Optimizacija ruta korištenjem matematičkih modela

Bengez, Ivan

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Transport and Traffic Sciences / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:119:174677

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**



Repository / Repozitorij:

Faculty of Transport and Traffic Sciences - Institutional Repository







SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET PROMETNIH ZNANOSTI

Ivan Bengez

OPTIMIZACIJA RUTA KORIŠTENJEM MATEMATIČKIH MODELA

DIPLOMSKI RAD

Zagreb, 2018.

Sveučilište u Zagrebu

Fakultet prometnih znanosti

DIPLOMSKI RAD

OPTIMIZACIJA RUTA KORIŠTENJEM MATEMATIČKIH MODELA

ROUTE OPTIMIZATION USING MATHEMATICAL MODELS

Mentor:

izv. prof. dr. sc. Jasmina Pašagić Škrinjar

Student:

Ivan Bengez

JMBAG: 0135228327

Zagreb, rujan 2018.

SAŽETAK

Praktični problemi u prometu i transportu mogu se preslikati u probleme gdje su prometnice prenesene u grafove na kojima se primjenjuju teoretske spoznaje i algoritme. Parametre kao što su udaljenost, vrijeme i cijena transporta u urbanim područjima nije moguće pohraniti u simetrične matrice koje opisuju simetrični graf, već asimetričnim matricama i pripadajućim grafovima. Takvim matematičkim modelima je moguće kvantitativno prikazati složene dinamičke odnose entiteta na prometnoj mreži, a rezultat tog prikaza se predstavlja kao optimalna ruta kojom se entiteti kreću postojećom prometnom infrastrukturom. Na taj će se način u radu prikazati i rute kojima se tvrtka INA d.d. koristi za dostavu ukapljenog naftnog plina (UNP) od vlastite punionice do mjesta prodaje, a korištenjem matematičkih modela će se optimizirati postojeće dostavne rute.

KLJUČNE RIJEČI: optimizacija ruta; matematički modeli; matrice i grafovi

SUMMARY

Practical problems in traffic and transport can be depicted as problems where networks of roads and highways are transferred into graphs on which we can apply known theoretical applications and algorithms. Parameters such as distance, time and cost of transport in urban areas can not be represented by symmetric matrices and graphs, but rather with asymmetric matrices and graphs. With those mathematical models, it is possible to quantify the complex dynamic relations between entities on a traffic network and the result of such modeling represents the optimal route on which the entities should traverse through the existing traffic infrastructure. This thesis will show the routes which INA d.d. uses for delivery of liquefied petroleum gas (LPG) from their pumping station to various retail locations and how to optimize the existing routes using mathematical models.

KEYWORDS: route optimization; mathematical models; matrices and graphs

SADRŽAJ

1. UVOD 1

2. PRIJEVOZNA LOGISTIKA 4

2.1. Upravljanje i aktivnosti tijekom odvijanja procesa prijevozne logistike 4

2.2. Ciljevi i zadaci prijevozne logistike 6

3. OPIS PREDMETA ISTRAŽIVANJA 9

3.1. Općenito o rutiranju 11

3.2. Opis načina obrade istraživanja 13

4. PRIKAZ MATEMATIČKIH METODA ZA OPTIMIZACIJU RUTIRANJA 14

4.1. Clark-Wright-ov algoritam ušteda 17

4.2. Clark-Wright-ov algoritam ušteda – metoda s indikatorom *T* 26

4.3. Metoda grananja i ograničavanja 33

4.4. Metoda najbližeg susjeda 40

5. ANALIZA POSTOJEĆIH RUTA I PROJEKTIRANJE NOVIH RUTA KORIŠTENJEM MATEMATIČKIH MODELA 46

5.1. Ruta vozila 1 46

5.1.1. Projektiranje rute vozila 1 Clark-Wright-ovim algoritmom „ušteda“ 47

5.1.2. Projektiranje rute vozila 1 Clark-Wright-ovim algoritmom „ušteda“, metoda s indikatorom *T* 51

5.1.3. Projektiranje rute vozila 1 pomoću metode grananja i ograničavanja 58

5.1.4. Projektiranje rute vozila 1 korištenjem metode najbližeg susjeda 63

5.2. Ruta vozila 2 64

5.2.1. Projektiranje rute vozila 2 Clark Wright-ovim algoritmom „ušteda“ 65

5.2.2. Projektiranje rute vozila 2 Clark-Wright-ovim algoritmom „ušteda“, metoda s indikatorom *T* 68

5.2.3. Projektiranje rute vozila 2 pomoću metode grananja i ograničavanja 69

5.2.4. Projektiranje rute vozila 2 korištenjem metode najbližeg susjeda 71

5.3. Ruta vozila 3 72

5.3.1. Projektiranje rute vozila 3 Clark-Wright-ovim algoritmom „ušteda“ 74

5.3.2. Projektiranje rute vozila 3 Clark-Wright-ovim algoritmom „ušteda“, metoda s indikatorom *T* 78

5.3.3. Projektiranje rute vozila 3 pomoću metode grananja i ograničavanja 79

5.3.4. Projektiranje rute vozila 3 korištenjem metode najbližeg susjeda 80

5.4. Ruta vozila 4 81

5.4.1. Projektiranje rute vozila 4 Clark-Wright-ovim algoritmom „ušteda“ 83

5.4.2. Projektiranje rute vozila 4 Clark-Wright-ovim algoritmom „ušteda“, metoda s indikatorom *T* 85

5.4.3. Projektiranje rute vozila 4 pomoću metode grananja i ograničavanja 87

5.4.4. Projektiranje rute vozila 4 korištenjem metode najbližeg susjeda 88

5.5. Ruta vozila 5 89

5.5.1. Projektiranje rute vozila 5 Clark-Wright-ovim algoritmom „ušteda“ 90

5.5.2. Projektiranje rute vozila 5 Clark-Wright-ovim algoritmom „ušteda“, metoda s indikatorom *T* 93

5.5.3. Projektiranje rute vozila 5 pomoću metode grananja i ograničavanja 94

5.5.4. Projektiranje rute vozila 5 korištenjem metode najbližeg susjeda 95

6. USPOREDBA REZULTATA DOBIVENIH PRIMJENOM MATEMATIČKIH MODELA 97

7. ZAKLJUČAK 99

LITERATURA 100

POPIS KRATICA 101

POPIS SLIKA 102

POPIS TABLICA 103

POPIS GRAFIKONA 108

1. UVOD

Promet je kao cjelina složeni dinamički sustav čije je djelovanje stohastičko obzirom na složenost predviđanja njegovog djelovanja. Zbog takve prirode prometnog sustava, postavlja se imperativ za što boljim upravljanjem tim sustavom, odnosno za što preciznijim planiranjem, kao i izvršavanjem procesa koji se odvijaju unutar sustava, kako bi se što bolje zadovoljila potražnja za transportnim uslugama.

Budući da je prometni sustav otvoreni sustav, koncept upravljanja ima ograničenu mogućnost regulacije njegova ponašanja, jer nema posebnih sustava za precizno predviđanje prometnih uvjeta i rezultata djelovanja. U prometnom sustavu se ne može u potpunosti, na temelju poznavanja prometnih karakteristika, sasvim točno predvidjeti učinke, jer su od brojnih čimbenika poznati samo neki. Na rezultat djelovanja određenog koncepta upravljanja, osim poznatih i pretpostavljenih čimbenika, djeluju i oni koji nisu bili poznati u trenutku predviđanja.

Međutim, većina problema se može svesti na probleme optimiranja, koji se efikasno rješavaju pomoću matematičkih modela linearnog programiranja (linearni modeli). Postupak optimiranja sastoji se u određivanju skupa vrijednosti, odnosno varijabli odlučivanja (promjenjivih veličina), kojima se postiže optimalna vrijednost funkcije cilja uz zadana ograničenja (uvjete).

Takav postupak se primijenio u ovome radu čiji je cilj utvrditi optimalan način fizičke distribucije ukapljenog naftnog plina (UNP) kroz prometnu mrežu unutar ograničenja koja se javljaju zbog karakteristika prometa, odnosno postojećih prometnica, zahtijevanog vremena, fizičkih specifičnosti robe u pitanju, karakteristika prijevoznog sredstva i slično.

Svrha istraživanja je prikazati moguća poboljšanja fizičke distribucije robe u ovisnosti o njenim karakteristikama i zahtjevima sredstva kojim se roba kreće postojećim prometnim sustavom. Obzirom da se radi o opasnim tvarima, kojima je u cestovnom prometu potrebno posebno oprezno rukovati pri njihovoj distribuciji, cilj čega je smanjivanje rizika onečišćenja na što manju moguću mjeru kao i smanjenje broja nesreća s opasnim tvarima te izjednačenost propisa u svim državama potpisnicama Europskog sporazuma o međunarodnom cestovnom prijevozu opasnih tvari (ADR).

U radu su također objašnjeni ciljevi i zadaci prijevozne logistike i objašnjene su neke od metoda koje se koriste u procesu određivanja ruta. Prikazana je upotreba matematičkih metoda kod optimizacije rutiranja te su analizirane rute dobivene upotrebom navedenih metoda.

U izradi rada korišteni su podaci prikupljeni u tvrtki INA d.d. koja je proizvođač i distributer ukapljenog naftnog plina (UNP) na teritoriju Republike Hrvatske, a čije se distribucijske rute obrađuju u ovome radu. Rad je podijeljen u sedam cjelina:

1. Uvod
2. Prijevozna logistika
3. Opis predmeta istraživanja
4. Prikaz matematičkih metoda za optimizaciju rutiranja
5. Analiza postojećih ruta i projektiranje novih ruta korištenjem matematičkih modela
6. Usporedba rezultata dobivenih primjenom matematičkih modela
7. Zaključak

U poglavlju „Prijevozna logistika“ definiran je pojam prijevozne logistike te su objašnjeni njeni ciljevi i zadaci, kao i procesno usmjeren koncept upravljanja prijevoznom logistikom. Također je objašnjena razdioba upravljanja, resursa i organizacijskog ustroja prijevozne logistike.

Poglavlje „Opis predmeta istraživanja“ daje sažet opis objekta distribucije, načina njihova naručivanja, punjenja i skladištenja, kao i načina primjene postupaka koji se koriste pri projektiranju novih ruta za opskrbu postaja plinskim bocama. Također daje opću definiciju rutiranja i važnosti optimizacije za poslovanje tvrtke.

Opis metoda koje se koriste u izradi rada, kao i primjeri svake od navedenih metoda, su dani u poglavlju „Prikaz matematičkih metoda za optimizaciju rutiranja“.

Praktičan dio istraživanja se obrađuje u poglavlju „Analiza postojećih ruta i projektiranje novih ruta korištenjem matematičkih modela“. U obzir se uzimaju postojeći redoslijed i udaljenosti pojedine dostavne rute te se korištenjem matematičkih modela pokušava smanjiti ukupna udaljenost pojedine rute.

U poglavlju „Usporedba rezultata dobivenih primjenom matematičkih modela“ daje se sažetak rezultata dobivenih analizom u prethodnome poglavlju, odnosno objedinjavanje pojedinih rezultata svakog modela.

U posljednjem poglavlju daje se osvrt na cjelokupan rad u smislu učinkovitosti i primjene rezultata istraživanja.

Ovaj rad će pokušati optimizirati dostavne rute prema postajama na kojima se prodaju plinske boce optimizacijom rutiranja korištenjem matematičkih modela, dakle smanjiti ukupan prijeđeni broj kilometara te time smanjiti ukupan trošak prijevoza. Smanjenjem broja prijeđenih kilometara, ujedno se smanjuje i samo vrijeme koje vozila provode na prometnicama, što utječe na sigurnost na prometnicama, obzirom da je u pitanju prijevoz opasne robe.

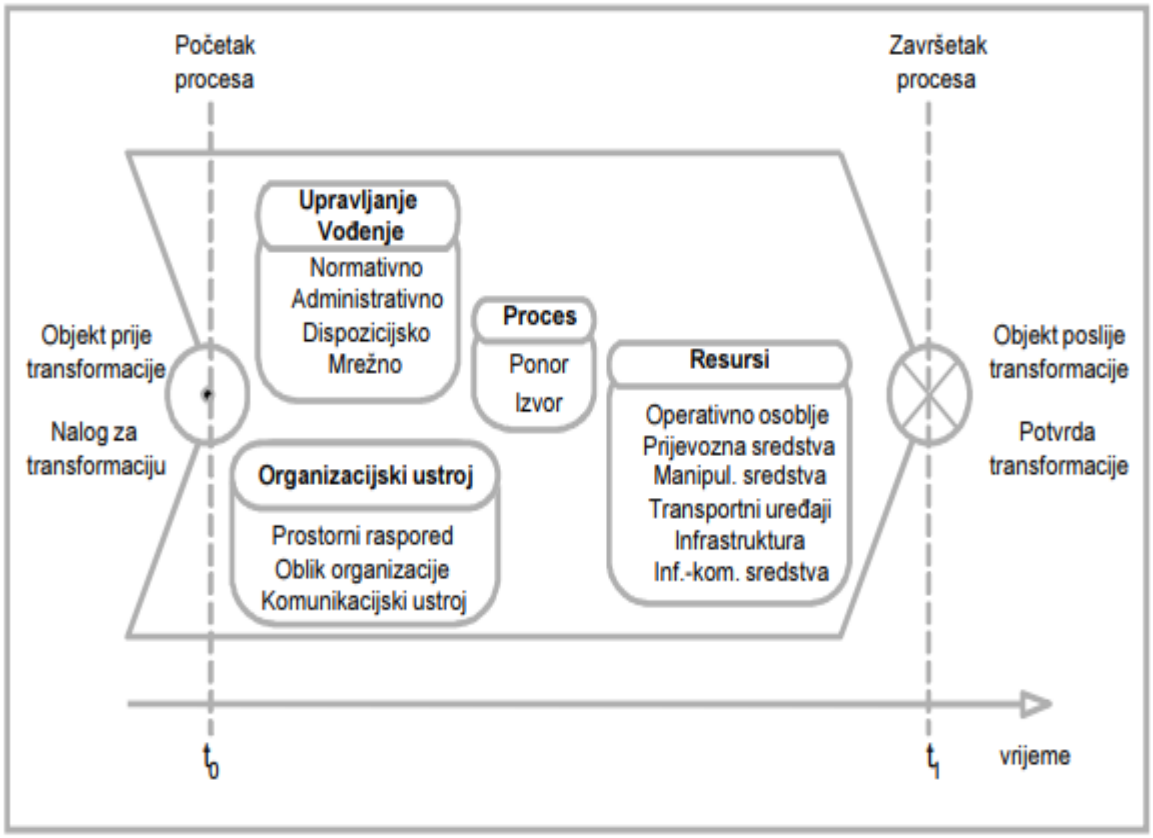
2. PRIJEVOZNA LOGISTIKA

Prijevozna logistika obuhvaća planiranje, upravljanje i nadzor nad svim fizičkim procesima premještanja robe (putnika) i svim logičkim procesima koji se odnose na tok informacija od izvorišta (proizvodnja) do odredišta (krajnji korisnik). Transportne mreže se sastoje od transportnih puteva i čvorova u kojima transportni putevi počinju i završavaju. Iz tog razloga transportnu mrežu je moguće preslikati u grafove u kojima su transportni putevi, odnosno prometnice, bridovi grafa, dok su čvorišta lokacije koje je potrebno obići. Na taj način je moguće stvoriti matematičke modele koji mogu kvantitativno prikazati složene dinamičke odnose u prometu.

Prijevozna logistika kao segment opskrbnog lanca omogućuje pozitivne efekte izmijenjenim oblicima suradnje proizvodnih i trgovačkih gospodarskih subjekata u cilju udovoljenja stalnim težnjama za smanjenjem cijena, troškova i marži.[1]

2.1. Upravljanje i aktivnosti tijekom odvijanja procesa prijevozne logistike

Procesno usmjerena koncepcija upravljanja prijevoznom logistikom, odnosno njen opći proces prijevozne logistike može se opisati kao povećanje vrijednosti inicijalnog objekta ili stanja u određenom vremenu kroz međudjelovanje organizacijskog ustroja, upravljanja i uloženih resursa, kao što je prikazano slikom:



Slika 1. Opći proces prijevozne logistike, [1]

Razine vođenja se prvenstveno dijele na stratešku razinu vođenja i na operativnu razinu vođenja. Strateška razina vođenja se sastoji od normativne razine, u kojoj su navedene strateške odrednice u vezi s ciljevima poslovanja, poslovnom politikom i odnosom prema okruženju, kao i od administrativne razine, koja se bavi strateškim controlingom, poboljšanjem organizacijskog ustroja i edukacijom ljudskih potencijala te razradom tipskih ugovora. Operativno vođenje se sastoji od dispozicijske razine, koja se bavi upravljanjem resursima, zalihama i provedbom naloga, operativnim nadzorom financija, procesa i ljudskih potencijala te osiguranjem zahtijevane kvalitete procesa; mrežna razina operativnog vođenja bavi se razmjenom informacija o objektima između pod procesa te razmjenom informacija i komunikacija između sudionika procesa; lokalna razina se bavi operativnim upravljanjem resursima, pravilnicima operativnog vođenja za ljudske potencijale te priručnicima za osiguranje kvalitete procesa.

Resursi prijevozne logistike se dijele na ljudske potencijale, gdje se razmatra raspoloživost i kvalificiranost ljudskih potencijala na pojedinim razinama djelovanja te radno vrijeme i trošak rada po razinama djelovanja; infrastrukturu, odnosno lokacije i raspoloživo zemljište te izgrađeni objekti i instalirana oprema pružatelja logističkih usluga; zalihe, koje se

raspoređuju po distribucijskim nalozima i distribucijskim objektima; osnovna sredstva za rad, odnosno prijevozna i manipulacijska sredstva, skladišna tehnika, postrojenja za sortiranje i pakiranje te informacijska i komunikacijska sredstva; pomoćna sredstva za rad kao što su sami transportni uređaji i nositelji informacija (podataka); organizacijska sredstva i uređaji, odnosno identifikacijska sredstva i uređaji.

Pomoćni resursi prijevozne logistike dijele na informacije, odnosno poznavanje metodologija i tehnoloških sustava i poznavanje osnovnih podataka o procesu i objektima; pogonska sredstva, kao što su energenti (struja, plin, loživo ulje i ostali naftni derivati), maziva (ulja, masti i sl.), sustavi opskrbe (komprimirani zrak, voda i drugo); financijska sredstva koja mogu biti vlastita i vanjska; logistička usluga, odnosno priprema i dobava resursa, kao i redovita opskrba ili povremeno stvaranje pričuve te održavanje, čišćenje i osiguranje sredstava i objekata za rad.

Organizacijski ustroj se dijeli na infrastrukturu, odnosno na lokacije, površine, prostore i raspored prostora i opreme; informacijsko-komunikacijske sustave, odnosno hardware (računala, mrežne instalacije, periferne uređaje) i software (operativni sustavi, baze podataka, programske aplikacije); ustroj ljudskih resursa, odnosno opis radnih mjesta, nadležnosti i odgovornosti i cjelokupnu organizacijsku shemu; formalno-pravni ustroj, odnosno ugovori s kooperacijskim partnerima, definiranje vođenja, ugovori pripreme i raspolaganja resursima i ugovori o logističkim uslugama.[1]

2.2. Ciljevi i zadaci prijevozne logistike

Cilj prijevozne logistike kao cjeline je kontinuirano poboljšanje protoka supstrata i informacija kroz sustav, tako da se međusobnom koordinacijom elemenata sustava težnje za ostvarenjem ciljeva pojedinih podsustava svedu na minimalnu razinu. [2] Cilj cjelokupnog sustava prijevozne logistike je prostorno i vremenski približiti proizvodnju i potrošnju, uz minimalne troškove, odnosno upravljanje robnim tokovima uzduž cijelog opskrbnog lanca u cilju boljeg zadovoljenja želja krajnjeg korisnika (kvalitativni pomak) i smanjenja troškova procesa (kvantitativni pomak). Približavanje proizvodnje i potrošnje se odvija tijekom realizacije logističkih procesa, odnosno tijekom izvršavanja operativnih procesa prijevozne logistike, kao što su priprema samog procesa, proces ukrcaja, proces prijevoza, proces iskrcaja i zaključivanje procesa. Operativni ciljevi prijevozne logistike određeni su zahtjevima tržišta koje utječe na promjene i poboljšanje razine kvalitete logističkih usluga, a odnosi se na:

- povećanje brzine transporta,
- smanjenje vremena isporuke,
- povećanje točnosti isporuke,
- povećanje sigurnosti robe i drugo;

  uz stalno prisutan zahtjev o minimalizaciji logističkih troškova.

Razina kvalitete logističkih usluga najviše je vezana uz robne tokove koji moraju biti usklađeni i popraćeni informacijskim tokovima.

