poželjno je prihvatiti postojeće varijable. Za takve mjere već postoje raspoloživi podaci i nije potrebno definirati novi način prikupljanja podataka. Dok se u ovom radu koriste nove varijable radi lakšeg dokazivanja učinkovitosti DEA analize.

Treće, ulazi i izlazi moraju biti sveobuhvatni. To znači da oni moraju potpuno odražavati probleme u prometnoj mreži i njihova promjena uzrokuju smanjenje/povećanje učinkovitosti odvijanja prometnih tokova.

Četvrto, podaci ulaza i izlaza moraju biti kontrolirani kroz proces verifikacije tako da se s njima ne može lako manipulirati bez mogućnosti utvrđivanja greške. Pogrešni podaci ili nedostatak informacija mogu značajno uticati na rezultate i njihovu interpretaciju. Međutim, udaljenost između DMU-a i granice učinkovitosti, a time i njegove (ne) učinkovitosti - više nije deterministička veličina, već se određuje na temelju očekivane granice učinkovitosti.

## 5. ANALIZA MOGUĆNOSTI KORIŠTENJA DEA METODE U PROMETNIM STUDIJAMA

Svaka DEA analiza se sastoji od osnovnih elementa. Osnovni elementi DEA analize su DMU-i (jedinice za odlučivanje) te ulazni i izlazni parametri (input i output).

Kod prometnih studija i prometnih varijantnih rješenja postoje mnoge varijable koje se mogu koristiti za DEA analizu te varijantna rješenja mogu biti ocjenjivana na mnogo načina i s bezbroj kriterija. Zbog toga je dobar izbor DMU-a i ulazno-izlaznih parametara ključan za dobro uravnoteženu procjenu svih varijantnih rješenja.

Prednost DEA analize je ta što može usporediti varijable i rješenja koja su tipičnim načinom usporedbe ne usporedivi. Iz tog razloga u ovom radu je uzeta kombinacija kvalitativnih i kvantitativnih pokazatelja prometnog rješenja da bi se pokazala mogućnost DEA analize kao alat za procjenu varijantnih rješenja u prometu. U ovom radu će biti prikazana jednostavna varijacija osnovnog CCR modela DEA analize kako bi se najbolje opisala mogućnost korištenja u prometne svrhe.

Kao DMU prikazat ćemo imaginarna varijantna rješenja koja se međusobno neznatno razlikuju i kod kojih nije jednostavno deducirati najbolje varijantno rješenje. DMU su bilo koje proizvodne ili neproizvodne jedinice koje imaju iste inpute i iste outpute, a međusobno se razlikuju prema razini resursa kojima raspolažu i razinama aktivnosti unutar procesa transformacije. Unutar projekta ovog rada, DMU jedinice će biti prikazane kao pokazatelj uspješnosti. Najbolje ocijenjeni, tj. najučinkovitiji DMU-ovi će direktno pokazati uspješnost i učinkovitost projektnog rješenja.

Jedinice za odlučivanje koje se koriste u ovom radu simplificirane su za lakši prikaz same DEA metode te se na njihovo mjesto može umetnuti bilo koja kvantitativna ili kvalitativna mjerna jedinica ili parametar. Cilj je razviti model optimizacije i procjene varijantnih rješenja, polazeći od ključnih premisa modela DEA i načela organizacije i teorije regulacije prometnih tokova.



## 5.1. Pokazatelji uspješnosti

Svaki projekt, bilo prometni ili ne, zahtjeva ocjenu uspješnosti. Ocjena uspješnosti se najbolje prikazuje pokazateljima uspješnosti.

Pokazatelji uspješnosti predstavljaju kvalitativna i kvantitativna mjerenja outputa (kratkoročna mjerenja rezultata) te mjerenja ishoda (dugoročno mjerenje ishoda i učinaka) projekta, programa ili sustava. Pomoću njih inženjer određuje referentnu vrijednost svoje izvedbe odnosno provodi usporedbu rezultata studije. Pokazatelji uspješnosti učinkoviti su samo kada se koriste kao dio koherentna niza inputa, procesa i pokazatelja outputa. S obzirom na to da se u prometu provode različite aktivnosti i pokazatelji te su, kao takav, usmjerene k ostvarenju višestrukih ciljeva, za identificiranje i provedbu velikog broja pokazatelja uspješnosti nužno je obuhvatiti cjelokupno područje djelatnosti. Primjeri često korištenih pokazatelja uspješnosti koji obuhvaćaju različite aktivnosti ustanove uključuju: vrijeme putovanja, broj prevezenih putnika, prosječnu brzinu putovanja, cijenu projekta, zadovoljstvo korisnika, sigurnosne i ekološke pokazatelje, itd. Pokazatelji uspješnosti povezani su s procesom određivanja referentnih vrijednosti te se utvrđuju kroz posebne analize kako bi postigli najbolji učinak u komparativnoj analizi.

Pokazatelje uspješnosti najbolje možemo podijeliti na kvalitativne i kvantitativne pokazatelje.

Kao što pojam označava, kvantitativni pokazatelj označava količinu. Količina može biti čisti broj, indeks, omjer ili postotak. Kvantitativni pokazatelji se široko koriste u razvojnim programima i projektima jer daju vrlo jasnu mjeru stanja i brojčano su usporedivi. To omogućuje inženjerima i projektantima da uspoređuju performanse ili postignuća dva ili više programa ili projekata. Štoviše, to im omogućuje i usporedbu statusa u različitim vremenima.

Najčešće se preferiraju kvantitativni pokazatelji, jer za njihovu kvantifikaciju ne trebaju osjećaji ili prosuđivanje. Samo su potrebne mehaničke metode za koje se teoretski očekuje da će dati iste rezultate, ali bez obzira tko ih mjeri.