Kako bi pružatelj logističkih usluga bio konkurentan te odgovorio zahtjevima postavljenim od strane korisnika, mora imati valjan sustav upravljanja kvalitetom, pritom prateći trendove u prijevoznom sustavu koji su nastali uslijed sve prisutnijeg procesa globalizacije, a oni su obilježeni određenim karakteristikama:

1. rast potražnje; kako za prijevozom putnika tako i tereta, ali i udaljenosti na koju se prevoze,
2. smanjenje troškova; u smislu troška za korisnika uslijed sve veće konkurentnosti, koji bilježe pad i za tradicionalno skupe prijevoze kao što je avionski,
3. proširenje infrastrukture; u kvantitativnom i kvalitativnom smislu, a uvjetovano je rastom potražnje i smanjenjem troškova. [3]

Glavni zadatak prijevozne logistike, odnosno distribucijske logistike, je zajedno s ostalim sudionicima logističkog procesa, krajnjem potrošaču omogućiti sustav odnosno koncept koji najviše odgovara njegovim potrebama, kao što su „pravi proizvod na pravome mjestu u pravo vrijeme“ (engl. *just in time*), „od vrata do vrata“ (engl. *door to door*), povratna logistika (engl. *reverse logistics*) i sl. Zajedno ti sustavi pokrivaju procese od dobave potrebnih sirovina proizvođaču do trenutka kada krajnji korisnik konzumira proizvod odnosno uslugu.[2] Opširnije, zadatak sustava prijevozne logistike je kroz funkcije prijevozne logistike kao što su prijevozna funkcija, skladišna funkcija i funkcija držanja zaliha, ostvariti ciljeve prijevozne logistike, iz čega proizlazi da su zadaće sustava prijevozne logistike:

- izjednačavanje prostora, zbog toga što su najčešće mjesto proizvodnje i mjesto potrošnje robe prostorno dislocirani, stoga prijevozna logistika mora imati prijevoznu funkciju;

- izjednačavanje vremena, jer je vrijeme postavljanja zahtjeva za robom (potražnja) različito od vremena završetka proizvodnje (ponude), stoga kroz skladišnu funkciju;
- izjednačavanje količine, koja je pri ekonomičnoj proizvodnji (ponuda) u pravilu različita od tražene količine robe (potražnje), do čega se dolazi skladišnom funkcijom držanja zaliha;
- izjednačavanje asortimana, budući da se proizvodnja raznolikog asortimana robe provodi na različitim lokacijama, ali se u određenim skladištima čuva cjelokupni asortiman ili se određeni kupac opskrbljuje kroz nekoliko distribucijskih vožnji, stoga se koristi skladišna i/ili prijevozna funkcija. [1]

3. OPIS PREDMETA ISTRAŽIVANJA

Predmet istraživanja ovog rada je optimizacija dostavnih ruta tvrtke INA d.d., točnije fizičke distribucije plinskih boca od punionice INA UNP Zagreb na adresi Radnička cesta 216, prema postajama u široj okolici Zagreba. Plin se prije punjenja skladišti u posebnim nadzemnim i podzemnim spremnicima na istoj adresi. Punionica INA UNP Zagreb ima kapacitet punjenja 900 do 1000 boca na sat, prema tome kriteriju je najveća u Republici Hrvatskoj. Dnevno se napuni oko 28 tona plina.

Predmet distribucije su plinske boce punjene ukapljenim naftnim plinom (UNP). Plinske boce se razlikuju po zapremnini, odnosno masi, pa se razlikuju čelične boce od 7,5 kg i 10 kg punjenja; lake čelične boce od 10 kg punjenja; kompozitne boce od 10 kg punjenja i tzv. boce „tekuće faze“ od 35 kg namijenjene za posebnu industrijsku upotrebu. Svaka boca ima protueksplozijsku zaštitu i pravilnu oznaku. Rok trajanja jedne plinske boce je između 40 i 50 godina, ovisno o održavanju. Svaka boca mora biti ispitana barem jednom unutar 10 godina, a ispituje se na koroziju, oštećenja i otpornost na tlak do 25 bara. Tlak unutar boce ovisi o temperaturi, a varira između dva do tri bara zimi, dok je ljeti 12 do 13 bara. Kritična razina iznosi 120 bara. Boce se na lokaciji postaje skladište u posebnim kavezima koji imaju planski određeno mjesto na lokaciji postaje zbog sigurnosnih uvjeta, međutim uslijed rekonstrukcije postoji mogućnost da se pozicija kaveza izmjesti izvan dodijeljene pozicije. Zbog navedenih sigurnosnih uvjeta, nije dozvoljeno držati kaveze izvan dodijeljenih planski određenih pozicija te se isti isključuju iz rada što dovodi do smanjenja skladišnih kapaciteta postaje, odnosno smanjenja ukupne količine zaliha. Izravna posljedica toga je češće opskrbljivanje postaje novim zalihama, ali i mogućnost pada udjela na tržištu ukoliko se kupci uslijed nestašice plina na određenoj postaji okrenu drugim proizvođačima.

Prijevoz plinskih boca se u tvrtki INA d.d. odvija korištenjem vanjskih pružatelja usluga prijevoza, odnosno ugovornim partnerima, ukoliko se govori o distribuciji plinskih boca prema postajama koje su u svojstvu krajnjeg korisnika. Osim distribucije prema postajama, plinske boce se prodaju i direktno veleprodajnim kupcima koji vrše vlastitu distribuciju od vrata do vrata. Fizička distribucija na primjeru koji se obrađuje u ovome radu se vrši pomoću pet vozila koja su heterogena budući da postoji više ugovornih partnera. Svako vozilo ima različit kapacitet, odnosno između 280 i 350 plinskih boca od. Sve plinske boce osim „tekuće faze“ od 35 kg punjenja se pakiraju na paletu posebne namjene kapaciteta 35 plinskih boca. Ukoliko ostane slobodnog teretnog prostora nakon ukrcaja paleta posebne

namjene, isti se koristi za prijevoz ne standardnih boca od 35 kg koje se zasebno osiguravaju, ukoliko su one naručene.

Postupak naručivanja novih zaliha od strane postaja se vrši putem SAP[1] ERP[2] sustava koji je implementiran kako bi se lakše vodilo računa o proizvodnji, zalihama, distribuciji i svim ostalim podacima vezanim uz poslovanje tvrtke. Međutim, postupak planiranja rutiranja, odnosno fizičke distribucije, se odvija u LOC-u (logističkom operativnom centru), a rute se formiraju intuitivno od strane operatera. Narudžbe od strane postaja se zaprimaju svakodnevno, uredovno vrijeme zaprimanja je do 13 sati za narudžbe koje se isporučuju sljedeći radni dan, iako je radno vrijeme punionice od 7 do 19 sati. Nakon što je narudžba zaprimljena u ERP sustav, skladištar priprema zahtijevane količine boca za ukrcaj te obavještava LOC operatera kada će boce biti spremne. LOC operater ulazi u ERP sustav te prema potrebi mijenja količinu naručenih boca od strane postaje prema vlastitom nahođenju, ovisno o dostupnosti prijevoza i skladišnih kapaciteta postaje. Operater intuitivno projektira distribucijske rute te potom stupa u kontakt s prijevoznicima.

Prijevoznici stižu na lokaciju ukrcaja, gdje zadužuju dnevne pošiljke. Ukrcaj boca i izdavanje potrebne papirologije traje prosječno 15 minuta. Prijevoznici potom dostavljaju boce na postaje, međutim nisu obvezni pratiti itinerar LOC operatera, dokle god se dostava obavi unutar radnog vremena postaje. Prosječno vrijeme servisa, odnosno iskrcaja punih i ukrcaja praznih boca je 20 minuta za 30 boca. Prijevoznik je dužan za svaku dostavljenu punu bocu preuzeti i jednak broj praznih boca. Na postaji se dakle, osim dostave, istovremeno obavlja i prikup praznih boca koje se vraćaju natrag u punionicu gdje se i razdužuju. Prosječno vrijeme iskrcaja boca je 20 minuta. Obzirom da postaje preuzimaju i plinske boce drugih proizvođača, punionica stvara nekurentnu zalihu takvih boca koje ne smije puniti zbog marketinške politike tvrtke. Takve boce potom čekaju dogovor između INA-e i drugih proizvođača o zamjeni praznih boca, međutim drugi proizvođači pune INA-ine boce vlastitim plinom te ih takve plasiraju na tržište, stoga im nije u primarnom interesu hitna zamjena boca. Nakon što dogovor bude postignut, plinske boce strane tvrtke se prevoze do njihovih vlasnika i vrši se razmjena plinskih boca.

[1] SAP AG je njemačka tvrtka koja se bavi proizvodnjom *software-a*
[2] ERP je skraćenica od engl. *enterprise resource planning* – planiranje resursa poduzeća

3.1. Općenito o rutiranju

Za svaku fizičku distribuciju proizvoda koji se šalju na veći broj odredišta, odnosno kupaca, potrebno je projektirati rute kojima će se ta roba dostavljati. Pri projektiranju rute, najčešća početna metoda je „problem trgovačkog putnika“ (engl. *traveling salesman problem*) gdje se istovremeno projektira veći broj ruta. Također, „problem rasporeda vozila“ (engl. *vehicle scheduling problem*) predstavlja jedinstveno planiranje prijevoznih ruta. Standardni problem planiranja ruta može se prikazati na sljedeći način:

Iz jednog se distribucijskog centra unutar određenog planskog vremenskog razdoblja roba dostavlja određenim čvorištima (potrošačima, kupcima u velikim gradovima ili većem broju kupaca). Potreba čvorišta može se pokriti jednom pošiljkom. Plan ruta potrebno je spojiti kao jednu količinu ruta, koju uvijek svladava jedno vozilo, polazeći od distribucijskog centra i završavajući u distribucijskom centru. Pri tome se svakom potrošaču, odnosno kupcu dostavlja jednom rutom, a teret svake rute mora biti jednak ili manji od kapaciteta jednog vozila.

Planiranje ruta slijedi ove ciljeve:

- minimiziranje transportnih putova,
- minimiziranje vremena transporta,
- minimiziranje proporcionalnih troškova,
- minimiziranje broja vozila.

Osnovni problem planiranja ruta sastoji se od dva dijela, no između ostalog javljaju se i ostali problemi koji otežavaju planiranje. Problemi se dijele na temeljne i dodatne probleme. Dijelovi osnovnog, temeljnog problema odnose se na:

- dodjeljivanje kupaca za pojedine rute,
- utvrđivanje redoslijeda kupaca unutar rute.

Dodatni problemi koji otežavaju planiranje ruta su:

- ograničeni kapaciteti (dimenzije težine i volumena, jedinica količine narudžbi i kapaciteta vozila se razlikuju te svaka za sebe može djelovati ograničavajuće, a i trajanje pojedine rute može biti vremenski ograničeno temeljem zakonskih propisa),

- različit vozni park (u temeljnom procesu polazi se od neograničenog broja jednakih vozila),
- vremenski okvir kupaca (prilikom isporuke često treba paziti na kratko vrijeme prihvata robe kod kupca, stoga je potrebno uzeti u obzir najranije i najkasnije vrijeme do kada pošiljka treba stići do kupca),
- okviri za vozila (pojedina vozila na raspolaganju mogu biti u različitom vremenu),
- višestruko uvođenje vozila po danu (pojedino vozilo može dnevno izvršiti više ruta).

Planiranje ruta može se provoditi za dvije različite situacije:

- za dnevne rute,
- za standardne rute.

Prilikom planiranja dnevnih ruta, postoje narudžbe za jedan dan, koje se planiranjem prethodne večeri ili početkom idućeg dana mogu uključiti u izvršenje ruta. Planiranje standardnih ruta može se provesti u većim razmacima. Temelj su tipični programi narudžbi. Navedeni postupci imaju smisla kod ruta koje ostaju relativno iste, s malim kolebanjima programa narudžbi.

Generalni problem planiranja ruta uvjetuje velike napore u planiranju ruta i izračunima istih. Stoga se praksa zadovoljava i približnim rješenjima. Prošireni postupci su:

- postupci najboljeg sljedbenika,
- sukcesivno uključivanje stanica,
- *saving* – postupci (najbolje djelomične rute).

Informacijska tehnologija bitno je doprinijela usavršavanju, ali i proširenju matematičkih postupaka planiranja ruta. U praksi se nude brojni softverski programi za planiranje ruta kao što su npr.: OptiMap, WINQSB, Route planner-Michelin, TomTom My drive, MapQuest i mnogi drugi. Djelomični problemi oblikovanja ruta rješavaju se sukcesivno ili simulacijom (npr. Saving postupci).[4]

3.2. Opis načina obrade istraživanja

Prijedlog za optimizaciju ruta distribucijske mreže se sastoji od rješavanja problema rutiranja pomoću matematičkih modela, odnosno algoritama za projektiranje ruta i dobivanja najkraćeg puta, čime se smanjuju troškovi distribucije. Obzirom da se trošak prijevoza zasniva na prijeđenim kilometrima, određivanjem najkraćeg puta pomoću navedenih metoda smanjila bi se udaljenost u odnosu na postojeću te bi se na jednak način smanjili troškovi transporta ovisno o prijeđenim kilometrima.

Podaci koji se tiču ruta koje vozila obilaze, dio su jedne dnevne opskrbne vožnje, stoga nisu obuhvaćene sve postaje u regiji Zagreb, već samo one koje su na dan mjerenja zahtijevale dopunu zaliha. Zbog zaštite podataka, informacije o količini tereta, cijenama i registarskim oznakama vozila, neće biti spominjane. Količina tereta se iz tog razloga ne uzima u obzir prilikom izrade modela, već se pretpostavlja da je svako vozilo puno kada krene u obilazak rute, a vozilima su dodijeljeni brojevi kako bi ih se razlikovalo.

U teoriji postoji veliki broj metoda i algoritama za izračun najkraćeg puta i za usmjeravanje (rutiranje) ili projektiranje ruta vozila. U ovom radu koristit će se sljedeće odabrane metode: Clark-Wright-ov algoritam ušteda, metoda s indikatorom T kao osnovne metode, te metoda grananja i ograničavanja i metoda najbližeg za usporedbu rezultata dobivenih osnovnim metodama. Najkraći put za odabrane rute izračunat će se prema navedenim metodama te će se usporediti dobiveni rezultati, kako bi se odredilo najbolje rješenje i metoda ili metode koje daju najbolje rješenje. Optimizacija će se odvijati na način da se za početak izdvoji jedna od ruta, a zatim prikažu sve međusobne udaljenosti između čvorova unutar rute. Prema međusobnim udaljenostima izračunava se najkraći put na različiti način ovisno o metodi. Nakon usporedbe rezultata, odabire se najmanja udaljenost.[5]

4. PRIKAZ MATEMATIČKIH METODA ZA OPTIMIZACIJU RUTIRANJA

Obzirom da je problem prometnica matematički najjednostavnije opisati grafom, za početak je potrebno opisati osnovne karakteristike grafa. Graf je definiran skupom vrhova i bridova, dakle analogno lokacijama i prometnicama između lokacija u prometnom sustavu. Ukoliko su bridovima dodijeljene određene težine, odnosno ponderi, dobiva se mogućnost prikazivanja udaljenosti između vrhova, dakle stvarnih udaljenosti između lokacija. Ukoliko se želi prikazati smjer određene prometnice, jedan brid može imati više veza različitih orijentacija. Stoga, ukoliko se prikazuje jednosmjerna prometnica, govori se o simetričnom težinskom grafu s istim težinama veza, a ukoliko se prikazuje dvosmjerna prometnica, govori se o asimetričnom težinskom grafu s različitim težinama veza.

Problemi kombinatorne optimizacije su konceptualno jednostavni, odnosno lako ih se može objasniti i razumjeti, ali budući da su to problemi za čije rješavanje do sada nisu poznati polinomijalni algoritmi, teško ih je riješiti. Zbog malog broja ograničenja, lakše je dizajnirati i analizirati nove algoritme i heuristike.[6]

Algoritam je konačan slijed dobro definiranih naredbi za ostvarenje zadatka, koji će za dano početno stanje terminirati u definiranom konačnom stanju.[7]

Heuristike su, u općem smislu, tehnike rješavanja problema koje se temelje na iskustvu, a dovode do približno optimalnog rješenja u razumnom vremenu, odnosno vrijeme pronalaska rezultata nije funkcija koja raste eksponencijalno. Često se koriste algoritmi koji su inspirirani prirodom kao što su genetski algoritam, kolonija mrava, simulirano kaljenje. Trenutno najbolje rezultate daju algoritmi temeljeni na nekoj vrsti lokalnog pretraživanja, čije metode obično sadrže dva koraka: konstruiranje inicijalnog rješenja i poboljšanje trenutnog rješenja. Heuristike mogu pronaći optimalno rješenje, međutim, nedostatak im je dugotrajno računanje kod većih problema.[6] Neke od metoda rješavanja NP-teških problema[3] su tzv. metode grananja i ograđivanja (engl. *branch and bound*) i grananja i ograđivanja (engl. *branch and cut*), od kojih će se u radu obraditi metoda grananja i ograđivanja.

Budući da se ruta opisuje kao put koji obilazi određen unaprijed poznat broj točaka na najkraći način, uz postavljenja ograničenja, a najlakši način aproksimacije stvarnog

[3] NP-teški problemi su nedeterministički polinomijalno prihvatljivi problemi[6]

prometnog problema je pomoću grafa, najprije se povlači usporedba s Hamiltonovim ciklusom. Hamiltonov ciklus je ciklus koji sadrži sve vrhove grafa i predstavlja put kroz koji se svakim vrhom prođe samo jednom, a počinje i završava istim vrhom.

Problem trgovačkog putnika (engl. *Travelling salesman problem*-TSP) definirali su početkom 19. stoljeća W.R. Hamilton i T. Kirkman kao rekreativnu zagonetku baziranu na pronalaženju Hamlitonovog ciklusa. Po prirodi problema, spada u kategoriju NP-potpunih problema, što znači da nema algoritma za ovaj problem koji bi ga riješio u polinomijalnom vremenu, ali ako se takav otkrije, moguće ga je testirati kako bi se saznalo je li optimalan. Problem je formalno definirao Karl Menger 1930. koji je osim definicije problema opisao i egzaktno, tj. optimalno rješenje tzv. algoritmom uzastopnog pokušavanja[4] (engl. *brute force algorithm*), kao i heuristika približnog rješenja najbliži susjed[5] (engl. *nearest neighbour heuristic*).[6]

U najgorem slučaju događa se da su rezultati rute puno duži od optimalne rute. Točnije, za svaki konstantni ***r*** postoji inačica problema trgovačkog putnika u kojoj je duljina rute izračunata algoritmom najbližeg susjeda veća od ***r*** množeno duljinom optimalne rute. Nadalje, za svaki broj lokacija, postoji određen broj dodijeljenih udaljenosti između tih lokacija za koje heuristika najbližeg susjeda daje jedinstvenu najgoru moguću rutu. Ako se algoritam primijeni na svaki vrh kao da je početni, najbolja ruta bit će bolja od barem ***n/2 – 1*** drugih ruta, gdje je ***n*** broj vrhova. Heuristika najbližeg susjeda ne mora nužno pronaći optimalnu rutu, čak i kada ona postoji.[9]

Ako se graf predstavi kao mreža prometnica i lokacija, brid kao moguće veze između lokacija, a težine kao udaljenosti između gradova, tada se problem predstavlja kao problem trgovačkog putnika. Sastoji se u pronalasku najkraćeg zatvorenog puta kroz ***N*** gradova (čvorova). Svakim čvorom se prolazi samo jednom, osim početnim koji je ujedno i završni. Rješenje koje daje postupak računanja problema trgovačkog putnika je redoslijed obilaska

[4] Algoritam uzastopnog pokušavanja je tehnika za rješavanje problema koja se sastoji od sistematskog prebrojavanja svih mogućih opcija koje mogu biti rješenje i provjeravanja zadovoljavaju li te opcije zadane izjave problema, odnosno uvjete. Jednostavan je za primjenu i uvijek će pronaći rješenje ukoliko ono postoji, ali njegov trošak vremena proporcionalan je broj opcija rješenja, koja u mnogim slučajevima narastu vrlo brzo kako raste i opseg problema.[7]

[5] Heuristika približnog rješenja najbliži susjed je jedna od prvih heuristika kojom se određivao problem trgovačkog putnika. U toj heuristici figurativni trgovački putnik počinje put iz nasumične lokacije i opetovano posjećuje prvu najbližu lokaciju početnoj dok sve lokacije nisu posjećene. Na brz način daje kratku rutu, ali ta ruta često nije optimalna. Ovu heuristiku je lako implementirati i brzo se izvršava, ali ponekad promaši rute koje su kraće, a ljudskim uvidom bi bile primijećene, zbog svoje „pohlepne prirode“.[8]

gradova, a da ukupna duljina puta bude minimalna. Problem trgovačkog putnika ima faktorijelnu složenost $O(n!)$. U potpunim grafovima s N vrhova, broj Hamiltonovih ciklusa u usmjerenim grafovima je $(N\text{-}1)$, a u neusmjerenim $N!/2N$, odnosno $((N\text{-}1)!)/2$, (obzirom da su po dvije rute identične, ali inverzne) te broj kombinacija raste eksponencijalno s brojem gradova. Cilj je da trgovački putnik prijeđe minimalni put, a posjeti sve klijente. [6]