Kvalitativni pokazatelji ne pokazuju brojčane mjere kao takve. Umjesto toga, oni prikazuju status nečega u kvalitativnijem smislu. U mnogim slučajevima, kvalitativni indikatori nisu preferabilna opcija nasuprot kvantitativnim. Ali u nekim slučajevima optimalnije stanje rješenja bolje se interpretira kvalitativnim pokazateljem nego kvantitativnim. Na primjer, zadovoljstvo korisnika javnog gradskog prijevoza ne može se mjeriti u strogim kvantitativnim crtama. Ali mogu se ocjenjivati na temelju kvalitativnih pokazatelja. Pokazatelji funkcioniranja varijantnog rješenja, iako se mogu procijeniti kvalitativno i kao takvi se mogu ocijeniti. [8]

Kvalitativni pokazatelji, koji obuhvaćaju prosudbe ili percepcije ostvarenih rezultata, omogućuju nužnu nijansu i dubinu u praćenju i evaluaciji projekta. Osobito u kombinaciji s kvantitativnim mjerama, kvalitativni pokazatelji daju potpunije i bogatije razumijevanje promjena koje se ocjenjuju.

Operativne karakteristike se uzimaju kao kvantitativni pokazatelj te one u kombinaciji s kvalitativnim pokazateljima mogu prikazati cjelinu varijantnih rješenja. Kao operativne karakteristike u prometu možemo uzeti bilo koje elemente stanja sustava, elemente upravljanja sustavima, parametre prometne infrastrukture, prometne potražnje i ponude itd. Također svi pozitivni i negativni direktni i indirektni utjecaji se mogu uključiti u analizu.

Kod izrade DEA analize, pogotovo kad se koriste ne tipični parametri usporedbe, potrebno je pravilno izregulirati ulazne i izlazne parametre. Izlazni parametri trebaju, direktno ili indirektno, biti zavisni o ulaznim parametrima da bi promjena inputa rezultirala promjenom outputa.

Primjenom balansirano i sveukupnog pristupa, DEA metoda identificira najuspješnije i najučinkovitije inpute i outpute te stvara rješenje prometnog problema uz rangiranje varijantnih rješenja.

Rezultati učinkovitosti rangiranih rješenja daju se kao relativne vrijednosti u odnosu na ulaze i izlaze. Varijable koje se analiziraju zbog njihove važnosti za učinkovitost i uspješnost varijantnih rješenja predstavljene su kao jedinice donošenja odluka.

## 5.2. DEA analiza kod sukobljavanja prometnih tokova

Presijecanje, ulijevanje i odlijevanje, kao važni odnosi među prometnim tokovima, događaju se na raskrižjima i direktno je u funkcionalnoj vezi s usmjerenjem prometne mreže koja utječe na odabir putanje kretanja vozača. Ako takva usmjerenja prometa nisu pravilno postavljena, dolazi do bespotrebnog presijecanja prometnih tokova i činjenice da mreža nije podjednako opterećena, što obično rezultira uskim grlom na određenim elementima.

Proučavanjem (opažanjem) odnosa među prometnim tokovima dolazi se do spoznaje o nedostacima vođenja prometnih tokova. Takve spoznaje osnova su za daljnja strateška opredjeljenja, tj. polazište za organiziranje prometnih tokova u varijantnim rješenjima, odnosno primjenu metoda kojima će se minimizirati suvišna presijecanja. Reorganiziranjem prometnih tokova (alternativnim rješenjima) znatno se može poboljšati stanje u prometu. Primjer primjene varijabli o presijecanju prometnih tokova prikazan je u radu: *Data Envelopment Analysis for determining the efficiency of variant solutions for traffic flow organisation* (Budimir D., Šoštarić M., Vidović K., FPZ, 2019.) [8].

Primjena DEA metode omogućuje identifikaciju i odabir najboljeg DMU-a iz skupa usporedbenih jedinica. DEA metoda također omogućuje usporedbu manje učinkovitih jedinica s najboljim DMU-ovima na temelju analize ulaznih i izlaznih parametara modela. Korištenjem ispravnih DMU-a, DEA metoda može ponuditi alternativno rješenje prometne mreže kroz identifikaciju koeficijenta nepotrebnog križanja prometnih tokova. U analizi se DMU-ovi definiraju kroz varijantna rješenja, dok se koeficijenti sukobljavanja prometnih tokova definiraju prema analiziranim rutama uzimaju te se uzimaju kao izlazni parametri. Ulazni parametri se mogu definirati kao broj vozila u mreži kroz trajanje vršnog sata. Varijanta rješenja definirana su kroz varijacije usmjeravanja i regulacije prometa i relevantna su za procjenu učinkovitosti - kvalitete prometne mreže.[8]

### 5.3. Izrada DEA modela

Izradi modela DEA analize se pristupa na sljedeći način. Prvo se određuje broj DMU-ova, točnije varijantnih rješenja. Odlučeno je korištenje 5 DMU-ova s 3 ulazno izlazna parametra.

Sljedeći korak je određivanje broja ulazno izlaznih parametara. Za prikaz korištenja DEA metode odabrano je 2 ulazna i 1 izlazni parametar. Kao što je već ranije napomenuto broj DMU-ova bi trebao biti jednak ili veći od broja ulazno-izlaznih parametara.

Kada se odredi broj ulazno izlaznih parametara, sljedeći je korak određivanje samih parametara.

**Tablica 5.** Tablica DEA analize

	Ulazni parametri		Izlazni parametri
DMU	Broj prevezenih puntnika	Operativne karakteristike	Kvalitativni pokazatelji
No. 1	34	91	81
No. 2	88	73	76
No. 3	72	65	77
No. 4	38	93	86
No. 5	51	82	74

Nakon što su određeni DMU-ovi, broj i veličine ulazno izlaznih parametara, postavlja se DEA analiza.

Prvi korak je određivanje težina za izračun težinskih koeficijenata. U ovom koraku dolazi do korištenja Solver dodatka za windows excel.