Problem trgovačkog putnika može biti zapisan i riješen kao linearni program, kao npr. ako je zadana matrica troškova:

$$\boldsymbol{D=d(i,j)} \tag{1}$$

gdje je:

$\boldsymbol{d_{ij}}$ – trošak putovanja između grafa grada $\boldsymbol{i}$ i grada $\boldsymbol{j}$, a vrijednost $\boldsymbol{i,j}$= 1,2,...$\boldsymbol{n}$

potrebno je naći permutaciju $\boldsymbol{P\ (i_1,i_2,i_3,...i_n)}$ cijelih brojeva od 1 do $\boldsymbol{n}$ koji će minimizirati funkciju cilja:

$$\boldsymbol{Y=d_{i1,i2}+d_{i2,i3}+...d_{in,i1}} \tag{2}$$

Za gore definiranu matricu $\boldsymbol{D}$, potrebno je odrediti varijable odluke $\boldsymbol{x_{ij}}$ koje minimiziraju iznos

$$\boldsymbol{Q} = \sum_{i,j}\boldsymbol{d_{ij}x_{ij}} \tag{3}$$

ako vrijedi:

$$\boldsymbol{x_{ii}} = 0 \tag{4}$$

$$\boldsymbol{x_{ij}} = 0,\ 1 \tag{5}$$

$$\sum_i xij = \sum_j xij = 1 \tag{6}$$

za bilo koji podskup $S = i_1, i_2, ...,i_r$ cijelih brojeva od 1 do n,

$$\boldsymbol{x_{i1i2} + x_{i2i3} + ...+ x_{ir-1ir} + x_{iri1}} \begin{cases} < r\ ,\ ako\ je\ r < n \\ \leq n,\ ako\ je\ r = n \end{cases} \tag{7}$$

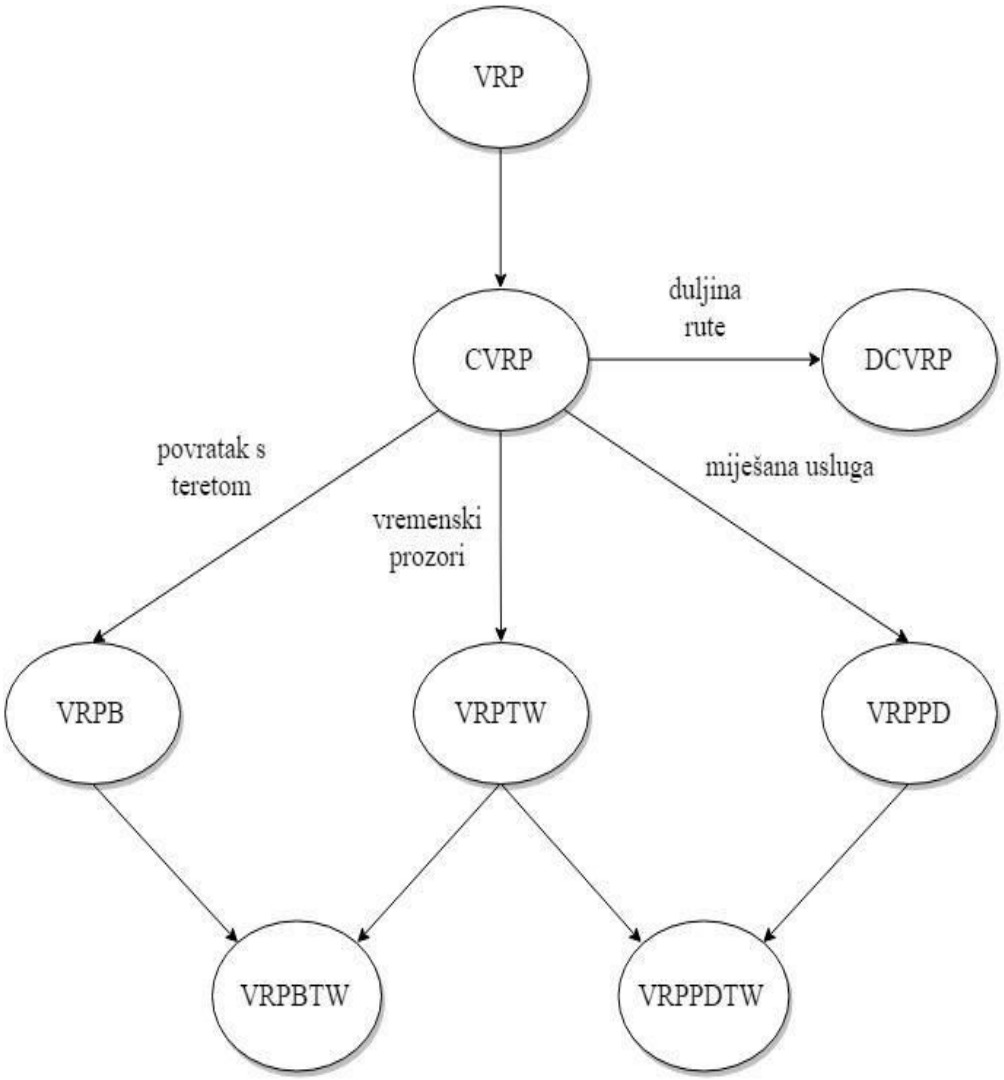
Zbog velikog broja ograničenja, čak i za mali n, ovakav pristup rješavanju nije prikladan za praktičnu primjenu.[6] Stoga se za praktičan izračun najkraćeg puta koriste metode navedene u daljnjem tekstu.

4.1. Clark-Wright-ov algoritam ušteda

Problem usmjeravanja vozila (engl. *vehicle routing problem* – VRP) je opći naziv za klasu problema gdje je potrebno odrediti rute za flotu vozila. Ovisno o vrsti postavljenog problema, flota vozila treba poslužiti određeni broj prostorno razmještenih korisnika s polaskom iz jednog ili više skladišta. Prvotno je nazvan problemom otpremanja kamiona 1959. godine u znanstvenom radu Georgea Dantziga i Johna Ramsera, a ticao se problema dostave naftnih derivata, točnije za potrebe racionalizacije procesa opskrbe benzinskih postaja naftom. Clark i Wright su 1964. godine predložili poboljšanje Dantzig-Ramserove metode pomoću konstrukcije ruta, koristeći heuristička rješenja koja koriste tzv. „pohlepne“ algoritme (engl. *greedy* algoritmi koji generiraju rješenje promatranog problema u proceduri „korak po korak“, u svakom trenutku biraju odgovarajuću promjenjivu vrijednost tako da maksimalno moguće u okviru tog koraka povećaju, odnosno smanje trenutnu vrijednost definirane kriterijske funkcije). Problem usmjeravanja vozila čest je pri distribuciji i prikupljanju dobara. Cilj problema usmjeravanja vozila je pronalaženje optimalne rute, na način da svi korisnici budu posluženi, a da se svaki korisnik poslužuje samo jednim vozilom.

Sljedeća slika predstavlja najučestalije inačice problema usmjeravanja vozila. Osnovni VRP se grana na CVRP (engl. *capacitated vehicle routing problem*) u kojem vozila imaju ograničen kapacitet nosivosti tereta ili robe koja se mora dostaviti. Sljedeće prikazano proširenje CVRP-a je DCVRP (engl. *distance constrained capacitated vehicle routing problem*) u kojem se postavlja ograničenje duljine rute koju vozila smiju prijeći. VRPB (engl. *vehicle routing problem with backhauls*) uključuje prvotno klijente kojima se teret ili roba dostavlja, ali se potom s određenih lokacija preuzima teret koji se prevozi natrag na početnu lokaciju, odnosno distribucijski centar. VRPTW (engl. *vehicle routing problem with time windows*) uz ograničenje kapaciteta uzima u obzir i unaprijed poznato određeno vrijeme unutar kojega je potrebno obaviti dostavu svakome klijentu unutar rute. VRPPD (engl. *vehicle routing problem with pick-up and delivering*) se razlikuje od VRP-a i VRPB-a jer razmatra klijente koji stvaraju potražuju i dostavu i otpremu tereta, odnosno bavi se i dostavom i prikupom povratnog tereta u jednoj vožnji, stoga količina tereta u vozilu nije stalna. VRPBTW (engl. *vehicle routing problem with backhauls and time windows*) objedinjuje

ciljeve VRPB-a i VRPTW-a, dakle minimizira broj ruta i ukupnu udaljenost svih ruta, uključujući određene vremenske prozore u kojima se dostava mora izvršiti, kao i povratne prikupe robe. VRPPDTW (engl. *vehicle routing problem with pick-up and delivery with time windows*) jedan je od „najbogatijih“ problema rutiranja jer se istovremeno bavi ograničenim kapacitetom vozila, količinom dostave i prikupa od specifičnog klijenta u točno određenom vremenskom prozoru.[6]



Slika 2. Prikaz najučestalijih inačica problema usmjeravanja vozila

Izvor: [6]

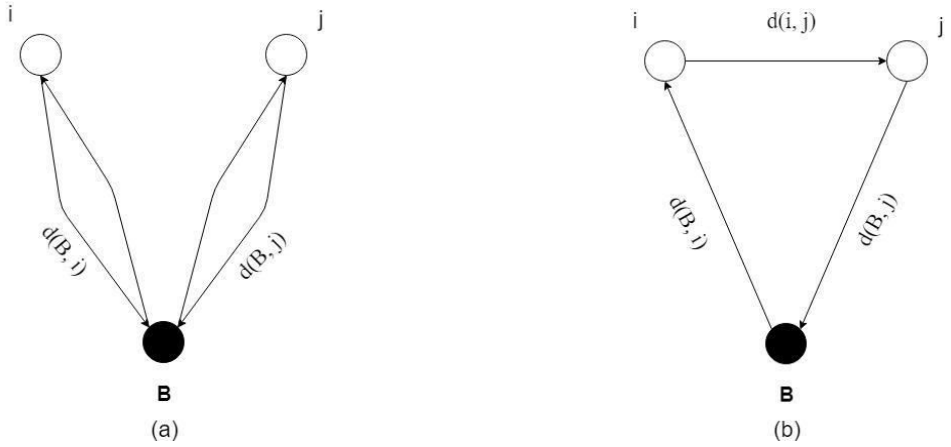
Osnovna ideja Clark-Wrightovog algoritma (1964.) izložena je prilikom razmatranja problema trgovačkog putnika. Ovaj algoritam jedan je od najčešće primjenjivanih heurističkih pristupa rješavanja zadatka problema usmjeravanja vozila, u literaturi poznatog kao VRP. Algoritam polazi od početnog rješenja u kojem se nalazi n-1 ruta koje se formiraju na način

da se po jedno vozilo upućuje iz baze, odnosno skladišta do jednog od potrošača te se vraća u skladište, početnu točku. Zatim se interaktivno, iz koraka u korak spajaju po dvije putanje koje donose najveću uštedu, a da pritom zadovoljavaju ograničenja zadataka algoritma.[10]

Clark-Wright-ova metoda razvijena je za problem usmjeravanja vozila s ograničenim kapacitetom, koji započinje od rješenja gdje svaka ruta ima jedno skladište i jednog korisnika. Cilj svake pojedine iteracije algoritma jest sjedinjavanje dviju ruta prema kriteriju maksimalne uštede, odnosno kriterij gdje se odabiru uštede udaljenosti dobivene pomoću formule (8), rangirane od najveće prema najmanjoj. Redoslijedom se odabiru dobivene uštede uz zadovoljenje određenih uvjeta prilikom projektiranja ruta. Kasnije u radu, detaljnije je objašnjen način izračuna i odabira ušteda.

Algoritam se izvršava u vremenu složenosti $O(n^2 log(n))$, ali kompleksnost algoritma može se reducirati koristeći prikladne podatkovne strukture. Algoritam implicitno ne uvažava fiksne troškove vozila i veličinu flote. Uključenje troškova vozila moguće je dodavanjem konstante na svaku cijenu luka, odnosno rute kretanja vozila. Unatoč povećanju troška može se postići rješenje i s fiksnim brojem vozila.[11]

Čvor B na slici označava polazni čvor te čvor u koji se vozilo ili drugi entitet vraća.



Slika 3. Izračunavanje ušteda, [10]

Na slici 3. (a), prikazana je prva moguća strategija kretanja vozila. Vozilo kreće iz baze (čvor B) te posjećuje čvor i, vraća se u bazu, posjećuje čvor j i ponovno se vraća u bazu. U ovom slučaju ukupna udaljenost uz pretpostavku ($d(i, j) = d(j, i)$ za $\forall(i, j)$), jednaka je formuli (8).

$$2d(B, i) + 2d(B, j) \quad (8)$$

Gdje je: d = udaljenost

B = početni i završni čvor (baza)

i = prvi čvor u grani

j = drugi čvor u grani

Slika 3. (b), prikazuje poboljšanu strategiju kretanja vozila. U slučaju strategije kretanja prikazane na slici 3. (b), ukupna udaljenost jednaka je formuli (9):

$$d(B, i) + d(i,j) + d(B,j) \tag{9}$$

Ušteda $s(i, j)$ koju vozilo ostvaruje kada čvorove i i j spoji u jednu rutu, slika 3. (b) jednaka je formuli (10):

$$S(i,j) = 2d(B, i) + 2d(B,j) - (2d(B, i) + d(i,j) + d(B,j)) \tag{10}$$

Odnosno, kada se formula (10) uredi, dobije se (11):

$$S(i,j) = d(B, i) + d(B,j) - d(i,j) \tag{11}$$

Veća vrijednost uštede $s(i, j)$, pokazatelj je da je čvorove i i j najbolje spojiti u jednu rutu.[10] Postupak izvršavanja Clark-Wright-ovog algoritma u ovom slučaju podijeljen je na dva glavna koraka koji se dijele na dodatan broj koraka. Algoritam započinje konstrukcijom i određivanjem svih međusobnih udaljenosti između lokacija, zatim izračun ušteda prema formuli (11), nakon toga sortiranje ušteda od najveće prema najmanjoj.[12]

1. Inicijalizacija:

1. Konstruirati elementarne rute (0; i;0) $\forall$ i = 1, … , n i odrediti dužinu svih ruta (12)

$$F = \sum d0i + di0 \; i \in c \tag{12}$$

2. Izračunati uštede Sij, $\forall$(i, j) $\in$ L prema formuli (13):

$$Sij = di0 + d0j - dij, \forall (i,j) \in L \tag{13}$$

3. Sortirati uštede od najveće prema najmanjoj.

Nakon izvršenih radnji, započinje konstrukcija ruta uz zadovoljenje određenih uvjeta koji su navedeni u nastavku:

2. Za svaki element sortirane liste ušteda *Sij*:

1. Odrediti:
   - da li su *i* i *j* u različitim rutama prvi ili posljednji čvorovi,
   - da li je zbroj kapaciteta te dvije rute manji od kapaciteta vozila
2. Ukoliko su uvjeti zadovoljeni, sljedeći korak je:
   - povezati te dvije rute,
   - smanjiti ukupnu dužinu ruta z *Sij*, tj. $F \leftarrow F - Sij$,
   - izračunati kapacitet nove rute kao zbroj kapaciteta ruta od kojih je ruta formirana,
   - eliminirati grane starih ruta

Clark-Wrightov algoritam „ušteda“ za projektiranje ruta transportnih sredstava može se prikazati i na sljedeći način [10]:

Korak 1: Izračunati uštede $s(i, j) = d(B, i) + d(B, j) - d(i, j)$ za svaki par (i, j) čvorova koje je potrebno opslužiti.

Korak 2: Izvršiti rangiranje svih ušteda te ih poredati po veličini. Izraditi listu ušteda koja započinje najvećom uštedom.

Korak 3: Pri razmatranju uštede *s(i, j)* odgovarajuću granu (i, j) uključiti u djelomičnu rutu, ukoliko se pri tome ne krše postojeća operativna ograničenja i ukoliko:

(a) Čvor *i* i čvor *j* već nisu uključeni u neku postojeću djelomičnu rutu,

(b) Je jedan od čvorova i ili j već uključen u neku postojeću djelomičnu rutu i ukoliko taj čvor nije unutarnji čvor u ruti,

(c) Su oba čvora *i* i *j* uključeni u dvije različite djelomične rute i niti jedan od navedenih čvora nije unutarnji čvor u tim rutama u kojem je slučaju moguće spojiti djelomične rute u jednu rutu.

Korak 4: Kada je lista ušteda realizirana do kraja, potrebno je završiti s algoritmom.

Također postoje sekvencijalna i simultana metoda Clark-Wright-ovog algoritma „ušteda“. Prilikom korištenja sekvencijalne metode projektiranja ruta transportnih sredstava, rute se projektiraju na principu sekvence – jedna po jedna. Točnije, za početak se projektira početna, odnosno prva ruta, zatim se iz liste ušteda odabire najveća postojeća ušteda te se u potpunosti projektira druga ruta, nakon toga ponovni povratak u listu ušteda te ponavljanje prethodnog koraka. Kod verzije simultanog projektiranja istovremeno se vrši projektiranje svih ruta. Pri nailasku na par čvorova koji nije bio uključen niti u jednu postojeću rutu kod simultanog pristupa, vrši se „otvaranje“ nove rute (Kod sekvencijalnog pristupa ovakav par čvorova se „preskače“ te ostavlja za daljnja razmatranja, obzirom da se kod sekvencijalnog pristupa prolaskom kroz listu ušteda vodi računa o samo jednoj ruti). U slučaju simultanog pristupa, jednim prolaskom kroz listu ušteda izvršava se projektiranje svih ruta transportnih sredstava.[10]

Primjer 1.:

Zadana je matrica međusobnih udaljenosti među gradovima kao što je prikazano tablicom 1. Potrebno je izračunati najkraći put između gradova, tako da svaka lokacija bude posjećena samo jednom te da početna točka, odnosno čvor ujedno bude i završna točka.

Tablica 1. Matrica primjera 1

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	49	41	60	63	28	53	29
x_1	49	∞	29	11	16	28	15	22
x_2	41	29	∞	37	33	14	20	17
x_3	60	11	37	∞	10	39	18	33
x_4	63	16	33	10	∞	39	13	34
x_5	28	28	14	39	39	∞	27	7
x_6	53	15	20	18	13	27	∞	24
x_7	29	22	17	34	27	7	24	∞

U prvom koraku potrebno je izračunati uštede *S(i, j)* pomoću formule (11). Ušteda za prvu relaciju, od čvora x_1 do čvora x_2 računa se na način da se udaljenost od čvora x_1 do čvora x_2 iznosa 29 km oduzme od zbroja dviju udaljenosti, udaljenosti od početnog čvora x_0 do čvora x_1 koja iznosi 49 km i udaljenosti od početnog čvora x_0 do čvora x_2 duljine 41 km. Nakon izračuna, vrijednost uštede iznosi 61 km. Na jednak se način izračunavaju uštede za preostale kombinacije čvorova:

$S_{12} = d(0,1) + d(1, 2) = 49 + 41 – 29 = 61$ km

$S_{13} = 49 + 60 – 11 = 98$ km

$S_{14} = 49 + 63 – 16 = 96$ km

$S_{15} = 49 + 28 – 28 = 49$ km

$S_{16} = 49 + 53 – 15 = 87$ km

$S_{17} = 49 + 29 – 22 = 56$ km

$S_{23} = 41 + 60 – 37 = 64$ km

$S_{24} = 41 + 63 – 33 = 71$ km

$S_{25} = 41 + 28 – 14 = 55$ km

$S_{26} = 41 + 53 – 20 = 74$ km

$S_{27} = 41 + 29 – 17 = 53$ km

$S_{34} = 60 + 63 – 10 = 113$ km

$S_{35} = 60 + 28 – 39 = 49$ km

$S_{36} = 60 + 53 – 18 = 95$ km

$S_{37} = 60 + 29 – 33 = 56$ km

$S_{45} = 63 + 28 – 39 = 52$ km

$S_{46} = 63 + 53 – 13 = 103$ km

$S_{47} = 63 + 29 – 34 = 58$ km

$S_{56} = 28 + 53 – 27 = 54$ km

$S_{57} = 28 + 29 – 7 = 50$ km

$S_{67} = 53 + 29 – 24 = 58$ km

U drugom koraku potrebno je izvršiti rangiranje svih ušteda te ih poredati prema veličini, odnosno izraditi listu ušteda koja započinje najvećom uštedom. U tablici 2. nalaze se rangirane uštede, dobivene pomoću formule (11). Tablica je podijeljena na tri stupca, a svaki od stupaca podijeljen je na dva dijela. U lijevom dijelu svakog stupca nalaze se grane, odnosno relacije između čvorova, dok se u desnom dijelu nalaze vrijednosti istih.

Tablica 2. Lista rangiranih ušteda prema veličini

Grana (i, j)	Ušteda $s(i, j)$	Grana (i, j)	Ušteda $s(i, j)$	Grana (i, j)	Ušteda $s(i, j)$
(3,4)	113	**(2,4)**	71	**(2,5)**	55
(4,6)	103	**(2,3)**	64	**(5,6)**	54
(1,3)	98	**(1,2)**	61	**(2,7)**	53
(1,4)	96	**(4,7)**	58	**(4,5)**	52
(3,6)	95	**(6,7)**	58	**(5,7)**	50
(1,6)	87	**(1,7)**	56	**(1,5)**	49
(2,6)	74	**(3,7)**	56	**(3,5)**	49

Nakon što su uštede izračunate i rangirane kao u tablici 2., započinje sljedeći korak, odnosno projektiranje rute.

U trećem koraku započinje izrada rute prema rangiranim uštedama, uz zadovoljavanje navedenih ograničenja:

- Prema rangiranju, čvorovi najveće uštede predstavljaju i početak rute:

$$\mathbf{(3,4) => 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0}$$

- Sljedeća ušteda po veličini sadrži čvorove 4 i 6, obzirom da čvor 4 u ruti već postoji, a nije unutarnja točka, čvor 6 može se uvrstiti u rutu povezan s čvorom 4 kako je i navedeno u uštedi:

$$\mathbf{(4,6) => 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 0}$$

- Prema redoslijedu, sljedeća ušteda je **(1,3)**. U ruti se nalazi čvor 3 koji je poveznica kod uštede **(1,3)**, čvor 3 nije unutarnja točka u ruti te su ograničenja

zadovoljena i ušteda se može uvrstiti u rutu, odnosno čvor 1 može se nadovezati na čvor 3:

(1,3) => 0 ↔ 1 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 0

- Kod ušteda **(3,6)** i **(1,6)** oba čvora su već uključena u rutu, stoga se te uštede ne upotrebljavaju pri projektiranju rute. Da bi povezivanje čvorova bilo moguće, jedan od čvorova u uštedi mora biti vanjski čvor u ruti, u ovom slučaju to su čvorovi 1 i 6.

- Sljedeća moguća ušteda za uvrštavanje u rutu je **(2,6)** jer se čvor 6 nalazi u ruti i nije unutarnja točka, već vanjska, stoga je moguće direktno povezati čvor 2 s čvorom 6:

(2,6) => 0 ↔ 1 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 2 ↔ 0

- Uštede **(2,4), (2,3)** i **(1,2)** se ne upotrebljavaju pri projektiranju rute jer se njihovi zajednički čvorovi već nalaze u projektiranoj ruti.

- Kod ušteda **(4,7)** i **(6,7)** jedan čvor je već uključen u djelomičnu rutu, ali su unutarnje točka i direktna poveznica nije moguća. Sljedeća moguća ušteda za povezivanje je **(1,7)** budući da je njihov zajednički čvor 1 i vanjski je čvor u djelomičnoj ruti, stoga se može uvrstiti u rutu:

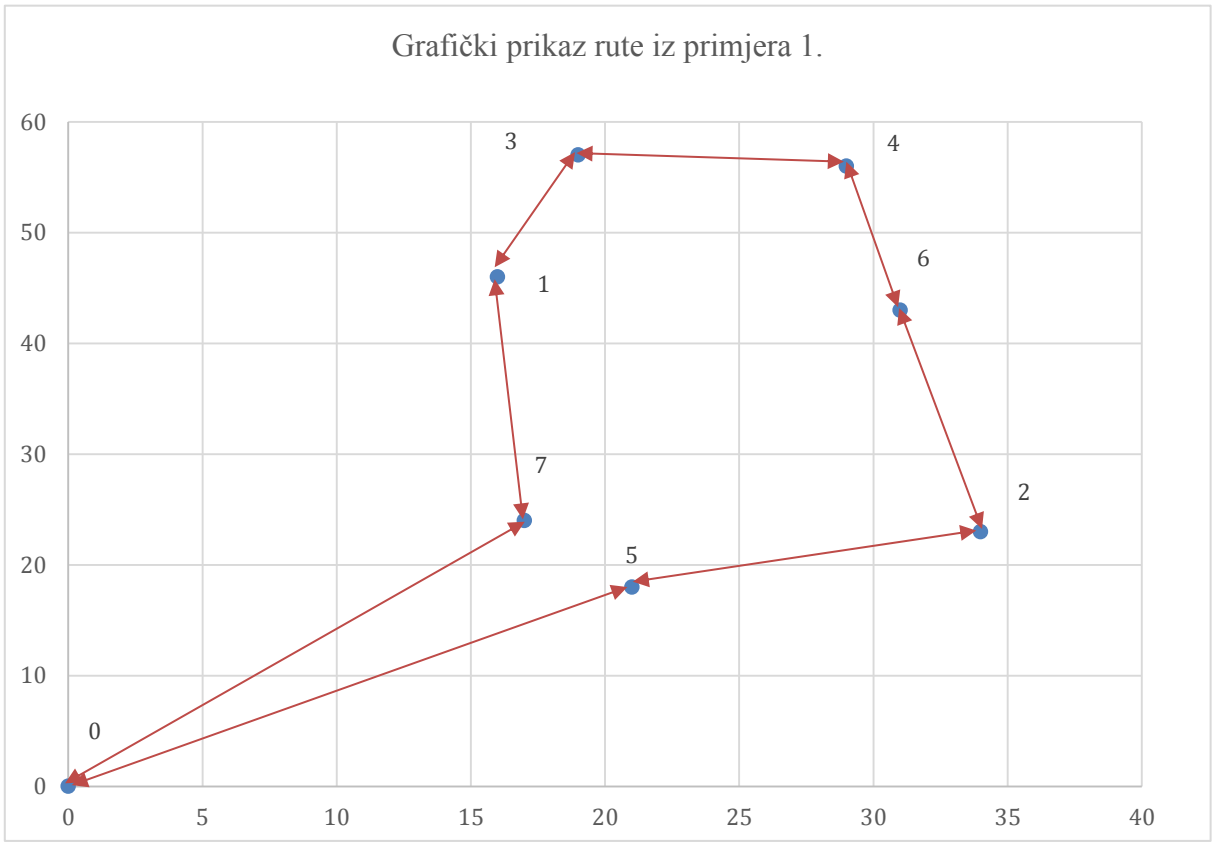
(1,7) => 0 ↔ 7 ↔ 1 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 2 ↔ 0

- Ušteda **(3,7)** se ne upotrebljava pri projektiranju rute jer su njeni čvorovi već uključeni u rutu već se uvrštava ušteda **(2,5)** budući da je čvor 2 vanjski čvor i moguće ju je uvrstiti u projektiranje rute:

(2,5) => 0 ↔ 7 ↔ 1 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 2 ↔ 5 ↔ 0

- Uštede **(5,6), (2,7), (4,5), (5,7), (1,5)** i **(3,5)** se mogu zanemariti jer su svi čvorovi već povezani u rutu, stoga su ograničenja zadovoljena i direktna veza među čvorovima je moguća.

Lista ušteda realizirana je do kraja, obzirom da je ruta kompletirana, ostale uštede se ne uzimaju u obzir pri projektiranju te algoritam završava. Na slici nalazi se grafički prikaz rješenja rute iz primjera 1.



Grafikon 1. Grafički prikaz rute iz primjera 1.

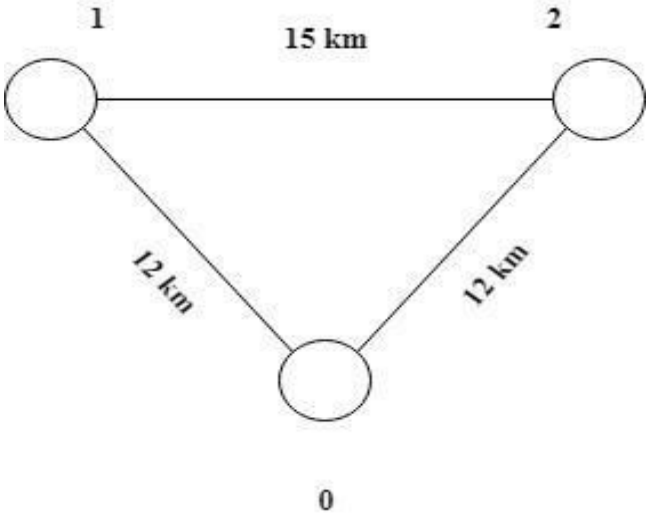
4.2. Clark-Wright-ov algoritam ušteda – metoda s indikatorom *T*

Clark–Wright-ov algoritam koristi se kod problema sa serijom ponavljanja, sve dok se ne dobije prihvatljivo rješenje. Praktična upotreba ovog algoritma ne mora nužno biti optimalna, ali lakoća upotrebe algoritma na probleme usmjeravanja vozila čini ga iznimno korisnim alatom. Logika samog algoritma, koja uključuje koncept uštede, služi kao baza za 25 sofisticiranije tehnike koje koriste mnogi komercijalni softveri. Clark–Wright-ov algoritam i koncept uštede omogućuje uštede koje mogu biti realizirane stvaranjem parova kod dostave u sustavu koji se sastoji od centralnog skladišta koje opslužuje vanjske centre u bilo kojem obliku. [13]

Primjer korištenja Clark-Wright-ovog algoritma ušteda – metode s indikatorom T obrađen je u nastavku teksta [13]:

Primjer 2.

Centralno skladište (0) nalazi se 12 kilometara udaljeno od dva dostavna (1,2), dok je međusobna udaljenost između dostavnih mjesta 15 kilometara.



Slika 4. Metoda s indikatorom T, primjer 1.

Izvor: [5]

U ovom primjeru Clark-Wright-ov algoritam prvo prati troškove vožnje od centralnog skladišta do jednog dostavnog mjesta i povratak do centralnog skladišta, zatim do drugog dostavnog mjesta pa ponovno povratak do centralnog skladišta. Stoga je trošak jednak zbroju troškova za svaki kilometar od početne točke, centralnog skladišta do jednog dostavnog mjesta ($0 \rightarrow 1$) i povratak u centralno skladište ($2C_{01}$) te vožnja od centralnog skladišta do drugog dostavnog mjesta ($0 \rightarrow 2$) i povratak u skladište ($2C_{02}$). Formula (14) prikazuje ukupni trošak:

$$Ukupni\ trošak = 2C_{01} + 2C_{02} \qquad (14)$$

Ukupni trošak dostave prema formuli (14) iznosio bi: 2 x 12 [km] + 2 x 12 [km] = 48 km

Clark-Wright algoritam nadalje uzima u obzir uštede koje se mogu ostvariti na putu od centralnog skladišta do jednog dostavnog mjesta i povratak do skladišta te od skladišta do drugog dostavnog mjesta i ponovni povratak do skladišta. Navedena ruta omogućuje uštedu troškova jedne dostave do prvog dostavnog mjesta i povratak do skladišta i ponovno do drugog 26 dostavnog mjesta i povratak do skladišta, ali dodaje troškove dostave od prvog do

drugog dostavnog mjesta. Koncept izračuna ušteda jednak je kao i kod osnovnog Clark-Wright-ovog algoritma. Ukupna ušteda S_{ij} dobivena povezivanjem bilo koje dvije lokacije prikazana je u formuli (15):

$$S_{ij} = C_{0i} + C_{0j} - C_{ij} \quad (15)$$

Ušteda na ovom primjeru prema formuli (15) iznosi:

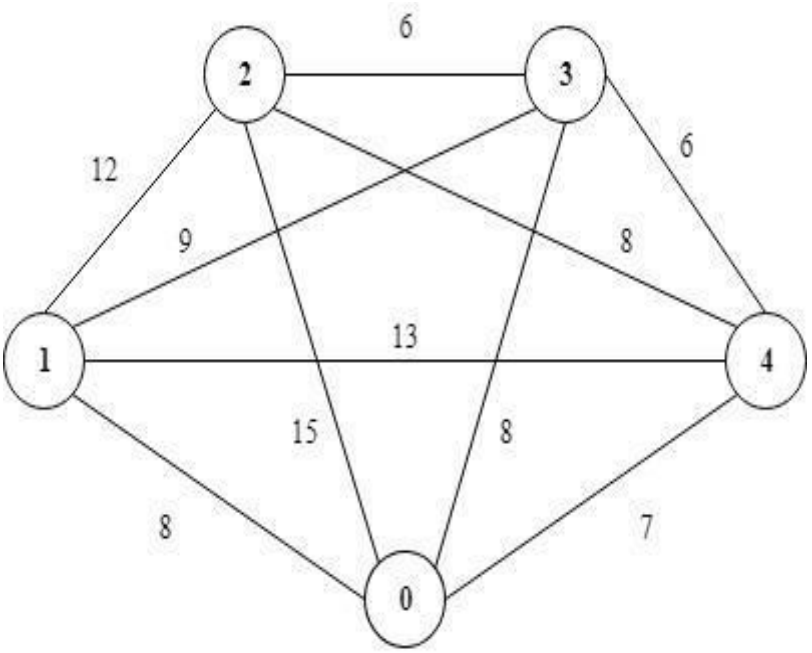
$$S_{12} = C_{01} + C_{02} - C_{12}$$

$$S_{12} = 12 + 12 - 15 = 9$$

Povezivanjem dvaju dostavnih mjesta u jednu rutu dobiva se ušteda od 9 kilometara.[5]

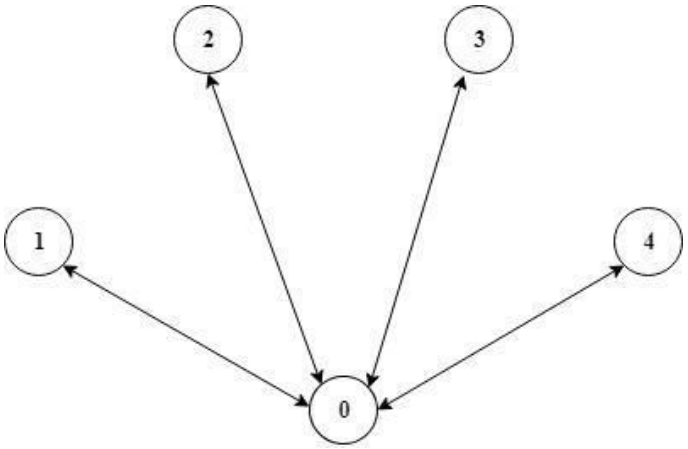
Primjer 3.

Na slici 6. nalazi se distribucijska mreža s prikazanim vrijednostima međusobnih udaljenosti između čvorova. Potrebno je odrediti najkraći put uz uvjet da se krene iz čvora 0, da se svaki čvor posjeti samo jednom te da završetak rute bude ponovno u čvoru 0. [13]



Slika 5. Metoda s indikatorom T, primjer 2., [13]

Za početak potrebno je izraditi polu-matricu udaljenosti. Dovoljno je izraditi polu-matricu, a ne cjelokupnu matricu, jer je graf simetričan, odnosno jednaka je udaljenost u oba smjera putovanja.



	1	2	3	4
0	**8**	**15**	**8**	**7**
	1	**12**	**9**	**13**
		2	**6**	**8**
			3	**6**

Slika 6. Distribucijska mreža 1., [13]

U sljedećem koraku potrebno je izračunati uštede za svaki vanjski par lokacija te izraditi novu polu-matricu ušteda. Uštede se računaju prema formuli (15).

$$S_{12} = 8 + 15 - 15 = 11$$

Na jednak način računaju se i ostale vrijednosti ušteda:

	1	2	3	4
0	-	-	-	-
	1	**11**	**7**	**2**
		2	**17**	**14**
			3	**9**

Nakon izračuna ušteda, u polu-matricu potrebno je unijeti vrijednosti T u odgovarajuće rubrike, odnosno u područja polazišta. Kalkulacije uštede za povezivanje svakog para temelji se na mogućnosti uštede uzimajući u obzir trošak kružne dostave vozila do svakog para. Indikator T pokazati će jesu li dvije lokacije npr. i i j ili 0 (početna točka) i j direktno povezane. Indikator T može imati jednu od tri vrijednosti:

a) $T = 2$ – kada vozilo ide iz početne točke do jedne lokacije i vraća se do početne točke. $T_{0j} = 2$ i samo u prvom retku matrice. Vrijednost indikatora T unosi se u matricu i zaokružuje kako bi se razlikovala od ukupne uštede. $T = 2$ označava kružnu, dvosmjernu dostavu, odnosno dostavu s povratkom.
b) $T = 1$ – kada vozilo ide direktno do lokacije i i j. To se prikazuje kao $T_{ij} = 1$ i može se uvesti na bilo koje mjesto u matrici. $T = 1$ označava jednosmjernu dostavu.
c) $T = 0$ – kada vozilo ide direktno do lokacije i i j. To se prikazuje kao $T_{ij} = 0$. $T = 0$ pokazuje da niti jedno putovanje nije učinjeno između parova lokacije.

	1	2	3	4
0	**2**	**2**	**2**	**2**
1		11	7	2
2			17	14
3				9

Prema slici 7.:

Prva ruta: 0 – 1 – 0

Druga ruta: 0 – 2 – 0

Treća ruta: 0 – 3 – 0

Četvrta ruta: 0 – 4 – 0

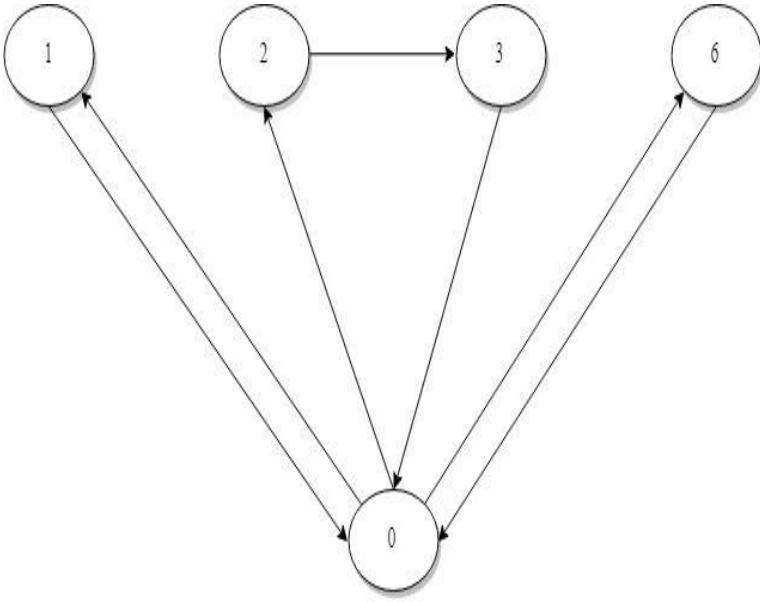
Sljedeći korak je odrediti najveću vrijednost uštede u matrici. Ako se maksimalna ušteda prikazuje u ćeliji *i* i *j* u matrici, tada se lokacije *i* i *j* mogu biti povezane ukoliko su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

- T_{0i} i $T_{0j} > 0$
- Lokacije *i* i *j* nisu već na istoj ruti

	1	2	3	4
0	T_{01}	T_{02}	T_{03}	T_{04}
1		11	7	2
2			17	14
3				9

Primjerice odabire se ušteda iznosa 17 iz polu-matrice udaljenosti, a ona obuhvaća čvorove 2 i 3. Prvi uvjet govori da se ušteda može koristiti ukoliko su T_{02} i T_{03} veći od nule, a drugi uvjet označava da se barem jedan od čvorova 2 ili 3 ne nalazi u već postojećoj djelomičnoj ruti. U nastavku je dano detaljnije pojašnjenje.

U navedenom primjeru ćelija (2,3) ima najveću vrijednost uštede (17). T_{02} i T_{03} su veći od nule, a lokacije 2 i 3 nisu na istoj ruti. Obzirom da su uvjeti zadovoljeni, u ćeliji (2,3) označi se vrijednost $T_{23} = 1$, što označuje jednosmjernu rutu između lokacija 2 i 3. Ovom radnjom omogućena je jednosmjerna ruta između lokacija 2 i 3, a onemogućena jednosmjerna ruta od lokacije 2 do početne točke (0) te jednosmjerna ruta od početne točke (0) do lokacije 3. Stoga je potrebno smanjiti vrijednost $T = 2$ u ćelijama (0, 2) i (0,3) na $T = 1$. Sljedeća matrica prikazuje izvedene izračune te nove vrijednosti T za novo ponavljanje, a slika 7 prikazuje tri nove jednosmjerne rute.