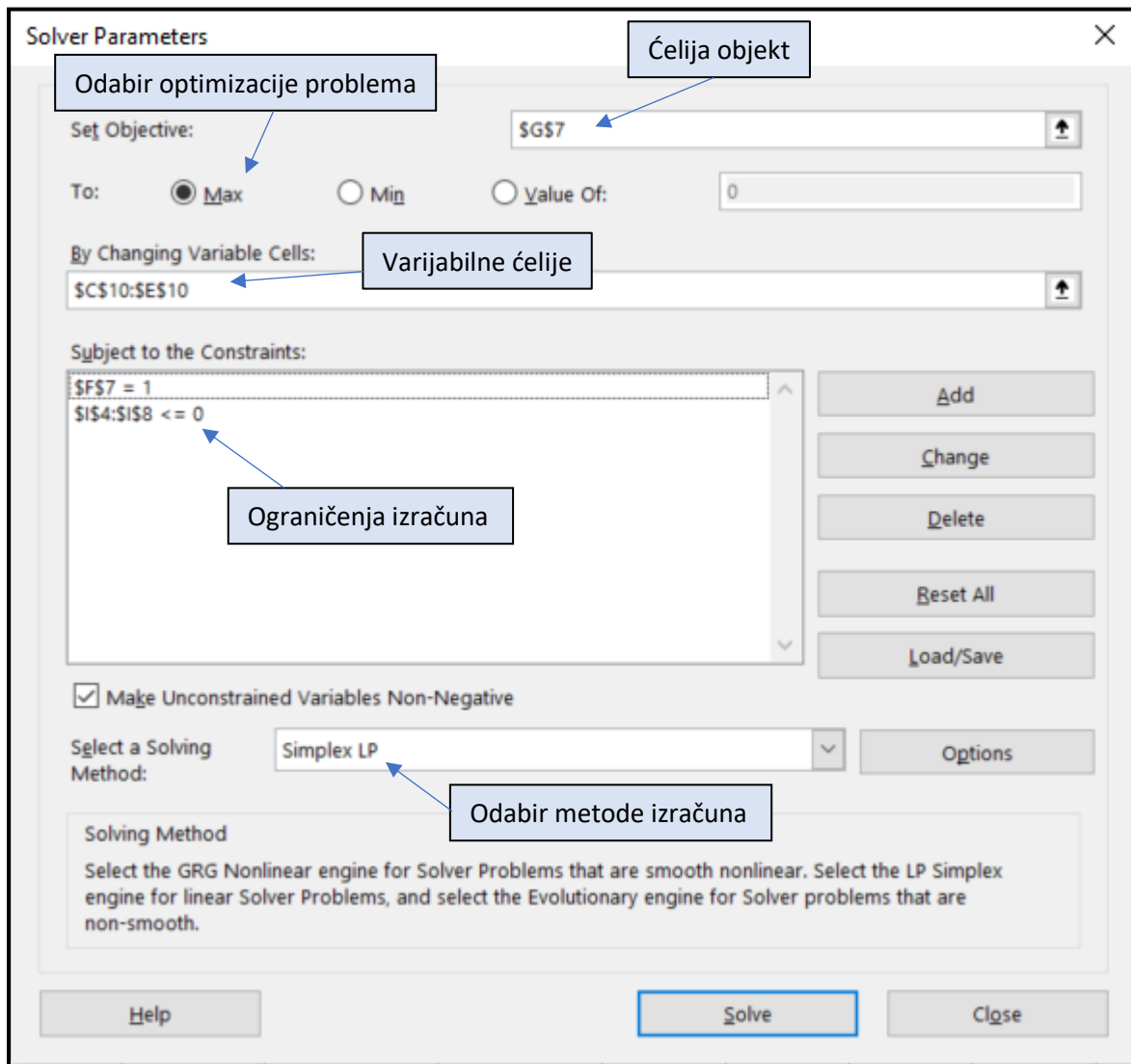
Solver je programski dodatak za Microsoft Excel koji se koristi za izračunavanje what-if problemskih zadataka. Upotrebljava se kada je potrebno pronaći optimalnu (minimalnu ili maksimalnu) vrijednost za formulu u nekoj ćeliji. Ta ćelija se naziva ćelija objekt. Za tu ćeliju Solver izračunava određenu vrijednost, poštujući zadane uvjete ili ograničenja jednom od 3 metode izračuna.

U slučaju DEA analize koristi se LP simplex metoda, odnosno metoda linearnog programiranja te budući da je sama DEA analiza zasnovana na linearnom programiranju, ovo je jedan od mogućih alata za njezinu implementaciju.

Solver u svoj izračun uključuje određenu grupu ili matricu ćelija koje nazivaju ćelije varijable. Te ćelije sadrže sve podatke i ograničenja koja su potrebna za rješenje linearnog problema te se ti podaci i ograničenja koriste za izračunavanje formula u ćeliji objekta. Solver određuje iznos varijabilnih ćelija da zadovolji uvjete ćelija ograničenja te izračunava tražen podatak ćelije objekta.

Jednostavnije rečeno, pomoću Solvera možete odrediti maksimalne ili minimalne iznose određenih ćelija promjenom drugih, za to predviđenih ćelija. U ovom slučaju može izračunati složen linearni problem DEA analize s nekoliko varijabilnih ćelija i ograničenja te prema tim podacima izračunava iznos težina za težinske koeficijente DMU-a.[9]

Za svaki DMU potrebno je posebno postaviti parametre Solvera. Na slici 1. prikazan je primjer postavke solvera za izračun DMU-a 4. Kod parametara postavaka Solvera za različite DMU-ove potrebno je obratiti posebnu pažnju za postavljanje ograničenja za težinski koeficijent izlaza te na ćeliju objekta, jer se one mijenjaju kod svakog izračuna učinkovitosti DMU-a. Varijabilne ćelije se mijenjaju kod svakog izračuna DMU-a te se one ne mijenjaju u samim postavkama Solvera.



**Slika 1.** Primjer postavaka parametara u Solveru

Prilikom izrade DEA analize, za ćeliju objekta potrebno je uzeti težinski koeficijent izlaznog parametra DMU-a koji je trenutno u analizi. Kako je prikazano na slici 1., rješava se optimizacija DMU-a 4. Točnije, težinski koeficijent izlaznog parametra DMU-a 4 se nalazi u ćeliji G6.

Za analizu je odabran pristup maksimizacije outputa, pokušava se dobiti što veći izlazni parametar bez povećanja ulaznih parametara. Taj se element određuje u odabiru optimizacije problema. Sama DEA analiza se može vršiti kao maksimizacija outputa ili kao minimizacija inputa. Odabir željenog pristupa je prema preferencijama prometnih inženjera uključenih u taj problemski zadatak.

Sljedeći korak programiranja Solvera je određivanje ograničenja. DEA analiza je bazirana na ideji iteracije. Točnije ponavljanja identičnog postupka za svaki DMU. Ideja je postaviti taj DMU kao najbolji te prema tim parametrima ocijeniti sve ostale DMU-ove. To se računa za svaki pojedinačni DMU.