	1	2	3	4
0	**2**	**1**	**1**	**2**
1	11		7	2
2			1 17	14
3				9

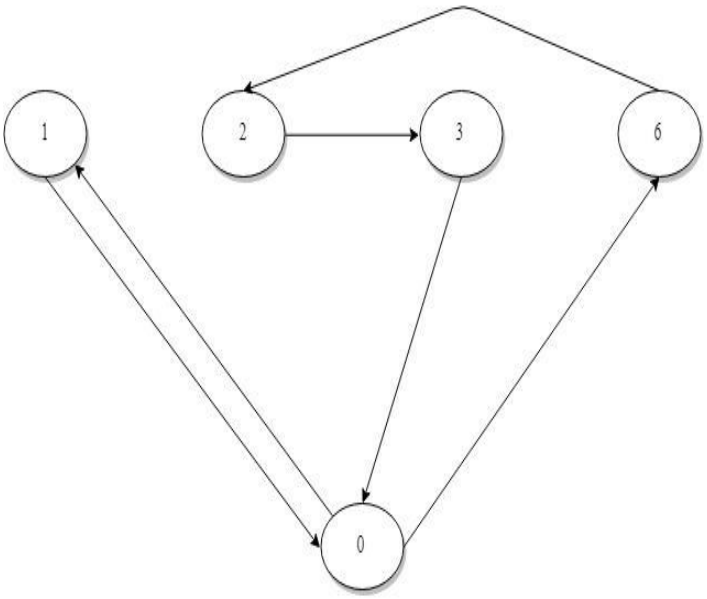
Slika 7. Ruta 0 - 2 - 3 – 0, [13]

Prva ruta: 0 - 1 - 0

Druga ruta: 0 - 2 - 3 - 0

Treća ruta: 0 - 4 - 0

U sljedećem koraku potrebno je uvrstiti sljedeću najveću vrijednost uštede, a da su pritom zadovoljena ograničenja. Ćelija (2,4) sadrži najveću vrijednost uštede (14) koja nije iskorištena u izračunu. T_{02} i T_{04} su veći od nule i lokacije 2 i 4 nisu na istoj ruti. Ove dvije lokacije mogu se povezati. $T_{24} = 1$ upiše se u ćeliju (2,4) te se vrijednost indikatora T, smanji u ćelijama (0,2) i (0,4) na jedno putovanje kao u prethodnom koraku. Promjena je prikazana na slici 8.



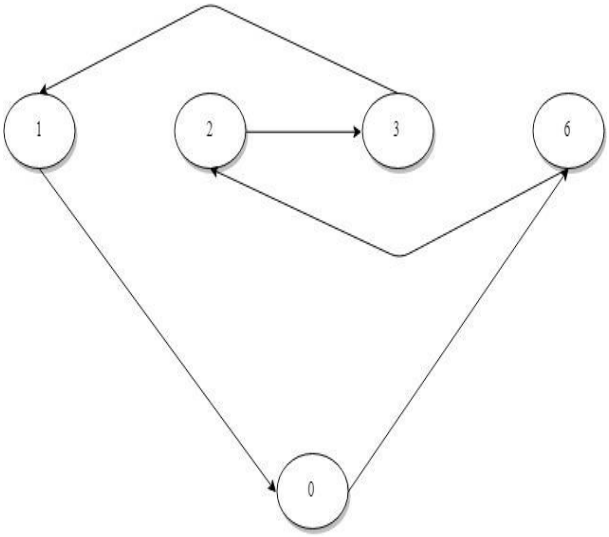
	1	2	3	4
0	**2**	**0**	**1**	**1**
1	11		7	2
2			1 17	1 14
3				9

Slika 8. Ruta 0 - 4 - 3 - 2 – 0, [13]

Prva ruta: 0 - 1 - 0

Druga ruta: 0 - 4 - 2 - 3 - 0

U ćeliji (1,2) sljedeća je najveća vrijednost uštede, međutim u tom slučaju T_{01} je veći od nule, ali T_{02} nije, stoga bi ovo povezivanje narušilo poštivanje ograničenja. Sljedeća najveća ušteda je u ćeliji (3,4), T_{03} i T_{04} su veći od nule, ali lokacije 3 i 4 već se nalaze na istoj ruti, što narušava ograničenja. Zatim se odabere ušteda (7) u ćeliji (1,3), T_{01} i T_{03} su veći od nule, a lokacije 1 i 3 ne nalaze se na istoj ruti i ne postoje druga ograničenja, zato se ove dvije lokacije mogu povezati. U ćeliju (1,3) unese se $T = 1$ i smanji se vrijednost T u ćelijama (0,1) i (0,3) za jedan kao u prethodnom koraku, što rezultira smanjenjem jednog putovanja od skladišta do lokacije 1 i jedno putovanje od lokacije 3 do centralnog skladišta. Obzirom da je graf simetričan, nije bitno u kojem je smjeru ruta usmjerena. Slika 9. prikazuje promjenu na ruti:



0	**1**	**0**	**0**	**1**
1	11	7	1	2
2		17	1	14
		3		9

Slika 9. Ruta 0 - 4 - 3 - 1 – 0, [13]

Za usporedbu rezultata u svrhu optimizacije distribucijske mreže na unaprijed definiranim rutama kretanja vozila korištenjem Clark-Wright-ovog algoritma, uzeti će se u obzir i druge matematičke metode koje nude optimizaciju distribucijske mreže, odnosno metode grananja i ograničavanja i metoda najbližeg susjeda.[5]

4.3. Metoda grananja i ograničavanja

Metoda grananja i ograničavanja (engl. *branch and bound*) metoda je paradigma dizajna algoritma koja se općenito koristi za rješavanje kombinatornih problema optimizacije. To su problemi koji su najčešće rješivi u eksponencijalnom vremenu i zahtijevaju istraživanje svih mogućih permutacija u najgorem slučaju. Te probleme *branch and bound* metoda rješava relativno brzo. Kako bi se problem trgovačkog putnika riješio korištenjem matematičke metode *branch and bound*, prvo ga je potrebno prilagoditi jeziku teorije grafova. [14]

Algoritam grananja i ograničavanja opći je algoritam za pronalazak optimalnih rješenja mnogih općenitih optimizacijskih problema. Sastoji se od brojanja svih potencijalnih rješenja, pri čemu se veliki podskupovi loših rješenja odbacuju. Loša rješenja su ona rješenja koja su unutar nekog intervala, odnosno između predefinirane gornje i donje granice. Redoslijed obilaska gradova od strane trgovačkog putnika prvo se rekurzivno grana na dva dijela te tako nastaje struktura stabla. Nakon toga računaju se gornja i donja granica za svaki dobiveni podskup. Ukoliko je donja granica određenog vrha bolja od gornje granice nekog

drugog vrha, taj drugi vrh se odbacuje iz pretrage. Rekurzija[6] se zaustavlja onog trena kada se skup reducira na jedan element ili kad njegova gornja granica postane jednaka njegovoj donjoj granici.[15]

Problem trgovačkog putnika prikazan u matričnom prikazu tablicom 3:[15]:

Tablica 3. Matrični prikaz primjera metode grananja i ograničavanja 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	∞	12	8	10	6
x_2	12	∞	12	5	7
x_3	8	12	∞	8	10
x_4	10	5	8	∞	4
x_5	6	7	10	4	∞

Korak 1: Za početak potrebno je ispisati minimalne vrijednosti iz svakog retka, odnosno, traži se minimalni element u svakom retku (u_i) kao što je prikazano tablicom 4:

Tablica 4. Matrični prikaz minimalnih vrijednosti primjera metoda grananja i ograničavanja

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	min
x_1	∞	12	8	10	6	6
x_2	12	∞	12	5	7	5
x_3	8	12	∞	8	10	8
x_4	10	5	8	∞	4	4
x_5	6	7	10	4	∞	4
Σ						27

Zatim se oduzimaju sve vrijednosti pojedinog retka s minimalnom vrijednošću istog tog retka. U navedenom matričnom prikazu, prvi redak se oduzima sa 6, drugi redak sa 5, treći redak sa 8 te četvrti i peti redak sa 4. Dobiveni rezultat prikazan je sljedećom matricom u tablici 5:

[6] U matematici i računarstvu, rekurzija specificira (ili konstruira) klasu objekata ili metoda (ili objekata iz određene klase) definiranjem nekoliko jednostavnih osnovnih slučajeva ili metoda (često samo jednu), i potom definiranjem pravila za razbijanje složenih slučajeva u jednostavnije.

Tablica 5. Matrični prikaz primjera metode grananja i ograničavanja

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	∞	6	2	4	0
x_2	7	∞	7	0	2
x_3	0	4	∞	0	2
x_4	6	1	4	∞	0
x_5	2	3	6	0	∞

Korak 2: Izdvojiti minimalni element iz svakog stupca (v_j) kao što je prikazano tablicom 6:

Tablica 6. Matrični prikaz izdvajanja minimalnih vrijednosti iz primjera metode grananja i ograničavanja

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Σ
x_1	∞	6	2	4	0	
x_2	7	∞	7	0	2	
x_3	0	4	∞	0	2	
x_4	6	1	4	∞	0	
x_5	2	3	6	0	∞	
min	0	1	2	0	0	3

Oduzimaju se vrijednosti stupaca s minimalnim vrijednostima stupaca. Prvi, četvrti i peti stupac ostat će nepromijenjeni jer se oduzimaju s nulom, dok se drugi stupac oduzima s jedan, a treći s dva. Dobivena je prva reducirana matrica koja ima barem jednu nulu u svakom retku i svakom stupcu kao što je prikazano tablicom 7:

Tablica 7. Matrični prikaz primjera metode grananja i ograničavanja

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	∞	5	0	4	0
x_2	7	∞	5	0	2
x_3	0	3	∞	0	2
x_4	6	0	2	∞	0
x_5	2	2	4	0	∞

Polja koja sadrže nulu su kandidati za uspostavljanje direktne veze među gradovima, odnosno lokacijama.

Korak 3: Donja granica na duljini svih kružnih puteva računa se prema formuli 16:

$$\sum_{i=1}^{n} ui + \sum_{j=1}^{n} vj \tag{16}$$

Gdje je: u_i = zbroj minimalnih vrijednosti elemenata iz svakog retka

v_j = zbroj minimalnih vrijednosti elemenata iz svakog stupca

Prema formuli (16), donja granica na ovom primjeru iznosi:

$$D.G. = 27 + 3 = 30$$

Korak 4: Za svako polje s nulom računa se kazna za nekorištenje predložene veze među gradovima na način: kazna na polju (*i, j*) = minimalan element u retku *i* + minimalan element u retku *j* ne uključujući polje (*i, j*). Primjerice kazna za prvu nulu u retku x_1 i stupcu x_3 računa se tako da se zbroji minimalna vrijednost iz retka koja iznosi 0 s minimalnom vrijednošću stupca koja iznosi 2, stoga je vrijednost kazne 2. Na jednak način izračunava se vrijednost kazne za sljedeću po redu nulu, a to je nula u retku x_1 i stupcu x_5, minimalna vrijednost u retku je 0 te se zbraja s minimalnom vrijednošću iz stupca koja iznosi također 0, vrijednost kazne za navedenu nulu iznosi 0. Po istom principu izračunavaju se kazne za sve preostale nule kao što je prikazano tablicom 8:

Tablica 8. Matrični prikaz izračuna kazni za metodu grananja i ograničavanja

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	∞	5	$0^{(0+2)}$	4	$0^{(0+0)}$
x_2	7	∞	5	$0^{(2+0)}$	2
x_3	$0^{(0+2)}$	3	∞	$0^{(0+0)}$	2
x_4	6	$0^{(0+2)}$	2	∞	$0^{(0+0)}$
x_5	2	2	4	$0^{(2+0)}$	∞

Nakon što su izračunate sve kazne za nekorištenje predložene veze među gradovima, odabire se kazna koja ima najveću vrijednost u odnosu na druge. U ovom primjeru postoji čak pet kazni koje sadrže najveću vrijednost koja iznosi dva. Odabire se kazna koja je prva po redu, a to je kazna u redu x_1 i stupcu x_3, na taj način dobivena je prva relacija: $1 \rightarrow 3$, kao što je prikazano tablicom 9.

Tablica 9. Matrični prikaz izračuna kazni za metodu grananja i ograničavanja

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
~~x_1~~	~~∞~~	~~5~~	~~$0^{(2)}$~~	~~4~~	~~$0^{(0)}$~~
x_2	7	∞	5	$0^{(2)}$	2
x_3	$0^{(2)}$	3	∞	$0^{(0)}$	2
x_4	6	$0^{(2)}$	2	∞	$0^{(0)}$
x_5	2	2	4	$0^{(2)}$	∞

Nakon odabira prve relacija, nastaje nova reducirana matrica bez retka x_1 i stupca x_3, kao što je prikazano tablicom 10:

Tablica 10. Matrični prikaz reducirane matrice za metodu grananja i ograničavanja

	x_1	x_2	x_4	x_5
x_2	7	∞	0	2
x_3	∞	3	0	2
x_4	6	0	∞	0
x_5	2	2	0	∞

Obzirom da reducirana matrica sadrži stupac (x_1) u kojem se nalazi barem jedna nula, potrebno je oduzeti sve elemente stupca x_1 s minimalnom vrijednošću istog stupca koja iznosi 2, kao što je prikazano tablicom 11:

Tablica 11. Matrični prikaz primjera metode grananja i ograničavanja

	x_1	x_2	x_4	x_5
x_2	7	∞	0	2
x_3	∞	3	0	2
x_4	6	0	∞	0
x_5	2	2	0	∞
min	2	0	0	0

Nakon operacije oduzimanja, dobivena je nova matrica u kojoj svi retci i svi stupci sadrže barem jednu nulu, kao što je prikazano tablicom 12:

Tablica 12. Matrični prikaz primjera metode grananja i ograničavanja

	x_1	x_2	x_4	x_5
x_2	5	∞	0	2
x_3	∞	3	0	2
x_4	4	0	∞	0
x_5	0	2	0	∞

Sljedeći korak je izračun kazni po jednakom principu kao kod prethodnog izračuna kazni. U retku x_5 minimalan element je 0, a minimalna vrijednost u stupcu x_1 iznosi 4 te zbroj ta dva elementa predstavlja najvišu vrijednost kazne u matrici, stoga je sljedeća relacija: 5 → 1, kao što je prikazano tablicom 13:

Tablica 13. Matrični prikaz primjera metode grananja i ograničavanja

	x_1	x_2	x_4	x_5
x_2	5	∞	$0^{(2)}$	2
x_3	∞	3	$0^{(2)}$	2
x_4	4	0	∞	0
x_5	$0^{(4)}$	2	$0^{(2)}$	∞

Obzirom da se barem jedna nula nalazi u svakom retku i svakom stupcu, nije potrebno oduzimati minimalne elemente stupaca ili redaka s ostalim elementima, kao što je prikazano tablicom 14:

Tablica 14. Matrični prikaz primjera metode grananja i ograničavanja

	x_2	x_4	x_5
x_2	∞	0	2
x_3	3	0	2
x_4	0	∞	0

Minimalan element u retku x4 je 0, dok minimalna vrijednost u stupcu x2 iznosi 3, prema tome zbroj navedenih vrijednosti iznosi 3 i predstavlja maksimalnu vrijednost kazne, što označava novu relaciju: 4 → 2, kao što je prikazano tablicom 15:

Tablica 15. Matrični prikaz primjera metode grananja i ograničavanja

	x_2	x_4	x_5
x_2	∞	$0^{(2)}$	2
x_3	3	$0^{(2)}$	2
~~x_4~~	$0^{(3)}$	∞	$0^{(2)}$

U novoj reduciranoj matrici redak x_2 ne sadrži nulu, stoga je potrebno oduzeti minimalni element s ostalim elementima, što u ovom slučaju znači da se redak x_2 oduzima s elementom 2, te se dobije nula na poziciji x_2 i x_5, kao što je prikazano tablicom 16:

Tablica 16. Matrični prikaz primjera metode grananja i ograničavanja

	x_4	x_5
x_2	∞	2
x_3	0	2

Vrijednost kazni za obje nule iznosi 2, jer je maksimalni element jednak za obje nule. Za odabir relacije uzimaju se obje kazne, stoga posljednje dvije relacije glase: 2 → 5 i 3 → 4, kao što je prikazano tablicom 17:

Tablica 17. Matrični prikaz primjera metode grananja i ograničavanja

	x_4	x_5
x_2	∞	$\boxed{0^{(2)}}$
x_3	$\boxed{0^{(2)}}$	2

Nakon što su izračunate sve relacije, njihovim spajanjem dobivena je konačna ruta:

$4 \rightarrow 2$

$1 \rightarrow 3$

$5 \rightarrow 1$

$2 \rightarrow 5 \Rightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 1$

$3 \rightarrow 4 \Rightarrow 1 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 1$

4.4. Metoda najbližeg susjeda

Metoda najbližeg susjeda ili heuristika najbližeg susjeda (engl. *Nearest Neighbour Heuristic* - NNH) je jedan od prvih algoritama za rješavanje problema trgovačkog putnika. Često se upotrebljava kao inicijalno rješenje za testiranje popravljajućih heuristika. Navedena metoda je brza, međutim rješenja su uvijek daleko od optimalnih. Algoritam najbližeg susjeda temelji se na pohlepnom dodavanju najbližeg vrha već dodanim vrhovima u ruti. Metoda najbližeg susjeda zasniva se na ideji pretraživanja događaja koji je najbliži trenutnom događaju.[5]

Algoritam se može opisati u tri koraka [6]:

Korak 1: Odabrati vrh 0 za početni vrh,

Korak 2: Iz skupa nedodanih vrhova, odabrati onaj koji je najbliži posljednjem dodanom vrhu i uključiti ga u rutu,

Korak 3: Ponavljati korak 2 sve dok svi vrhovi ne budu uključeni u rutu te tada spojiti početni i posljednji vrh.

Vremenska složenost algoritma najbližeg susjeda algoritma za problem koji uključuje n gradova je $O(n^2)$. Modificirana primjena navedenog algoritma je razmatranje svih n vrhova kao početne točke, čime kompleksnost raste na $O(n^3)$, međutim dobiveno rješenje je bolje i preciznije [10].

Primjer 3.:

U tablici 18. zadana je matrica udaljenosti između gradova, odnosno udaljenosti između različitih lokacija. Potrebno je izračunati minimalan put između lokacija pomoću metode najbližeg susjeda.

Tablica 18. Matrični prikaz izračuna primjera metode najbližeg susjeda

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	43	54	36	30	12	17	16
x_1	43	∞	58	47	59	14	35	19
x_2	54	58	∞	33	26	32	44	40
x_3	36	47	33	∞	38	27	41	23
x_4	30	59	26	38	∞	15	32	34
x_5	12	14	32	27	15	∞	39	56
x_6	17	35	44	41	32	39	∞	6
x_7	16	19	40	23	34	56	6	∞

Postupak izračuna započinje na način da se odabere čvor, lokacije koja predstavlja početnu točku rute. Ruta započinje iz čvora x_0 te se odabire najmanja udaljenost prema jednom od čvorova (lokacija), u ovom primjeru minimalna udaljenost iznosi 12 km, a nalazi se između čvora x_0 i x_5. Odabrana udaljenost je vrijednost početne relacije rute, kao što je prikazano tablicom 19:

Tablica 19. Matrični prikaz izračuna metode najbližeg susjeda

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	43	54	36	30	12	17	16
x_1	43	∞	58	47	59	14	35	19
x_2	54	58	∞	33	26	32	44	40
x_3	36	47	33	∞	38	27	41	23
x_4	30	59	26	38	∞	15	32	34
x_5	12	14	32	27	15	∞	39	56
x_6	17	35	44	41	32	39	∞	6
x_7	16	19	40	23	34	56	6	∞

$0 \rightarrow 5$

Nakon toga, iz čvora x_5 pretraga po stupcima za najmanju udaljenost prema prvoj mogućoj lokaciji. Rezultat pretrage je stupac, odnosno čvor x_1, kao što je prikazano tablicom 20:

Tablica 20. Matrični prikaz izračuna primjera metode najbližeg susjeda

		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0		∞	43	54	36	30	12	17	16
x_1		43	∞	58	47	59	14	35	19
x_2		54	58	∞	33	26	32	44	40
x_3		36	47	33	∞	38	27	41	23
x_4		30	59	26	38	∞	15	32	34
x_5		12	14	32	27	15	∞	39	56
x_6		17	35	44	41	32	39	∞	6
x_7		16	19	40	23	34	56	6	∞

$0 \rightarrow 5 \rightarrow 1$

Na isti način potrebno je odabrati sljedeću minimalnu udaljenosti iz čvora x_1. Minimalni element u retku x_1 je 19, odnosno čvor x_7, kao što je prikazano tablicom 21:

Tablica 21. Matrični prikaz izračuna metode najbližeg susjeda

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	43	54	36	30	12	17	16
x_1	43	∞	58	47	59	14	35	19
x_2	54	58	∞	33	26	32	44	40
x_3	36	47	33	∞	38	27	41	23
x_4	30	59	26	38	∞	15	32	34
x_5	12	14	32	27	15	∞	39	56
x_6	17	35	44	41	32	39	∞	6
x_7	16	19	40	23	34	56	6	∞

$0 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 7$

Iz čvora x_7 odabire se minimalna vrijednost koja nije u već odabranom stupcu, odnosno da ne bi nastala pod-ruta (*subtour*), biraju se vrijednosti slobodnih čvorova, u ovom slučaju to je vrijednost 6 iz čvora x_6, kao što je prikazano tablicom 22:

Tablica 22. Matrični prikaz izračuna metode najbližeg susjeda

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	43	54	36	30	12	17	16
x_1	43	∞	58	47	59	14	35	19
x_2	54	58	∞	33	26	32	44	40
x_3	36	47	33	∞	38	27	41	23
x_4	30	59	26	38	∞	15	32	34
x_5	12	14	32	27	15	∞	39	56
x_6	17	35	44	41	32	39	∞	6
x_7	16	19	40	23	34	56	6	∞

$0 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \rightarrow 6$

Ruta je usmjerena od čvora x_6 prema čvoru x_4 jer minimalna udaljenost iznosi 32, kao što je prikazano tablicom 23:

Tablica 23. Matrični prikaz izračuna metode najbližeg susjeda

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	43	54	36	30	12	17	16
x_1	43	∞	58	47	59	14	35	19
x_2	54	58	∞	33	26	32	44	40
x_3	36	47	33	∞	38	27	41	23
x_4	30	59	26	38	∞	15	32	34
x_5	12	14	32	27	15	∞	39	56
x_6	17	35	44	41	32	39	∞	6
x_7	16	19	40	23	34	56	6	∞

$0 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 4$

Obzirom da je x_4 posljednji odabrani čvor u ruti, odabire se dopuštena minimalna vrijednost prema prvom sljedećem čvoru, vrijednosti 26, prema čvoru $x2$, kao što je prikazano tablicom 24:

:

Tablica 24. Matrični prikaz izračuna metode najbližeg susjeda

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	43	54	36	30	12	17	16
x_1	43	∞	58	47	59	14	35	19
x_2	54	58	∞	33	26	32	44	40
x_3	36	47	33	∞	38	27	41	23
x_4	30	59	26	38	∞	15	32	34
x_5	12	14	32	27	15	∞	39	56
x_6	17	35	44	41	32	39	∞	6
x_7	16	19	40	23	34	56	6	∞

$0 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 2$

Preostala su posljednja dva čvora za kompletnost rute. Potrebno je odabrati minimalnu udaljenost iz čvora x_2 prema pretposljednjem čvoru. Minimalna vrijednost je 33, usmjerena prema čvoru x_3. U hipotetskom slučaju da se minimalna vrijednost nalazi u čvoru x_0, ta ruta ipak ne bi bila odabrana jer bi nastala pod-ruta (*subtour*) odnosno, svi čvorovi ne bi bili uključeni u rutu, jer je x_0 polazni čvor, on ujedno mora predstavljati i završni čvor, dok su između svi preostali čvorovi u ruti, budući da je cilj dobiti Hamiltonov ciklus, odnosno da početna točka bude ujedno i završna točka, kao što je prikazano tablicom 25:

Tablica 25. Matrični prikaz izračuna metode najbližeg susjeda

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	43	54	36	30	12	17	16
x_1	43	∞	58	47	59	14	35	19
x_2	54	58	∞	33	26	32	44	40
x_3	36	47	33	∞	38	27	41	23
x_4	30	59	26	38	∞	15	32	34
x_5	12	14	32	27	15	∞	39	56
x_6	17	35	44	41	32	39	∞	6
x_7	16	19	40	23	34	56	6	∞

$0 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3$

Posljednji korak u algoritmu prikazuje povezivanje posljednjeg odabranog čvora u ruti x4 te polaznog čvora u ovom slučaju to je čvor x0. Iako vrijednost 36 nije minimalna, prema pravilima i ograničenjima to je jedina moguća kombinacija, kao što je prikazano tablicom 26:

Tablica 26. Matrični prikaz izračuna metode najbližeg susjeda

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	43	54	36	30	12	17	16
x_1	43	∞	58	47	59	14	35	19
x_2	54	58	∞	33	26	32	44	40
x_3	36	47	33	∞	38	27	41	23
x_4	30	59	26	38	∞	15	32	34
x_5	12	14	32	27	15	∞	39	56
x_6	17	35	44	41	32	39	∞	6
x_7	16	19	40	23	34	56	6	∞

Ruta je kompletirana u potpunosti te glasi: $0 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 0$

5. ANALIZA POSTOJEĆIH RUTA I PROJEKTIRANJE NOVIH RUTA KORIŠTENJEM MATEMATIČKIH MODELA

U ovome poglavlju analizirati će se postojeća opskrbna ruta kojom se UNP prevozi od punionice do postaja u okolici Grada Zagreba. Koristiti će se podaci dobiveni u LOC-u INA-e d.d. te će se uz analizu postojeće rute projektirati nove rute korištenjem matematičkih modela opisanih u prethodnom dijelu rada. Obzirom na broj vozila, razlikuje se sedam različitih ruta koje će biti analizirane. Rute su jednostavno nazvane prema vozilu koje putuje određenom rutom zbog zaštite podataka prijevoznika. Detaljno će se prikazati postupak izračuna najkraćeg puta po svim navedenim matematičkim metodama. U tablici prikazani su podaci koji služe za izračun najkraćeg puta. Polazna točka svih ruta je punionica INA d.d. UNP Zagreb na adresi Radnička cesta 216.

5.1. Ruta vozila 1

Ruta vozila 1 obilazi osam različitih lokacija. Udaljenosti su dobivene pomoću „Google Maps“ GIS[7] sustava.

U tablici 27. su navedene lokacije koje opslužuje vozilo 1, a prikazuju redoslijed i udaljenosti koje vozilo 1 slijedi. Matrica udaljenosti u tablici 28. je izrađena prema podacima iz „Google Maps“ sustava, a u njoj se nalaze udaljenosti između svih čvorova na ruti koju obilazi vozilo 1 te će se prema njoj projektirati rute korištenjem matematičkih modela.

[7] GIS (geografski informacijski sustav) je sustav za upravljanje prostornim podacima i osobinama koje su im pridružene

Tablica 27. Redoslijed i udaljenosti rute vozila 1

Čvor	**Lokacija**	**Adresa**	**Udaljenost od prethodne lokacije (km)**	**Udaljenost od polazišta (km)**
x_0	Zagreb	Radnička 216	0	0
x_1	Popovača	Lipovečka 22	60	60
x_2	Ivanić-Grad	Moslavačka 15	25	39
x_3	Božjakovina	Bjelovarska 135	21	26
x_4	Kloštar Ivanić	Kralja Tomislava 18	17	44
x_5	Kutina	Kneza Ljudevita Posavskog 34	51	79
x_6	Novska	Potočna 78	28	101
x_7	Čazma	Franje Vidovića 63	74	56
		Ukupna duljina rute	330 km	

Tablica 28. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila 1

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	0	60	39	26	44	79	101	56
x_1	60	0	25	41	24	25	50	25
x_2	39	25	0	21	5	46	28	52
x_3	26	41	21	0	17	68	90	35
x_4	44	24	5	17	0	51	73	17
x_5	79	25	46	68	51	0	28	52
x_6	101	50	28	90	73	28	0	74
x_7	56	25	52	35	17	52	74	0

5.1.1. Projektiranje rute vozila 1 Clark-Wright-ovim algoritmom „ušteda“

Za početak potrebno je iz matrice udaljenosti izračunati uštede za svaki par čvorova međusobno. Uštede se izračunavaju prema formuli (11), a rješenje svakog pojedinačnog

izračuna prikazuje vrijednost uštede između dva odabrana vrha. U nastavku je prikazan postupak izračuna:

Uštede se računaju prema formuli (11):

$$S(i, j) = d(0,i) + d(0, j) - d(i, j)$$

$S_{12} = d(0,1) + d(0,2) - d(1,2) = 60 + 39 - 25 = 74$

$S_{13} = 60 + 26 - 41 = 45$

$S_{14} = 60 + 44 - 24 = 80$

$S_{15} = 60 + 79 - 25 = 114$

$S_{16} = 60 + 101 - 50 = 111$

$S_{17} = 60 + 56 - 25 = 91$

$S_{23} = 39 + 26 - 21 = 44$

$S_{24} = 39 + 44 - 5 = 78$

$S_{25} = 39 + 79 - 46 = 72$

$S_{26} = 39 + 101 - 28 = 112$

$S_{27} = 39 + 56 - 52 = 43$

$S_{34} = 26 + 44 - 17 = 53$

$S_{35} = 26 + 79 - 68 = 37$

$S_{36} = 26 + 101 - 90 = 37$

$S_{37} = 26 + 56 - 35 = 47$

$S_{45} = 44 + 79 - 51 = 72$

$S_{46} = 44 + 101 - 73 = 72$

$S_{47} = 44 + 56 - 17 = 83$

$S_{56} = 79 + 101 - 28 = 152$

$S_{57} = 79 + 56 - 52 = 83$

$S_{67} = 101 + 56 - 74 = 83$

U tablici 29. prikazane su vrijednosti ušteda za svaku granu između vrhova prema redoslijedu vrhova dobivene pomoću formule (11).

Tablica 29. Uštede za rutu vozila 1 prema redoslijedu vrhova

Grana (*i, j*)	Ušteda s(*i, j*)	Grana (*i, j*)	Ušteda s(*i, j*)	Grana (*i, j*)	Ušteda s(*i, j*)
1,2	74	**2,4**	78	**3,7**	47
1,3	45	**2,5**	72	**4,5**	72
1,4	80	**2,6**	112	**4,6**	72
1,5	114	**2,7**	43	**4,7**	83
1,6	111	**3,4**	53	**5,6**	152
1,7	91	**3,5**	37	**5,7**	83
2,3	44	**3,6**	37	**6,7**	83

U sljedećem koraku, vrijednosti ušteda potrebno je poredati od najveće prema najmanjoj u svrhu nastavka postupka izvršavanja Clark-Wright-ovog algoritma, odnosno zbog projektiranja ruta vozila 1. Tablica 30. prikazuje vrijednosti ušteda prema redoslijedu od najveće prema najmanjoj vrijednosti.

Tablica 30. Lista ušteda za rutu vozila 1 prema veličini

Grana (*i, j*)	Ušteda s(*i, j*)	Grana (*i, j*)	Ušteda s(*i, j*)	Grana (*i, j*)	Ušteda s(*i, j*)
(5,6)	152	**(6,7)**	83	**(3,4)**	53
(1,5)	114	**(1,4)**	80	**(3,7)**	47
(2,6)	112	**(2,4)**	78	**(1,3)**	45
(1,6)	111	**(1,2)**	74	**(2,3)**	44
(1,7)	91	**(2,5)**	72	**(2,7)**	43
(4,7)	83	**(4,5)**	72	**(3,5)**	37
(5,7)	83	**(4,6)**	72	**(3,6)**	37

U posljednjem koraku Clark-Wright-ovog algoritma računa se nova ruta prema uštedama iz tablice 30. uz zadovoljavanje operativnih ograničenja odnosno uvjeta kako je prikazano u nastavku:

(5,6) => 0 ↔ 5 ↔ 6 ↔ 0,

(1,5) => 0 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 6 ↔ 0,

(2,6) => 0 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 6 ↔ 2 ↔ 0,

(1,6) => grana se ne koristi jer se oba čvora već nalaze unutar rute,

(1,7) => 0 ↔ 7 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 6 ↔ 2 ↔ 0,

(4,7) => 0 ↔ 4 ↔ 7 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 6 ↔ 2 ↔ 0

(5,7), (6,7), (1,4), (2,4), (1,2), (2,5), (4,5), (4,6) => čvorovi se već nalaze u ruti

(3,4) => 0 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 7 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 6 ↔ 2 ↔ 0 = 240 km

Povezivanjem u rutu posljednjeg čvora, algoritam završava te se ostale grane, odnosno uštede ne uzimaju u obzir. Konačna ruta glasi: 0 ↔ 5 ↔ 6 ↔ 2 ↔ 4 ↔ 7 ↔ 1 ↔ 3 ↔ 0.

5.1.2. Projektiranje rute vozila 1 Clark-Wright-ovim algoritmom „ušteda“, metoda s indikatorom *T*

U daljnjem tekstu je prikazana polu-matrica unutar koje se nalaze uštede prema čvorovima, a polu-matrica je vrijednosno identična podacima iz matrice ušteda kod Clark-Wright-ovog algoritma ušteda, dakle također se računa prema formuli (11), kao što je prikazano tablicom 31:

Tablica 31. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila 1, Clark-Wrightova metoda s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
	x_1	74	45	80	114	111	91
		x_2	44	78	72	112	43
			x_3	53	37	37	47
				x_4	72	72	83
					x_5	152	83
						x_6	83
							x_7

Najveća ušteda je ušteda između čvorova x_5 i x_6, stoga se mogućost korištenja navedenih čvorova smanjuje za jedan, kao što je prikazano tablicom 32. Postavlja se ruta $0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 0$.

Tablica 32. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1, Clark-Wrightova metoda s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	**2**	**2**	**2**	**2**	**1**	**1**	**2**
	x_1	74	45	80	114	111	91
		x_2	44	78	72	112	43
			x_3	53	37	37	47
				x_4	72	72	83
					x_5	**1** 152	83
						x_6	83

Sljedeća najveća ušteda iznosi 114 km i uključuje čvorove x_1 i x_5. Na jednak način se oduzimaju mogućnosti korištenja čvorova, kao što je prikazano tablicom 33. Obzirom na oduzimanje mogućnosti korištenja, čvor x_5 iskorišten je maksimalno dva puta te sada ima funkciju unutarnjeg čvora u novo nastaloj ruti: $0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 0$

Tablica 33. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1, Clark-Wrightova metoda s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	**1**	**2**	**2**	**2**	**0**	**1**	**2**
	x_1	74	45	80	**1** 114	111	91
		x_2	44	78	72	112	43
			x_3	53	37	37	47
				x_4	72	72	83
					x_5	**1** 152	83
						x_6	83
							x_7

Sljedeća maksimalna ušteda iznosi 112 km, a uključuje čvorove x_2 i x_6, obzirom da je čvor x_6 sada iskorišten dva puta, gubi se daljnja mogućnost njegova korištenja te postaje unutrašnji čvor u ruti, kao što je prikazano tablicom 34. Povezivanjem čvorova x_6 i x_2 nastaje ruta: $0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0$.

Tablica 34. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1, Clark-Wrightova metoda s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	**1**	**1**	**2**	**2**	**0**	**0**	**2**
	x_1	74	45	80	**1** 114	111	91
		x_2	44	78	72	**1** 112	43
			x_3	53	37	37	47
				x_4	72	72	83
					x_5	**1** 152	83
						x_6	83
							x_7

Sljedeća ušteda uključuje čvorove x_1 i x_6, međutim nije ju moguće iskoristiti jer je čvor x_6 već iskorišten dva puta. Najveća ušteda nakon nje uključuje čvorove x_1 i x_7, a iznos uštede je 91 km te se navedena ušteda koristi u projektiranju rute, kao što je prikazano tablicom 35:

$0 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0.$

Tablica 35. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1, Clark-Wrightova metoda s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	**0**	**1**	**2**	**2**	**0**	**0**	**1**
	x_1	74	45	80	**1** 114	111	**1** 91
		x_2	44	78	72	**1** 112	43
			x_3	53	37	37	47
				x_4	72	72	83
					x_5	**1** 152	83
						x_6	83
							x_7

Čvor x_4 nadovezuje se s rutom preko čvora x_7 te ušteda između čvorova x_4 i x_7 iznosi 83 km te se uvrštava u rutu kao što je prikazano tablicom 36:

$0 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0.$

Tablica 36. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1, Clark-Wrightova metoda s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	**0**	**1**	**2**	**1**	**0**	**0**	**0**
	x_1	74	45	80	**1** 114	111	**1** 91
		x_2	44	78	72	**1** 112	43
			x_3	53	37	37	47
				x_4	72	72	**1** 83
					x_5	**1** 152	83
						x_6	83
							x_7

Budući da su čvorovi x_1, x_5, x_6 i x_7 već iskorišteni dva puta, sljedeća najveća ušteda koja zadovoljava sve uvjete i može se iskoristiti je ušteda između čvorova x_3 i x_4 koja iznosi 53 km i njenim uvrštavanjem je kompletirana ruta, kao što je prikazano tablicom 37:

$0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0.$

Tablica 37. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1, Clark-Wrightova metoda s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
	x_1	74	45	80	**1** 114	111	**1** 91
		x_2	44	78	72	**1** 112	43
			x_3	**1** 53	37	37	47
				x_4	72	72	**1** 83
					x_5	**1** 152	83
						x_6	83
							x_7

$0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0 = 240$ km

5.1.3. Projektiranje rute vozila 1 pomoću metode grananja i ograničavanja

Metoda grananja i ograničavanja kao sredstvo rješavanja problema trgovačkog putnika, rješava se prema izvodu danom u poglavlju 4.3. Matrični prikaz međusobnih udaljenosti lokacija, kao što je prikazano tablicom 38, osnova je za izračun metode grananja i ograničavanja, a nalazi se u nastavku:

Tablica 38. Matrični prikaz udaljenosti na ruti vozila 1, metoda grananja i ograničavanja

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	60	39	26	44	79	101	56
x_1	60	∞	25	41	24	25	50	25
x_2	39	25	∞	21	5	46	28	52
x_3	26	41	21	∞	17	68	90	35
x_4	44	24	5	17	∞	51	73	17
x_5	79	25	46	68	51	∞	28	52
x_6	101	50	28	90	73	28	∞	74
x_7	56	25	52	35	17	52	74	∞

Vrijednosti iz svakog retka potrebno je oduzeti s minimalnim vrijednostima pojedinih redaka, kao što slijedi, u prvom retku kod čvora x_0 minimalna udaljenost iznosi 26 stoga se ona oduzima od svih ostalih vrijednosti u tome retku. Potom u drugom retku, gdje je minimalna vrijednost kod čvora x_1 24, ta se vrijednost oduzima od ostalih vrijednosti istom retku. Postupak se ponavlja na jednak način i za ostale retke, a reducirana matrica, kao što je prikazano tablicom 39, nalazi se u nastavku:

Tablica 39. Matrični prikaz reducirane matrice za izračun rute vozila 1, metoda grananja i ograničavanja

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	34	13	0	18	55	75	30
x_1	36	∞	1	17	0	20	26	1
x_2	34	20	∞	16	0	29	23	47
x_3	9	24	4	∞	0	63	73	18
x_4	39	19	0	12	∞	26	68	12
x_5	54	0	21	43	26	∞	3	27
x_6	73	22	0	62	45	11	∞	46
x_7	39	8	35	18	0	35	57	∞

Iz prve reducirane matrice potrebno je oduzeti vrijednosti stupaca s minimalnim vrijednostima svakog pojedinog stupca, stoga, budući da u stupcu x_0 minimalna vrijednost iznosi 9, navedena vrijednost oduzima se od svih vrijednosti u prvome stupcu. U drugome stupcu postoji vrijednost nula te ostale vrijednosti u stupcu ostaju nepromijenjene. Ostali stupci prate navedeni postupak ovisno o tome nalazi li se nula u stupcu ili ne, kao što je prikazano tablicom 40:

Tablica 40. Matrični prikaz reducirane matrice za izračun rute vozila 1, metoda grananja i ograničavanja

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	34	13	0	18	44	72	29
x_1	27	∞	1	17	0	9	23	0
x_2	25	20	∞	16	0	18	20	46
x_3	0	24	4	∞	0	52	70	17
x_4	30	19	0	12	∞	15	65	11
x_5	45	0	21	43	26	∞	0	26
x_6	64	22	0	62	45	0	∞	45
x_7	30	8	35	18	0	24	54	∞

Nakon što svaki redak i svaki stupac sadrži barem po jednu nulu, sljedeći korak je izračun kazni za nekorištenje predložene veze među gradovima, tako da se zbrajaju minimalne vrijednosti iz stupca i retka gdje se nula nalazi te odabir najveće vrijednosti kazne koja ujedno znači i prva relacija u ruti. Tako je prva nula prema redoslijedu, nula u retku x_0 i

stupcu x_3. Kod navedene nule zbraja se minimalna vrijednost u stupcu x_0 i minimalna vrijednost u retku x_3, što u navedenoj ruti iznosi: 25 + 4 = 29, nuli se dopiše navedena vrijednost kazne. Sljedeća nula po redoslijedu je nula u stupcu x_1 i retku x_5. Minimalna vrijednost u retku x_5 iznosi 0, a kada se zbroji s minimalnom vrijednošću stupca x_1 koja iznosi 8, dobiva se vrijednost kazne 8 koja se dopisuje navedenoj nuli. Po jednakom postupku se računaju i preostale kazne za svaku nulu u reduciranoj matrici udaljenosti. Budući da postoje dvije kazne jednake vrijednosti, koristi se metoda sjeverno-zapadnog kuta za odabir kazne kojom se ukidaju u procesu daljnjeg izračuna, kao što je prikazano tablicom 41:

Tablica 41. Matrični prikaz za izračun rute vozila 1, metoda grananja i ograničavanja

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
~~x_0~~	~~∞~~	~~34~~	~~13~~	~~$0^{(25)}$~~	~~18~~	~~44~~	~~72~~	~~29~~
x_1	27	∞	1	17	$0^{(0)}$	9	23	$0^{(1)}$
x_2	25	20	∞	16	$0^{(16)}$	18	20	46
x_3	$0^{(25)}$	24	4	∞	$0^{(0)}$	52	70	17
x_4	30	19	$0^{(11)}$	12	∞	15	65	11
x_5	45	$0^{(8)}$	21	43	26	∞	$0^{(20)}$	26
x_6	64	22	$0^{(0)}$	62	45	$0^{(9)}$	∞	45
x_7	30	8	35	18	$0^{(8)}$	24	54	∞

U ovome slučaju najveća vrijednost kazne je iz retka x_3 i stupca x_0, dakle prva relacija u novo projektiranoj ruti je $0 \rightarrow 3$ te se ta dva čvora ukidaju u procesu daljnjeg izračuna rute. Osim toga, potrebno je isključiti vrijednost u retku x_0 i stupcu x_3 kako ne bi nastala pod-ruta (*subtour*) $0 \rightarrow 3 \rightarrow 0$. Budući da svi redci i svi stupci ne sadrže barem jednu nulu, potrebno je ponovno oduzimati retke s minimalnim vrijednostima redaka i stupce s minimalnim elementima stupaca kao u prošlome koraku, što je prikazano tablicom 42:

Tablica 42. Matrični prikaz za izračun rute vozila 1, metoda grananja i ograničavanja

	x_0	x_1	x_2	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	2	∞	1	$0^{(0)}$	9	23	$0^{(1)}$
x_2	$0^{(2)}$	20	∞	$0^{(0)}$	18	20	46
x_3	∞	24	4	$0^{(4)}$	52	70	17
x_4	5	19	$0^{(5)}$	∞	15	65	11
x_5	20	$0^{(8)}$	21	26	∞	$0^{(20)}$	26
x_6	39	22	$0^{(0)}$	45	$0^{(9)}$	∞	45
x_7	5	8	35	$0^{(5)}$	24	54	∞

Dobivena je relacija 5 → 6. Potrebno je isključiti vrijednost u retku x_6 i stupcu x_5 kako ne bi nastala pod-ruta (*subtour*) 5 → 6 → 5. Budući da svi redci i svi stupci ne sadrže barem jednu nulu, potrebno je ponovno oduzimati retke s minimalnim vrijednostima redaka i stupce s minimalnim elementima stupaca kao u prošlome koraku. Slijedi izračun kazni za nekorištenje predložene veze među lokacijama i odabir nove relacije, kao što je prikazano tablicom 43:

Tablica 43. Matrični prikaz za izračun rute vozila 1, metoda grananja i ograničavanja

	x_0	x_1	x_2	x_4	x_5	x_7
x_1	2	∞	1	$0^{(0)}$	$0^{(9)}$	$0^{(11)}$
x_2	$0^{(2)}$	12	∞	$0^{(0)}$	9	46
x_3	∞	16	4	$0^{(4)}$	43	17
x_4	5	11	$0^{(5)}$	∞	66	11
x_6	39	14	$0^{(14)}$	45	∞	45
x_7	5	$0^{(11)}$	35	$0^{(0)}$	15	∞

Dobivena je relacija 6 → 2. Budući da svi redci i svi stupci ne sadrže barem jednu nulu, potrebno je ponovno oduzimati retke s minimalnim vrijednostima redaka i stupce s minimalnim elementima stupaca kao u prošlome koraku. Slijedi izračun kazni za nekorištenje predložene veze među lokacijama i odabir nove relacije, kao što je prikazano tablicom 44:

Tablica 44. Matrični prikaz za izračun rute vozila 1, metoda grananja i ograničavanja

	x_0	x_1	x_4	x_5	x_7
x_1	2	∞	$0^{(0)}$	$0^{(9)}$	$0^{(6)}$
x_2	$0^{(0)}$	12	$0^{(0)}$	9	46
~~x_3~~	~~∞~~	~~16~~	~~$0^{(16)}$~~	~~43~~	~~17~~
x_4	$0^{(6)}$	6	∞	61	6
x_7	5	$0^{(6)}$	$0^{(0)}$	15	∞

Dobivena je relacija 3 → 4. Svaki redak i svaki stupac sadrži barem jednu nulu, stoga se može pokrenuti izračun kazni za nekorištenje predložene veze među lokacijama i odabir nove relacije, kao što je prikazano tablicom 45:

Tablica 45. Matrični prikaz reducirane matrice za izračun rute vozila 1, metoda grananja i ograničavanja

	x_0	x_1	x_5	x_7
x_1	2	∞	$0^{(9)}$	$0^{(6)}$
x_2	$0^{(9)}$	12	9	46
x_4	$0^{(6)}$	6	61	6
~~x_7~~	~~5~~	~~$0^{(11)}$~~	~~15~~	~~∞~~

Dobivena je relacija 7 → 1. U nastavku je prikazana matrica u kojoj su ponovno oduzimani redci i stupci od minimalnih elemenata te izračun kazni za nekorištenje predložene veze među gradovima i odabir relacije, kao što je prikazano tablicom 46:

Tablica 46. Matrični prikaz za izračun rute vozila 1, metoda grananja i ograničavanja

	x_0	x_5	x_7
x_1	2	$0^{(11)}$	∞
x_2	$0^{(9)}$	9	40
~~x_4~~	~~$0^{(0)}$~~	~~61~~	~~$0^{(40)}$~~

Odabire se kazna iz retka x_4 i stupca x_7 i dobiva se relacija 4 → 7. Budući da nakon isključivanja vrijednosti iz retka x_4 i stupca x_7 matrica sadrži po barem jednu nulu u svakome retku i svakome stupcu, nije potrebno ponovno oduzimati retke i stupce s minimalnim elementima stupaca te se računa vrijednost kazni kako bi se dobila nova relacija, kao što je prikazano tablicom 47:

Tablica 47. Matrični prikaz reducirane matrice za izračun rute vozila 1, metoda grananja i ograničavanja

	x_0	x_5
x_1	2	$0^{(11)}$
x_2	$0^{(11)}$	9

Vrijednost kazni za obje nule iznosi 11, jer je maksimalni element jednak za obje nule. Za odabir relacije uzimaju se obje kazne, stoga posljednje dvije relacije glase: $2 \rightarrow 0$ i $1 \rightarrow 5$.

Relacije između vrhova dobivene prema redoslijedu rješavanja metode grananja i ograničavanja:

$0 \rightarrow 3$

$5 \rightarrow 6$

$6 \rightarrow 2 \Rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 2$

$5 \rightarrow 6$

$3 \rightarrow 4 \Rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 4$

$7 \rightarrow 1$

$4 \rightarrow 7 \Rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 1$

$2 \rightarrow 0 \Rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 0$

$1 \rightarrow 5 \Rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 0$

Rješenje, odnosno cjelokupna ruta glasi: $0 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 0 = 240$ km.

5.1.4. Projektiranje rute vozila 1 korištenjem metode najbližeg susjeda

Budući da heuristika najbližeg susjeda nalaže odabir minimalnih udaljenosti, za početak se odabire minimalna vrijednost u prvome retku x_0 koja iznosi 26, a predstavlja poveznicu između x_0 i x_3. Potom se u retku x_3 traži minimalna udaljenost, ne uključujući vrhove x_0 radi pod-rute te x_3 jer je taj vrh već odabran. Minimalna vrijednost u retku x_3 iznosi 17 i povezuje čvor x_3 s čvorom x_4. Ruta se nastavlja od čvora x_4 prema čvoru x_2 budući da minimalna udaljenost iz čvora x_4 iznosi 5. Odabirom minimalne vrijednosti koja iznosi 5,

formirala bi se pod-ruta s čvorom x_4, kao i odabirom sljedeće minimalne vrijednosti 21 koja bi ponovno povezala čvor x_3, stoga se odabire iznos 25 koji povezuje čvor x_2 s čvorom x_1. Minimalna neiskorištena vrijednost iz x_1 povezuje čvor x_1 s čvorom x_5 te iznosi 25. Udaljenost koja je sljedeća minimalna neiskorištena vrijednost povezuje čvor x_5 s čvorom x_6. Jedina dva neposijećena čvora su čvor x_7 i čvor x_o. Obzirom da čvor x_0 treba biti posljednji u ruti, uvrštava se čvor x_7 kao sljedeći, a udaljenost između čvora x_6 i x_7 iznosi 74. Kako bi se kompletirala ruta, čvor x_7 se povezuje s čvorom x_0 te je njihova međusobna udaljenost 56. Udaljenost između pretposljednjeg i posljednjeg čvora ne mora biti minimalna jer se povezivanje vrši prema redoslijedu, polazni čvor je uvijek i posljednji, završni čvor, stoga i posljednja vrijednost, tj. udaljenost ne mora nužno biti minimalna kao što metoda najbližeg susjeda to nalaže, što je prikazano tablicom 48:

Tablica 48. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1, metoda najbližeg susjeda

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	60	39	26	44	79	101	56
x_1	60	∞	25	41	24	25	50	25
x_2	39	25	∞	21	5	46	28	52
x_3	26	41	21	∞	17	68	90	35
x_4	44	24	5	17	∞	51	73	17
x_5	79	25	46	68	51	∞	28	52
x_6	101	50	28	90	73	28	∞	74
x_7	56	25	52	35	17	52	74	∞

$0 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 0 = 256$ km

5.2. Ruta vozila 2

Ruta vozila 2 obilazi osam različitih lokacija, a udaljenosti između njih su, kao i za prošlu rutu dobivene pomoću „Google Maps“ GIS sustava.

U tablici 49 su navedene lokacije koje opslužuje vozilo 2, a prikazuju redoslijed i udaljenosti koje vozilo 2 slijedi. Matrica udaljenosti, koja je prikazana tablicom 50, izrađena je prema podacima iz „Google Maps“ sustava, a u njoj se nalaze udaljenosti između svih čvorova na ruti koju obilazi vozilo 2 te će se prema njoj projektirati rute korištenjem matematičkih modela.

Tablica 49. Redoslijed i udaljenosti rute vozila 2

Čvor	Lokacija	Adresa	Udaljenost od prethodne lokacije (km)	Udaljenost od polazišta (km)
x_0	Zagreb	Radnička 216	0	0
x_1	Rakovica	Grabovac 101	129	129
x_2	Vojnić	D216 12	58	84
x_3	Velika Gorica	10410, Velika Gorica	83	18
x_4	Topusko	Gređani 4	78	90
x_5	Slunj	Plitvička 56	53	110
x_6	Rakovac	Rakovac 60a	55	59
x_7	Gvozd	Vrginmost, 44410	39	79
		Ukupna duljina rute	574 km	

Tablica 50. Matrica udaljenosti za rutu vozila 2

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	0	129	84	18	90	110	59	79
x_1	129	0	58	125	68	20	70	73
x_2	84	58	0	79	26	38	24	15
x_3	18	125	79	0	75	106	75	64
x_4	90	68	26	75	0	53	50	11
x_5	110	20	38	106	53	0	50	53
x_6	59	70	24	75	50	50	0	39
x_7	79	73	15	64	11	53	39	0

5.2.1. Projektiranje rute vozila 2 Clark Wright-ovim algoritmom „ušteda“

Iz matrice udaljenosti računaju se uštede za svaki par čvorova međusobno. Uštede se izračunavaju prema formuli (11), a rješenje svakog pojedinačnog izračuna prikazuje vrijednost uštede između dva odabrana vrha. U nastavku je prikazan postupak izračuna te lista ušteda kao što je prikazano tablicom 51:

Uštede se računaju prema formuli (11):

$$S(i, j) = d(0,i) + d(0, j) - d(i, j)$$

$S_{12} = d(0,1) + d(0,2) - d(1,2) = 129 + 84 - 58 = 155$

$S_{13} = 129 + 18 - 125 = 22$

$S_{14} = 129 + 90 - 68 = 151$

$S_{15} = 129 + 110 - 20 = 219$

$S_{16} = 129 + 59 - 70 = 118$

$S_{17} = 129 + 79 - 73 = 135$

$S_{23} = 84 + 18 - 79 = 23$

$S_{24} = 84 + 90 - 26 = 148$

$S_{25} = 84 + 110 - 38 = 27$

$S_{26} = 84 + 59 - 24 = 119$

$S_{27} = 84 + 79 - 52 = 111$

$S_{34} = 18 + 90 - 75 = 33$

$S_{35} = 18 + 110 - 106 = 22$

$S_{36} = 18 + 59 - 75 = 2$

$S_{37} = 18 + 79 - 64 = 33$

$S_{45} = 90 + 110 - 53 = 147$

$S_{46} = 90 + 59 - 50 = 99$

$S_{47} = 90 + 79 - 3 = 166$

$S_{56} = 110 + 59 - 50 = 119$

$S_{57} = 110 + 79 – 53 = 136$

$S_{67} = 59 + 79 – 39 = 99$

Tablica 51. Lista ušteda za rutu vozila 2 prema veličini

Grana (*i, j*)	Ušteda s(*i, j*)	Grana (*i, j*)	Ušteda s(*i, j*)	Grana (*i, j*)	Ušteda s(*i, j*)
(1,5)	219	**(1,7)**	135	**(3,4)**	33
(4,7)	166	**(2,6)**	119	**(3,7)**	33
(1,2)	155	**(5,6)**	119	**(2,5)**	27
(1,4)	151	**(1,6)**	118	**(2,3)**	23
(2,4)	148	**(2,7)**	111	**(1,3)**	22
(4,5)	147	**(4,6)**	99	**(3,5)**	22
(5,7)	136	**(6,7)**	99	**(3,6)**	2

(1,5) => 0 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 0,

(4,7) => 0 ↔ 4 ↔ 7 ↔ 0,

(1,2) => 0 ↔ 2 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 0,

(1,4) => oba čvora se već nalaze u ruti,

(2,4) => 0 ↔ 7 ↔ 4 ↔ 2 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 0

(4,5), (5,7), (1,7) => oba čvora se već nalaze u ruti,

(2,6) => čvor 2 je unutarnji čvor te ga nije moguće povezati s drugim čvorovima,

(5,6) => 0 ↔ 7 ↔ 4 ↔ 2 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 6 ↔ 0

(1,6), (2,7), (4,6), (6,7) => oba čvora se već nalaze u ruti,

(3,4) => čvor 4 je unutarnji čvor te ga nije moguće povezati s drugim čvorovima,

(3,7) => 0 ↔ 3 ↔ 7 ↔ 4 ↔ 2 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 6 ↔ 0.

Ruta je kompletirana, stoga se preostale veze zanemaruju. Rješenje dobiveno Clark-Wright-ovim algoritmom glasi: 0 ↔ 3 ↔ 7 ↔ 4 ↔ 2 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 6 ↔ 0, a ukupna duljina rute iznosi 306 km.

5.2.2. Projektiranje rute vozila 2 Clark-Wright-ovim algoritmom „ušteda“, metoda s indikatorom *T*

Prikazana je polu-matrica unutar koje se nalaze uštede prema čvorovima, a polu-matrica je vrijednosno identična podacima iz matrice ušteda kod Clark-Wright-ovog algoritma ušteda, dakle također se računa prema formuli (11), kao što je prikazano tablicom 52:

Tablica 52. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila 2, Clark-Wrightova metoda s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
	x_1	155	22	151	219	118	135
		x_2	23	148	27	119	111
			x_3	33	22	2	33
				x_4	147	99	166
					x_5	119	136
						x_6	99
							x_7

Polu-matrica s rješenjem Clark-Wright-ove metode s indikatorom *T* za rutu vozila 2, kao što je prikazano tablicom 53:

Tablica 53. Matrični prikaz izračuna za rutu vozila 2, Clark-Wrightova metoda s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
	x_1	1 155	22	151	1 219	118	135
		x_2	23	1 148	27	119	111
			x_3	33	22	2	1 33
				x_4	147	99	1 166
					x_5	1 119	136
						x_6	99
							x_7

Rješenje algoritma dobiveno Clark-Wright-ovim algoritmom, metoda s indikatorom *T*, glasi: 0 ↔ 3 ↔ 7 ↔ 4 ↔ 2 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 6 ↔ 0 te ukupna duljina iznosi 306 km.

5.2.3. Projektiranje rute vozila 2 pomoću metode grananja i ograničavanja

Projektiranje rute vozila 2 računa se pomoću metode grananja i ograničavanja na jednak način kao što je objašnjeno u poglavlju 4.3., dakle pomoću izračuna kazni za nepoštivanje predložene veze među lokacijama i odabira pojedinih relacija, kao što je prikazano tablicom 54:

Tablica 54. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila 2, metoda grananja i ograničavanja

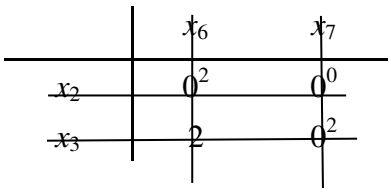
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	129	84	18	90	110	59	79
x_1	129	∞	58	125	68	20	70	73
x_2	84	58	∞	79	26	38	24	15
x_3	18	125	79	∞	75	106	75	64
x_4	90	68	26	75	∞	53	50	11
x_5	110	20	38	106	53	∞	50	53
x_6	59	70	24	75	50	50	∞	39
x_7	79	73	15	64	11	53	39	∞

Slijedi prikaz reducirane matrice, što je prikazano tablicom 55, te izračun prikazan tablicom 56:

Tablica 55. Matrični prikaz reducirane matrice za rutu vozila 2, metoda grananja i ograničavanja

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	111	66	0	72	92	32	61
x_1	109	∞	38	105	48	0	41	53
x_2	69	43	∞	64	11	23	0	0
x_3	0	107	61	∞	57	88	48	46
x_4	79	57	15	64	∞	42	30	0
x_5	90	0	18	86	33	∞	21	33
x_6	35	46	0	51	26	26	∞	15
x_7	68	62	4	53	0	42	19	∞

Tablica 56. Matrični prikaz izračuna za rutu vozila 2, metoda grananja i ograničavanja



$0 \rightarrow 3$

$1 \rightarrow 5$

$6 \rightarrow 0$

$7 \rightarrow 4$

$5 \rightarrow 2 \Rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 2$

$4 \rightarrow 1 \Rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 2$

$2 \rightarrow 6 \Rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 0$

$3 \rightarrow 7 \Rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 0$

Rješenje dobiveno metodom grananja i ograničavanja glasi:

$0 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 0$ te je ukupna udaljenost rute 302 km.

5.2.4. Projektiranje rute vozila 2 korištenjem metode najbližeg susjeda

Odabirom minimalnih udaljenosti u matrici rješava se metoda najbližeg susjeda postupkom objašnjenim u poglavlju 4.4 te izračun kao što je prikazano tablicom 57:

Tablica 57. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila 2, metoda najbližeg susjeda

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	129	84	18	90	110	59	79
x_1	129	∞	58	125	68	20	70	73
x_2	84	58	∞	79	26	38	24	15
x_3	18	125	79	∞	75	106	75	64
x_4	90	68	26	75	∞	53	50	11
x_5	110	20	38	106	53	∞	50	53
x_6	59	70	24	75	50	50	∞	39
x_7	79	73	15	64	11	53	39	∞

$0 \rightarrow 3$

$3 \rightarrow 7 \Rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 7$

$7 \rightarrow 4 \Rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 4$

$4 \rightarrow 2 \Rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 2$

$2 \rightarrow 6 \Rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 6$

$6 \rightarrow 5 \Rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 5$

$5 \rightarrow 1 \Rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 1$

$1 \rightarrow 0 \Rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 0$

Ukupna udaljenost rute iznosi 342 km.

5.3. Ruta vozila 3

Ruta vozila 3 obilazi devet različitih lokacija. Udaljenosti su dobivene pomoću „Google Maps“ GIS sustava.

U tablici 58 navedene su lokacije koje opslužuje vozilo 3, a prikazuju redoslijed i udaljenosti koje vozilo 3 slijedi. Matrica udaljenosti, koja je prikazana tablicom 59, izrađena je prema podacima iz „Google Maps“ sustava, a u njoj se nalaze udaljenosti između svih čvorova na ruti koju obilazi vozilo 3 te će se prema njoj projektirati rute korištenjem matematičkih modela.