Nakon što se postave svi parametri ograničenja i nakon što se unesu sva potreba polja, odabire se metoda rješavanja unutar Solvera. Solver nudi 3 opcije računanja,

- 1) GRG nonlinear – za rješavanje nelinearnih problema
- 2) Simplex LP – za rješavanje linearnih jednadžbi
- 3) Evolutionary – za rješavanje problema evolucijskih algoritama

DEA analiza u svojoj osnovi koristi frakcijske algoritme koji se mogu postaviti kao linearni algoritmi. Nakon što se problem svede na linearnu jednadžbu, može se početi analizirati. Prema tome, Solver za DEA analizu koristi Simplex LP metodu izračuna.

Solver u konačnici izbacuje težine svakog ulaznog i izlaznog parametra.

Kada se dobiju težine, može se početi popunjavati ostatak potrebnih parametara.

Sljedeće na redu je određivanje težinskih koeficijenata inputa i outputa. Težinski koeficijenti se računaju pomoću dobivenih težina pomnoženih s veličinama ulaznih i izlaznih parametara. Svaki DMU u svakoj iteraciji ima nešto drugačiji težinski koeficijent jer u svakoj iteraciji se drugi DMU razmatra kao najučinkovitiji.

Nakon težinskih koeficijenata računa se efikasnost kao jednostavni razlomak težinskog koeficijenta izlaza kroz težinski koeficijent ulaza. Učinkovitost je maksimalna kada je ulaz jednak izlazu, a maksimalna dopuštena učinkovitost je 1. Kao što je vidljivo na tablici 6 maksimalnu učinkovitost može imati jedna ili više DMU-a, te se učinkovitost DMU-a razlikuje kod optimizacije različitih DMU-a. Na tablici 6 je prikazana optimizacija DMU-a 1 gdje maksimalnu učinkovitost imaju i DMU 1 i DMU 4. Dok je na tablici 9 prikazana optimizacija DMU-a 2 te je maksimalno učinkovit samo DMU 3.

Određivanje težinskih koeficijenata nije uvijek jednostavno, te svaki DMU koeficijente definira prema ograničenjima postavljenim za njegovu iteraciju. U nekim metodama težinski koeficijenti imaju presudan utjecaj na rezultat. Kao posljedica toga, uvedene vrijednosti ne jamče nužno „ispravno rješenje“ i potrebna je potpuna analiza kako bi se razumjelo ponašanje rezultata u ovisnosti o mogućim stvarnim varijantama kriterija. Točnije, DEA analizu je potrebno gledati u cjelini.

**Tablica 6.** Parametri izračuna učinkovitosti DMU 1 (1/2)

	Ulazni parametri		Izlazni parametri
DMU	Broj prevezenih puntnika	Operativne karakteristike	Kvalitativni pokazatelji
<b>No. 1</b>	<b>34</b>	<b>91</b>	<b>81</b>
No. 2	88	73	76
No. 3	72	65	77
No. 4	38	93	86
No. 5	51	82	74
	u1	u2	v
Varijable	0,01222	0,00642	0,01235

**Tablica 7.** Parametri izračuna učinkovitosti DMU 1 (2/2)

Težinski koeficijenti		Učinkovitost	Odstupanje
Input	Output	<b>DMU 1</b>	
<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	0,00
1,54	0,94	0,61	-0,61
1,30	0,95	0,73	-0,35
<b>1,06</b>	<b>1,06</b>	<b>1,00</b>	0,00
1,15	0,91	0,79	-0,24



**Tablica 8.** Parametri izračuna učinkovitosti DMU 2 (1/2)

DMU	Ulazni parametri		Izlazni parametri
	Broj prevezenih puntnika	Operativne karakteristike	Kvalitativni pokazatelji
No. 1	34	91	81
<b>No. 2</b>	<b>88</b>	<b>73</b>	<b>76</b>
No. 3	72	65	77
No. 4	38	93	86
No. 5	51	82	74
	u1	u2	v
Varijable	0,00000	0,01370	0,01156

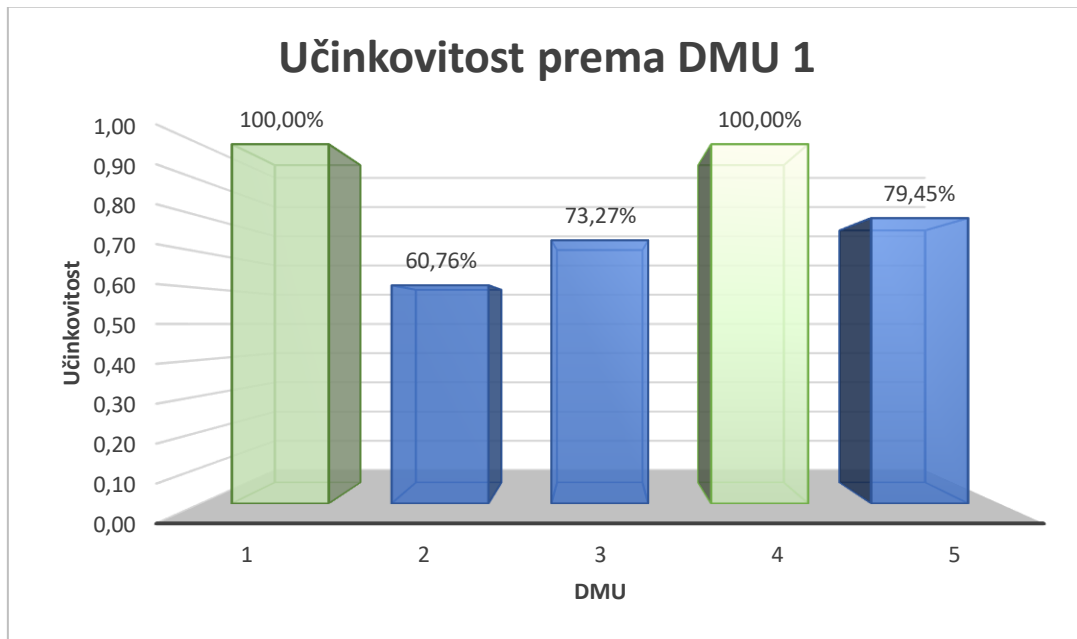
**Tablica 9.** Parametri izračuna učinkovitosti DMU 2 (2/2)

Težinski koeficijenti		Učinkovitost	Odstupanje
Input	Output	<b>DMU 2</b>	
1,25	0,94	0,75	-0,31
1,00	0,88	0,88	-0,12
<b>0,89</b>	<b>0,89</b>	<b>1,00</b>	0,00
1,27	0,99	0,78	-0,28
1,12	0,86	0,76	-0,27

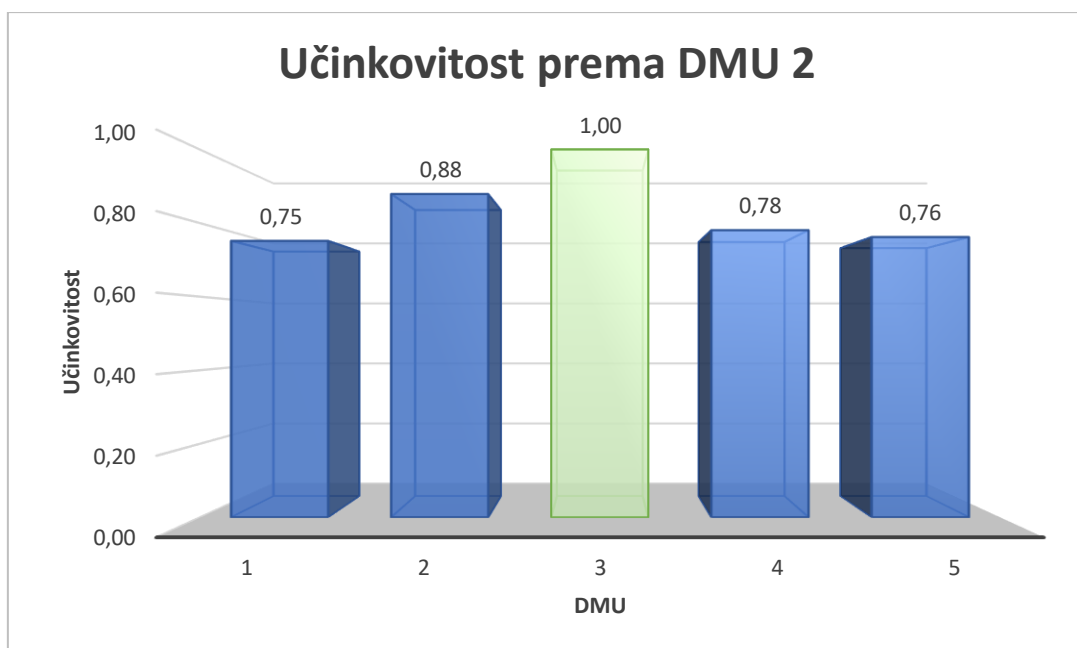
Puno jasnije je izražena promjena učinkovitosti preko grafičkog prikaza. Na grafikonu 7 vidimo prikaz učinkovitosti prema DMU 1 gdje dva DMU-a imaju maksimalnu učinkovitost, dok je na grafikonu 8 jasno vidljivo da je samo DMU 3 učinkovit. DMU 3 koji u iteraciji prvog DMU-a ima učinkovitost samo 73,27%, prema iteraciji trećeg DMU-a je potpuno učinkovit.

Relativna učinkovitost mora se utvrditi za svaki pojedinačni DMU od ukupno 5 promatranih DMU-a, DMU<sub>k</sub>, k = 1, ..., 5. Svaki DMU koristi iste varijable ulaza s različitim iznosom te se one množe s težinskim koeficijentom koji se određuje na razini sustava.

Optimalne težine mogu se razlikovati između DMU-a i dobivaju se iz izračuna linearnog problema. Ulazna i izlazna težina određuju se povezivanjem svakog DMU-a sa skupom optimalnih težina.



**Grafikon 7.** Učinkovitost prema DMU 1

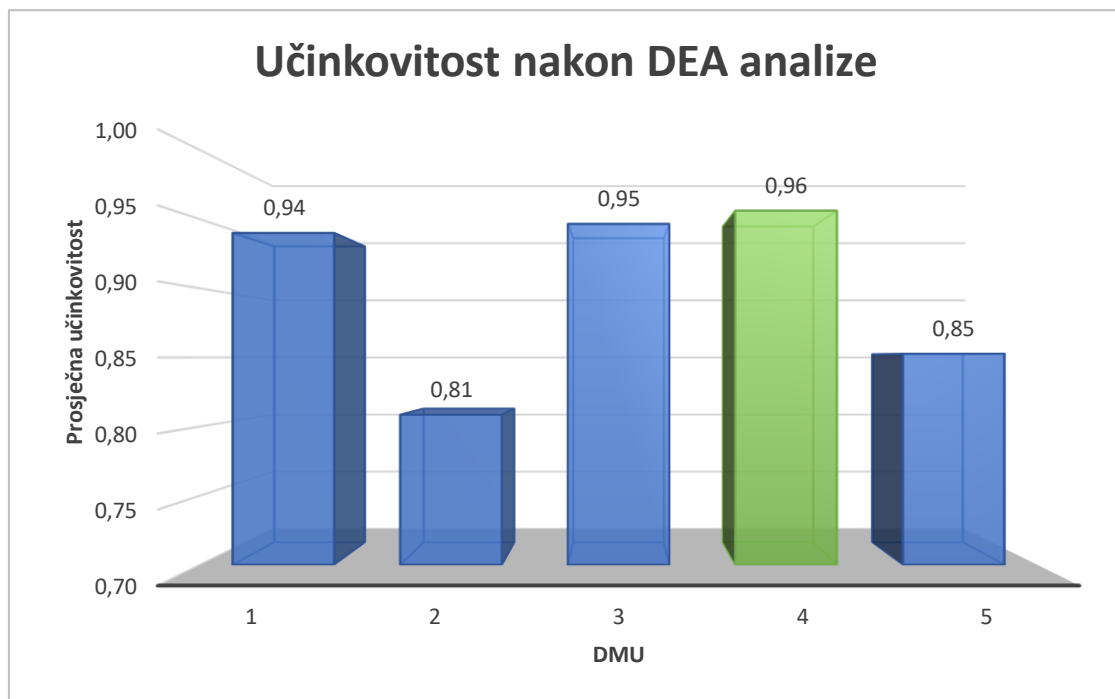


**Grafikon 8.** Učinkovitost prema DMU 2

Krajnji cilj svake DEA analize je izračunavanje najefikasnijeg DMU-a. Iako je kod svake iteracije dolazilo do manjih ili većih promjena kod učinkovitosti pojedinačnih DMU-a na kraju analize samo je jedan DMU potpuno učinkovit. Ukupna učinkovitosti DEA analize se računa kao prosječna učinkovitost kroz sve iteracije. Točna metoda izračuna je opisana u poglavlju Osnovni modeli DEA analize. Kroz svih pet iteracija izračunavanja učinkovitosti po svakom od DMU-a kao najučinkovitiji se pokazao DMU 4. Ali više o tome u sljedećem poglavlju.

**Tablica 10.** Prosječna učinkovitost i odtupanje DMU-a

	Prosječna učinkovitost	Odstupanje
DMU 1	0,94	-0,08
DMU 2	0,81	-0,24
DMU 3	0,95	-0,07
DMU 4	0,96	-0,06
DMU 5	0,85	-0,16



**Grafikon 9.** Učinkovitost DMU-a nakon DEA analize

## 6. ANALIZA DOBIVENIH REZULTATA

DEA metoda procjenjuje odnos određenog DMU u usporedbi s drugim jedinicama uključenim u prometnu studiju. Svaki DMU se uspoređuje sa svim ostalim DMU-ovima i određuje se njegova učinkovitost. Dakle, ključna značajka DEA analize je ta što se svaki DMU ocjenjuje kao relativna učinkovitost ili relativna neučinkovit.

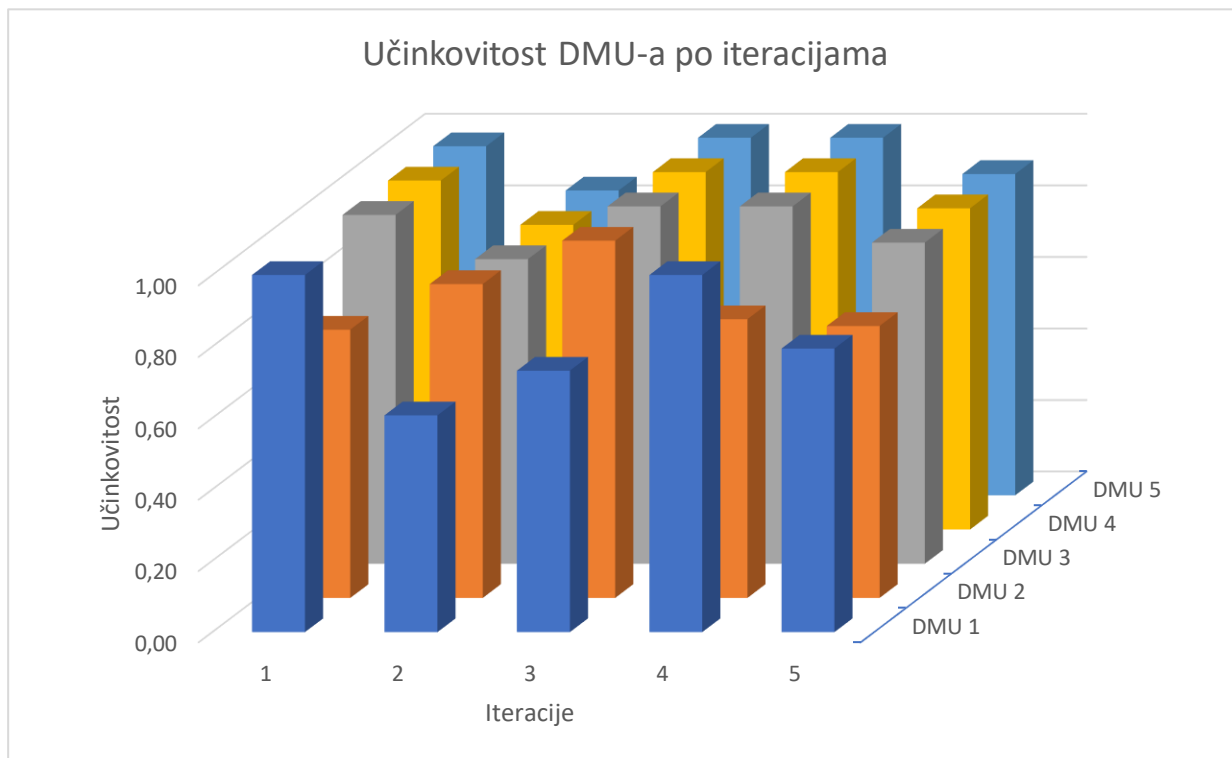
DEA analiza može prikazati razliku u učinkovitosti varijantnih rješenja koju je inače vrlo teško odrediti. Ulazni i izlazni parametri su namjerno određeni da budu što sličniji te da je gotovo nemoguće odrediti bilo kakvo rangiranje bez upotrebe neke vrste usporedbene matematičke analize.

Iako bi sama DEA analiza prometnog sustava ili određenih varijantnih rješenja bila znatno kompleksnija, svi principi koji bi se u takvoj analizi koristili prikazani su kroz ovu vrstu simplificirane DEA analize. DEA analiza procjenjuje odnos određenog DMU u usporedbi s drugim jedinicama uključenim u prometnu studiju. Svaki DMU se uspoređuje sa svim ostalim DMU-ovima i određuje se njegova učinkovitost. Dakle, ključna značajka DEA analize je ta što se za svaki DMU ocjenjuje kao relativno učinkovit ili relativno neučinkovit.

Prilikom analize varijantnih rješenja unutar ovog rada, DEA analiza se odvila u 5 iteracija, određujući relativne učinkovitosti svake jedinice za odlučivanje prema svim ostalim jedinicama, kao što je prikazano na grafikonu 10. Kod svake iteracije postavlja se drugi DMU kao referenta točka. Točnije jedno od ograničenja izračuna je da u svakoj iteraciji drugi DMU se stavlja s težinskim koeficijentom ulaznog parametra kao 1. Zbog toga DEA analiza u svakoj iteraciji proračunava učinkovitosti iz subjektivnog kuta DMU jedinice koja se trenutno analizira.

Kod analiziranja rezultata ove DEA analize mogu se uočiti uzorci ponašanja relativno efikasnih jedinica jednako kao i relativno ne efikasnih. Efikasni DMU-ovi su u svakoj iteraciji, bez obzira na ograničenja prema određenom DMU-u uvijek ostvarili relativno dobre rezultate.

Na grafikonu 10. može se jasno vidjeti promjena iznosa DMU jedinica kroz svih 5 iteracija DEA analize.



**Grafikon 10.** Učinkovitost DMU-a po iteracijama

Kao najučinkovitiji DMU, pokazao se DMU 4. Iako je i on samo relativno efikasan jer u konačnici postiže efikasnost od 96 posto. Što govori da bi se proučavanjem odnosa ulazno izlaznih parametara ostalih DMU-a mogla povećati učinkovitost i najučinkovitijeg DMU-a. Točnije, prosječnim povećanjem ulaznih parametara DMU-a 4 za 0.06 bi se poboljšala njegova učinkovitost na 100 posto.

Iako su ulazni i izlazni parametri pomno osmišljeni da bi razlike bile u konačnici neznatne, kroz veći broj iteracija dolazi do značajnijeg odvajanja relativno učinkovitih i relativno neučinkovitih jedinica za odlučivanje.

Sa segmentom odstupanje koji se navodi iza prosječne učinkovitosti, pokazuje se prosječna razlika između izlaznih i ulaznih podataka. Oboje, odstupanje i prosječna učinkovitost su pokazatelji učinkovitosti DMU-a.

**Tablica 11.** Konačni elementi DEA analize

DMU No.	Težinski koeficijenti		Prosječna učinkovitost	Odstupanje
	Input	Output		
1	1,06	0,98	0,94	-0,08
2	1,16	0,92	0,81	-0,24
3	1,00	0,93	0,95	-0,07
<b>4</b>	<b>1,10</b>	<b>1,04</b>	<b>0,96</b>	<b>-0,06</b>
5	1,06	0,90	0,85	-0,16

Tablica 11. pokazuje sve konačne elemente DEA analize. Od prosječnih težinskih koeficijenata ulaznih i izlaznih parametara, preko prosječne učinkovitosti do prosječnog odstupanja. Ovdje se najbolje vidi razlika u veličinama ulaznih i izlaznih parametara.

DEA analiza se pokazala kao dobar pokazatelj relativne učinkovitosti varijantnih rješenja, ukazujući na razlike između varijantnih rješenja na temelju njihove usporedbe i unaprijed definiranih ulazno izlaznih parametara.

**Tablica 12.** Rangiranje DMU-a po učinkovitosti

Rank	Učinkovitost	DMU
1	96%	4
2	95%	3
3	94%	1
4	85%	5
5	81%	2
Referentni DMU 4		

Konačno u tablici 12. vidimo sve jedinice za odlučivanje poredane po učinkovitosti te referentnu jedinicu za odlučivanje, DMU 4.

## 7. ZAKLJUČAK

Učinkovitost prometne mreže sa stanovišta odvijanja prometnih tokova i odabir ispravnog varijantnog rješenja za sva buduća poboljšanja prometnog sustava od temeljnog je značaja posebice u urbanim područjima. U tom kontekstu, učinkovitost studije ukazuje na uspješnu provedbu prometnih procesa, tj. učinkovitost prometne infrastrukture u smislu njezina odgovora na prometnu potražnju.

Efikasnost se najkraće može definirati kao sposobnost da se željeni ciljevi postignu uz minimalno iskorištavanje raspoloživih resursa. Kada bi postojala objektivna metoda za određivanje vrijednosti težinskih koeficijenata na ulazima i izlazima analitički model računanja efikasnosti bi bilo jednostavan.

DEA u ovom radu se koristi kao osnova za razvoj sveobuhvatne analize podataka koji utječu na održivu mobilnost u gradovima i kao metodologija za izračun relativne efektivnosti prometnih rješenja u cilju kreiranja sumarnog sintetičkog pokazatelja koji uzima u obzir sve značajke definirane ulaznim parametrima i odgovarajuće učinke definirane izlaznim varijablama te daje smjernice za eventualne izmjene temeljem granice efikasnosti.

Procesi organizacije i regulacije prometa u urbanim područjima izuzetno su složeni. Samo neki od zahtjeva koje je potrebno ispuniti su dovoljan kapacitet, željena brzina vozila, ugodan i udoban prijevoz, maksimalna sigurnost u prometu, minimalni troškovi izgradnje i operativnih troškova, minimalni utjecaji na okoliš itd. Stoga je analiza i ispravna organizacija prometnih tokova ključni izazov u današnje vrijeme povećanja prometne potražnje. DEA analiza je samo jedan od načina kako olakšati odabir prometnih rješenja u složenim uvjetima urbanih sredina.

S obzirom na model analize korist od izračunavanja učinkovitosti prometnog rješenja može se implementira u mnoge druge grane gospodarstva kao što su ekonomija, školstvo, razni gospodarski segmenti upravljanja gradovima i državama, itd. U ovom radu pokazana je mogućnost korištenja DEA metode i na prometnim studijama u vidu odabira varijantnih rješenja, ali je njezina mogućnost uporabe u prometu itekako veća.

Najčešće se DEA definira kao metodologija koja uključuje nekoliko različitih pristupa i modela koji su međusobno povezani i koriste se za procjenu relativne učinkovitosti jedinica o kojima će se odlučiti.

DEA analiza pokazuje da je moguća egzaktna usporedba u cilju unaprjeđenja odabira varijantnih rješenja u prometnim studijama. Ona omogućuje usporedbu različitih metrika tj. jedinica i parametara koji su inače izrazito teško usporedivi. Na taj način omogućuje ocjenjivanje varijantnih rješenja na temelju kvalitativnih i kvantitativnih pokazatelja. Samim time se distancira od ostalih metoda odabira varijantnog rješenja i otvara novu priliku za relativno jednostavnu i brzu usporedbu. Iako DEA analiza nije konačni alat za odabir varijantnog rješenja, zbog toga što ovisi o dobro određenim i postavljenim ulazno izlaznim parametrima i točno određenim jedinicama za odlučivanje, DEA analiza nudi sveobuhvatni pregled svih varijantnih rješenja u jedinstvenom izračunu te eksplicitno prikazuje razlike i odnos između varijanti prometne studije. Stoga, DEA analiza kvantificira relevantne učinkovitosti skupa varijantnih rješenja gdje se koriste identični kriteriji uzi stvarna opterećenja te je valjani pokazatelj relativnih odnosa značajnih za donošenje odluka između različitih rješenja.



## Literatura:

- [1] Cooper W.W., Seiford L.M., Tone K.; Introduction to Data Envelopment Analysis and its uses, New York, Springer US, 2006.
- [2] Šporčić M., Martinić I., Landekić M., Lovrić M.; Analiza omeđivanja podataka kao metoda efikasnosti – mogućnosti primjene u šumarstvu, Zagreb, Šumarski fakultet, 2008.
- [3] Bogović T.; Ocjena učinkovitosti upravljanja hrvatskim gradovima metodom omeđivanja podataka (AOMP), Varaždin, Fakultet organizacije i informatike, 2014.
- [4] Bošnjak I., Badanjak D., Osnove prometnog inženjerstva, Zagreb, Fakultet Prometnih znanosti, 2005.
- [5] Cooper W.W., Seiford L.M., Zhu J.: Handbook on Data Envelopment Analysis, New York, Springer US, 2011.
- [6] Han J., Hayashi Y.; A Data Envelopment Analysis for evaluating the performance of China's Urban public Transport Systems, Nagoya, Nagoya University, 2011.
- [7] Doyle J. , Green R.; Efficiency and Cross-efficiency in DEA: Derivations, Meanings and Uses, Somerset, University of Bath, 1994.
- [8] Budimir D., Šoštarić M., Vidović K.; Data Envelopment Analysis for determining the efficiency of variant solutions for traffic flow organisation, Zagreb, Fakultet prometnih znanosti, 2019.
- [9] Petersen N. C.; A Procedure for ranking efficient units in Data Envelopment Analysis, Odense, Odense University, 1993.
- [10] Hermans E., Brijs T., Wets G., Vanhoof K.; Benchmarking road safety: Lessons to learn from data envelopment analysis, Diepenbeek, Transportation research institute, 2008.

## POPIS SLIKA

<b>Slika 1.</b> Primjer postavaka parametara u Solveru.....	38
---	----

## POPIS TABLICA

<b>Tablica 1.</b> Primjer DEA metode s jednim ulazom i jednim izlazom.....	7
<b>Tablica 2.</b> Rezultat CCR efikasnosti DEA metode.....	8
<b>Tablica 3.</b> Stupanj učinkovitosti prema CCR i BCC modelu.....	24
<b>Tablica 4.</b> Izrada DEA modela.....	28
<b>Tablica 5.</b> Tablica DEA analize.....	36
<b>Tablica 6.</b> Parametri izračuna učinkovitosti DMU 1 (1/2).....	40
<b>Tablica 7.</b> Parametri izračuna učinkovitosti DMU 1 (2/2).....	40
<b>Tablica 8.</b> Parametri izračuna učinkovitosti DMU 2 (1/2).....	41
<b>Tablica 9.</b> Parametri izračuna učinkovitosti DMU 2 (2/2).....	41
<b>Tablica 10.</b> Prosječna učinkovitost i odtupanje DMU-a.....	43
<b>Tablica 11.</b> Konačni elementi DEA analize.....	46
<b>Tablica 12.</b> Rangiranje DMU-a po učinkovitosti.....	46

## POPIS GRAFIKONA

Grafikon 1. Prikaz granice učinkovitosti putem DEA metode.....	9
Grafikon 2. Projekcije na granicu učinkovitosti.....	10
Grafikon 3. Granica učinkovitosti prema BCC modelu.....	11
Grafikon 4. Prikaz granice učinkovitosti prema CCR modelu.....	12
Grafikon 5. Granica učinkovitosti prema CCR i BCC modelu.....	20
Grafikon 6. Grafički prikaz ocjene učinkovitosti prema modelima CCR i BCC.....	23
Grafikon 7. Učinkovitost prema DMU 1.....	42
Grafikon 8. Učinkovitost prema DMU 2.....	42
Grafikon 9. Učinkovitost DMU-a nakon DEA analize.....	43
Grafikon 10. Učinkovitost DMU-a po iteracijama.....	45

## POPIS KRATICA

AOMP	Analiza Omeđivanja Podataka
BCC	(Banker Charner Cooperov) model DEA analize nazvan po autorima
CCR	(Charnes Cooper Rhodesov) model DEA analize nazvan po autorima
CRS	(Constant Return to Scale) osnovni model DEA analize koji se bazira na CCR modelu
DEA	(Data Envelopment Analysis) engleski naziv za analiza omeđivanja podataka
DMU	(Decision Making Unit) jedinice odlučivanja u DEA metodi
GRG	(Generalized Reduced Gradient) ne linearna metoda Solver izračuna
IU	Izlazno Usmjereni
LP	Linearno programiranje
SAD	Sjedinjene Američke Države
UU	Ulazno Usmjereni
VRS	(Variable return to scale) model DEA analize koji se bazira na BCC modelu



Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet prometnih znanosti  
10000 Zagreb  
Vukelićeva 4

## IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI I SUGLASNOST

Izjavljujem i svojim potpisom potvrđujem kako je ovaj \_\_\_\_\_ diplomski rad

isključivo rezultat mog vlastitog rada koji se temelji na mojim istraživanjima i oslanja se na objavljenu literaturu što pokazuju korištene bilješke i bibliografija.

Izjavljujem kako nijedan dio rada nije napisan na nedozvoljen način, niti je prepisan iz necitiranog rada, te nijedan dio rada ne krši bilo čija autorska prava.

Izjavljujem također, kako nijedan dio rada nije iskorišten za bilo koji drugi rad u bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili obrazovnoj ustanovi.

Svojim potpisom potvrđujem i dajem suglasnost za javnu objavu \_\_\_\_\_ diplomskog rada

pod naslovom \_\_\_\_\_

### **Analiza vrednovanja prometnih rješenja temeljena na DEA metodi**

na internetskim stranicama i repozitoriju Fakulteta prometnih znanosti, Digitalnom akademskom repozitoriju (DAR) pri Nacionalnoj i sveučilišnoj knjižnici u Zagrebu.

Student/ica:

U Zagrebu, \_\_\_\_\_ 12.09.2019 \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
(potpis)