Tablica 58. Redoslijed i udaljenosti rute vozila 3

Čvor	Lokacija	Adresa	Udaljenost od prethodne lokacije (km)	Udaljenost od polazišta (km)
x_0	Zagreb	Radnička 216	0	0
x_1	Novi Marof	Varaždinska 120	65	65
x_2	Ivanec	Varaždinska 92	22	41
x_3	Čakovec	Zrinsko-Frankopanska	34	12
x_4	Novi Marof	Istok, Autocesta Zagreb-Varazdin	35	11
x_5	Varaždin	Međimurska 26	26	12
x_6	Gornje Vratno	42208, Gornje Vratno	19	56
x_7	Varaždin	Krležina 8	16	59
x_8	Varaždinske toplice	Ludbreška 1	16	8
		Ukupna duljina rute	241 km	

Tablica 59. Matrica udaljenosti za rutu vozila 3

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_0	0	65	78	102	70	86	95	82	71
x_1	64	0	22	28	14	20	33	15	13
x_2	78	22	0	34	35	25	20	21	31
x_3	102	28	34	0	2	43	13	28	16
x_4	70	14	35	2	0	26	41	22	12
x_5	86	20	25	43	26	0	19	6	20
x_6	95	33	20	13	41	19	0	17	35
x_7	82	15	21	28	22	6	17	0	16
x_8	71	13	31	16	12	20	35	16	0

5.3.1. Projektiranje rute vozila 3 Clark-Wright-ovim algoritmom „ušteda“

Iz matrice udaljenosti računaju se uštede za svaki par čvorova međusobno. Uštede se izračunavaju prema formuli (11), a rješenje svakog pojedinačnog izračuna prikazuje vrijednost uštede između dva odabrana vrha. U nastavku je prikazan postupak izračuna te lista ušteda, kao što je prikazano tablicom 60:

Uštede se računaju prema formuli (11):

$$S(i, j) = d(0,i) + d(0, j) - d(i, j)$$

$S_{12} = d(0,1) + d(0,2) - d(1,2) = 65 + 78 - 22 = 121$

$S_{13} = 65 + 102 - 28 = 139$

$S_{14} = 65 + 70 - 14 = 121$

$S_{15} = 65 + 86 - 20 = 131$

$S_{16} = 65 + 95 - 33 = 127$

$S_{17} = 65 + 82 - 15 = 132$

$S_{18} = 65 + 71 - 13 = 123$

$S_{23} = 78 + 102 - 34 = 146$

$S_{24} = 78 + 70 - 35 = 113$

$S_{25} = 78 + 86 - 25 = 139$

$S_{26} = 78 + 95 - 20 = 153$

$S_{27} = 78 + 82 - 21 = 139$

$S_{28} = 78 + 71 - 31 = 118$

$S_{34} = 102 + 70 - 2 = 170$

$S_{35} = 102 + 86 - 43 = 145$

$S_{36} = 102 + 95 - 13 = 184$

$S_{37} = 102 + 82 - 28 = 156$

$S_{38} = 102 + 71 - 16 = 157$

$S_{45} = 70 + 86 - 26 = 130$

$S_{46} = 70 + 95 - 41 = 124$

$S_{47} = 70 + 82 - 22 = 130$

$S_{48} = 70 + 71 - 12 = 129$

$S_{56} = 86 + 95 - 19 = 162$

$S_{57} = 86 + 82 - 6 = 162$

$S_{58} = 86 + 71 - 20 = 137$

$S_{67} = 95 + 82 - 17 = 160$

$S_{68} = 95 + 71 - 35 = 131$

$S_{78} = 82 + 71 - 16 = 137$

Tablica 60. Lista ušteda za rutu vozila 3 prema veličini

Grana (*i*, *j*)	Ušteda s(*i*, *j*)	Grana (*i*, *j*)	Ušteda s(*i*, *j*)	Grana (*i*, *j*)	Ušteda s(*i*, *j*)
(3,6)	184	**(1,3)**	139	**(4,8)**	129
(3,4)	170	**(2,5)**	139	**(1,6)**	127
(5,6)	162	**(2,7)**	139	**(4,6)**	124
(5,7)	162	**(5,8)**	137	**(1,8)**	123
(6,7)	160	**(7,8)**	137	**(1,2)**	121
(3,8)	157	**(1,7)**	132	**(1,4)**	121
(3,7)	156	**(1,5)**	131	**(2,8)**	118
(2,6)	153	**(6,8)**	131	**(2,4)**	113
(2,3)	146	**(4,5)**	130		
(3,5)	145	**(4,7)**	130		

(3,6) => 0 ↔ 3 ↔ 6 ↔ 0,

(3,4) => 0 ↔ 4 ↔ 3 ↔ 6 ↔ 0,

(5,6) => 0 ↔ 4 ↔ 3 ↔ 6 ↔ 5 ↔ 0,

(5,7) => 0 ↔ 4 ↔ 3 ↔ 6 ↔ 5 ↔ 7 ↔ 0,

(6,7) => oba čvora se već nalaze u ruti,

(3,8) => čvor 3 je unutarnji čvor te ga nije moguće povezati s ostalim čvorovima,

(3,7) => oba čvora se već nalaze u ruti,

(2,6), (2,3) => čvorovi 6 i 3 su unutarnji čvorovi te ih nije moguće povezati s ostalim čvorovima,

(1,3) => čvor 3 je unutarnji čvor te ga nije moguće povezati s ostalim čvorovima,

(2,5) => čvor 5 je unutarnji čvor te ga nije moguće povezati s ostalim čvorovima,

(2,7) => 0 ↔ 4 ↔ 3 ↔ 6 ↔ 5 ↔ 7 ↔ 2 ↔ 0,

(5,8), (7,8), (1,7), (1,5), (6,8) => čvorovi 5, 6 i 7 su unutarnji čvorovi te ih nije moguće povezati s ostalim čvorovima,

(4,5), (4,7) => oba čvora se već nalaze u ruti,

(4,8) => 0 ↔ 8 ↔ 4 ↔ 3 ↔ 6 ↔ 5 ↔ 7 ↔ 2 ↔ 0

(1,6) => čvor 6 je unutarnji čvor te ga nije moguće povezati s ostalim čvorovima,

(4,6) => oba čvora se već nalaze u ruti,

(1,8) => 0 ↔ 1 ↔ 8 ↔ 4 ↔ 3 ↔ 6 ↔ 5 ↔ 7 ↔ 2 ↔ 0,

Ruta je upotpunjena te se ostale veze između čvorova zanemaruju, a ruta glasi:

0 ↔ 1 ↔ 8 ↔ 4 ↔ 3 ↔ 6 ↔ 5 ↔ 7 ↔ 2 ↔ 0, dok njena udaljenost iznosi 229 km.

5.3.2. Projektiranje rute vozila 3 Clark-Wright-ovim algoritmom „ušteda“, metoda s indikatorom *T*

Prikazana je polu-matrica, tablicom 61, unutar koje se nalaze uštede prema čvorovima, a polu-matrica je vrijednosno identična podacima iz matrice ušteda kod Clark-Wright-ovog algoritma ušteda, dakle također se računa prema formuli (11).

Tablica 61. Matrica udaljenosti za rutu vozila 3, Clark-Wrightova metoda s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_0	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
	x_1	121	139	121	131	127	132	123
		x_2	146	113	139	153	139	118
			x_3	170	145	184	156	157
				x_4	130	124	130	129
					x_5	162	162	137
						x_6	160	131
							x_7	137
								x_8

Polu – matrica, prikazana tablicom 62, s rješenjem Clark-Wright-ove metode s indikatorom *T* za rutu vozila 3:

Tablica 62. Matrični prikaz izračuna za rutu vozila 3, Clark-Wrightova metoda s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_0	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
	x_1	121	139	121	131	127	132	123
		x_2	146	113	139	153	1 139	118
			x_3	1 170	145	1 184	156	157
				x_4	130	124	130	1 129
					x_5	1 162	1 162	137
						x_6	160	131
							x_7	137
								x_8

Rješenje algoritma dobiveno Clark-Wright-ovim algoritmom, metoda s indikatorom *T*, glasi: 0 ↔ 1 ↔ 8 ↔ 4 ↔ 3 ↔ 6 ↔ 5 ↔ 7 ↔ 2 ↔ 0, dok njena udaljenost iznosi 229 km.

5.3.3. Projektiranje rute vozila 3 pomoću metode grananja i ograničavanja

Projektiranje rute vozila 3 računa se pomoću metode grananja i ograničavanja na jednak način kao što je objašnjeno u poglavlju 4.3., dakle pomoću izračuna kazni za nepoštivanje predložene veze među lokacijama i odabira pojedinih relacija, kao što je prikazano tablicom 63 te izračunom prikazanim tablicom 64:

Tablica 63. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila 3, metoda grananja i ograničavanja

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_0	∞	65	78	102	70	86	95	82	71
x_1	64	∞	22	28	14	20	33	15	13
x_2	78	22	∞	34	35	25	20	21	31
x_3	102	28	34	∞	2	43	13	28	16
x_4	70	14	35	2	∞	26	41	22	12
x_5	86	20	25	43	26	∞	19	6	20
x_6	95	33	20	13	41	19	∞	17	35
x_7	82	15	21	28	22	6	17	∞	16
x_8	71	13	31	16	12	20	35	16	∞

Tablica 64. Matrični prikaz izračuna rute vozila 3, metoda grananja i ograničavanja

	x_1	x_2
x_0	∞	0^0
x_7	0^0	0^0

Ukupna udaljenost rute iznosi 230 km.

5.3.4. Projektiranje rute vozila 3 korištenjem metode najbližeg susjeda

Odabirom minimalnih udaljenosti u matrici rješava se metoda najbližeg susjeda postupkom objašnjenim u poglavlju 4.4, kao što je prikazano tablicom 65:

Tablica 65. Matrični prikaz izračuna rute vozila 3, metoda najbližeg susjeda

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_0	∞	65	78	102	70	86	95	82	71
x_1	64	∞	22	28	14	20	33	15	13
x_2	78	22	∞	34	35	25	20	21	31
x_3	102	28	34	∞	2	43	13	28	16
x_4	70	14	35	2	∞	26	41	22	12
x_5	86	20	25	43	26	∞	19	6	20
x_6	95	33	20	13	41	19	∞	17	35
x_7	82	15	21	28	22	6	17	∞	16
x_8	71	13	31	16	12	20	35	16	∞

$0 \rightarrow 1$

$1 \rightarrow 8 \Rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 8$

$8 \rightarrow 4 \Rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 8 \rightarrow 4$

$4 \rightarrow 3 \Rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 3$

$3 \rightarrow 6 \Rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 6$

$6 \rightarrow 7 \Rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 7$

$7 \rightarrow 5 \Rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 5$

$5 \rightarrow 2 \Rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 5 \rightarrow 2$

$2 \rightarrow 0 \Rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 0$

Ukupna udaljenost iznosi 231 km.

5.4. Ruta vozila 4

Ruta vozila 4 obilazi osam različitih lokacija, a udaljenosti između njih su, kao i za prošlu rutu dobivene pomoću „Google Maps“ GIS sustava.

U tablici 66 su navedene lokacije koje opslužuje vozilo 4, a prikazuju redoslijed i udaljenosti koje vozilo 4 slijedi. Matrica udaljenosti, prikazana tablicom 67, izrađena je prema

podacima iz „Google Maps“ sustava, a u njoj se nalaze udaljenosti između svih čvorova na ruti koju obilazi vozilo 4 te će se prema njoj projektirati rute korištenjem matematičkih modela.

Tablica 66. Redoslijed i udaljenosti rute vozila 4

Čvor	**Lokacija**	**Adresa**	**Udaljenost od prethodne lokacije (km)**	**Udaljenost od polazišta (km)**
x_0	Zagreb	Radnička 216	0	0
x_1	Švaljkovec	Švaljkovec 7b	57	57
x_2	Pregrada	Janka Leskovara 36/2	19	76
x_3	Zlatar	Zagrebačka 49	41	65
x_4	Zagreb	Fallerovo šetalište 18	56	11
x_5	Zagreb	Nova cesta 102	4	8
x_6	Zagreb	Zagrebačka avenija 102	52	14
x_7	Zagreb	Aleja Bologne 68	7	17
		Ukupna duljina rute	253 km	

Tablica 67. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila 4

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	0	57	76	65	11	8	14	17
x_1	57	0	18	22	46	47	45	40
x_2	76	18	0	42	57	57	52	49
x_3	65	22	42	0	54	53	52	48
x_4	11	46	57	54	0	3	3	7
x_5	8	47	57	53	3	0	4	9
x_6	14	45	52	52	3	4	0	5
x_7	17	40	49	48	7	9	5	0

5.4.1. Projektiranje rute vozila 4 Clark-Wright-ovim algoritmom „ušteda“

Iz matrice udaljenosti računaju se uštede za svaki par čvorova međusobno. Uštede se izračunavaju prema formuli (11), a rješenje svakog pojedinačnog izračuna prikazuje vrijednost uštede između dva odabrana vrha. U nastavku je prikazan postupak izračuna te lista ušteda, kao što je prikazano tablicom 68:

Uštede se računaju prema formuli (11):

$$S(i, j) = d(0,i) + d(0, j) - d(i, j)$$

$S_{12} = d(0,1) + d(0,2) - d(1,2) = 57 + 76 - 18 = 115$

$S_{13} = 57 + 65 - 22 = 100$

$S_{14} = 57 + 11 - 46 = 22$

$S_{15} = 57 + 8 - 47 = 18$

$S_{16} = 57 + 14 - 45 = 26$

$S_{17} = 57 + 17 - 40 = 34$

$S_{23} = 76 + 65 - 42 = 99$

$S_{24} = 76 + 11 - 57 = 30$

$S_{25} = 76 + 8 - 57 = 27$

$S_{26} = 76 + 14 - 52 = 38$

$S_{27} = 76 + 17 - 49 = 44$

$S_{34} = 65 + 11 - 54 = 22$

$S_{35} = 65 + 8 - 53 = 20$

$S_{36} = 65 + 14 - 52 = 27$

$S_{37} = 65 + 17 - 48 = 34$

$S_{45} = 11 + 8 - 3 = 16$

$S_{46} = 11 + 14 - 3 = 22$

$S_{47} = 11 + 17 - 7 = 21$

$S_{56} = 8 + 14 - 4 = 18$

$S_{57} = 8 + 17 - 9 = 16$

$S_{67} = 14 + 17 - 5 = 26$

Tablica 68. Lista ušteda za rutu vozila 4 prema veličini

Grana (*i, j*)	Ušteda s(*i, j*)	Grana (*i, j*)	Ušteda s(*i, j*)	Grana (*i, j*)	Ušteda s(*i, j*)
(1,2)	115	**(2,4)**	30	**(4,6)**	22
(1,3)	100	**(2,5)**	27	**(4,7)**	21
(2,3)	99	**(3,6)**	27	**(3,5)**	20
(2,7)	44	**(1,6)**	26	**(1,5)**	18
(2,6)	38	**(6,7)**	26	**(5,6)**	18
(1,7)	34	**(1,4)**	22	**(4,5)**	16
(3,7)	34	**(3,4)**	22	**(5,7)**	16

(1,2) => 0 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 0,

(1,3) => 0 ↔ 3 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 0,

(2,3) => oba čvora se već nalaze u ruti,

(2,7) => 0 ↔ 3 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 7 ↔ 0,

(2,6) => čvor 2 je unutarnji čvor te ga nije moguće povezati s ostalim čvorovima,

(1,7), (3,7) => oba čvora se već nalaze u ruti,

(2,4), (2,5) => čvor 2 je unutarnji čvor te ga nije moguće povezati s ostalim čvorovima,

(3,6) => 0 ↔ 6 ↔ 3 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 7 ↔ 0,

(1,6), (6,7) => oba čvora se već nalaze u ruti,

(1,4), (3,4) => čvorovi 1 i 3 su unutarnji čvorovi te ih nije moguće povezati s ostalim čvorovima,

(4,6) => 0 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 3 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 7 ↔ 0,

(4,7) => oba čvora se već nalaze u ruti,

(3,5), (1,5), (5,6) => čvorovi 1, 3 i 6 su unutarnji čvorovi te ih nije moguće povezati s ostalim čvorovima,

(4,5) => 0 ↔ 5 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 3 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 7 ↔ 0.

Ruta je kompletirana te se ostale veze između čvorova zanemaruju, a ruta glasi:

0 ↔ 5 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 3 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 7 ↔ 0 te njena ukupna udaljenost iznosi 172 km.

5.4.2. Projektiranje rute vozila 4 Clark-Wright-ovim algoritmom „ušteda“, metoda s indikatorom *T*

Prikazana je polu-matrica unutar koje se nalaze uštede prema čvorovima, a polu-matrica je vrijednosno identična podacima iz matrice ušteda kod Clark-Wright-ovog algoritma ušteda, dakle također se računa prema formuli (11) te prikazano tablicom 69:

Tablica 69. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila 4, Clark-Wrightova metoda s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
	x_1	115	100	22	18	26	34
		x_2	99	30	27	38	44
			x_3	22	20	27	34
				x_4	16	22	21
					x_5	18	16
						x_6	26
							x_7

Polu - matrica s rješenjem Clark-Wright-ove metode s indikatorom *T* za rutu vozila 4 kao što je prikazano tablicom 70:

Tablica 70. Matrični prikaz izračuna za rutu vozila 4, Clark-Wrightova metoda s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**
	x_1	1 115	1 100	22	18	26	34
		x_2	99	30	27	38	1 44
			x_3	22	20	1 27	34
				x_4	1 16	1 22	21
					x_5	18	16
						x_6	26
							x_7

Rješenje algoritma dobiveno Clark-Wright-ovim algoritmom, metoda s indikatorom *T*, glasi: 0 ↔ 5 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 3 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 7 ↔ 0 te njena ukupna udaljenost iznosi 172 km.

5.4.3. Projektiranje rute vozila 4 pomoću metode grananja i ograničavanja

Projektiranje rute vozila 4 računa se pomoću metode grananja i ograničavanja na jednak način kao što je objašnjeno u poglavlju 4.3., dakle pomoću izračuna kazni za nepoštivanje predložene veze među lokacijama i odabira pojedinih relacija, kao što je prikazano tablicom 71 te izračun kao što je prikazano tablicom 72:

Tablica 71. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila 4, metoda grananja i ograničavanja

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	57	76	65	11	8	14	17
x_1	57	∞	18	22	46	47	45	40
x_2	76	18	∞	42	57	57	52	49
x_3	65	22	42	∞	54	53	52	48
x_4	11	46	57	54	∞	3	3	7
x_5	8	47	57	53	3	∞	4	9
x_6	14	45	52	52	3	4	∞	5
x_7	17	40	49	48	7	9	5	∞

Tablica 72. Matrični prikaz izračuna za rutu vozila 4, metoda grananja i ograničavanja

	x_4	x_7
x_5	0^0	0^0
x_6	0^0	∞

Ukupna udaljenost rute iznosi 171 km.

5.4.4. Projektiranje rute vozila 4 korištenjem metode najbližeg susjeda

Odabirom minimalnih udaljenosti u matrici rješava se metoda najbližeg susjeda postupkom objašnjenim u poglavlju 4.4, kao što je prikazano tablicom 73:

Tablica 73. Matrični prikaz izračuna za rutu vozila 4, metoda najbližeg susjeda

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	57	76	65	11	8	14	17
x_1	57	∞	18	22	46	47	45	40
x_2	76	18	∞	42	57	57	52	49
x_3	65	22	42	∞	54	53	52	48
x_4	11	46	57	54	∞	3	3	7
x_5	8	47	57	53	3	∞	4	9
x_6	14	45	52	52	3	4	∞	5
x_7	17	40	49	48	7	9	5	∞

$0 \rightarrow 5$

$5 \rightarrow 4 \Rightarrow 0 \rightarrow 5 \rightarrow 4$

$4 \rightarrow 6 \Rightarrow 0 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

$6 \rightarrow 7 \Rightarrow 0 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7$

$7 \rightarrow 1 \Rightarrow 0 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 1$

$1 \rightarrow 2 \Rightarrow 0 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 1 \rightarrow 2$

$2 \rightarrow 3 \Rightarrow 0 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$

$3 \rightarrow 0 \Rightarrow 0 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 0$

Ukupna udaljenost rute iznosi 184 km.

5.5. Ruta vozila 5

Ruta vozila 5 obilazi osam različitih lokacija, a udaljenosti između njih su, kao i za prošlu rutu dobivene pomoću „Google Maps“ GIS sustava.

U tablici 74 su navedene lokacije koje opslužuje vozilo 5, a prikazuju redoslijed i udaljenosti koje vozilo 5 slijedi. Matrica udaljenosti, prikazana tablicom 75, izrađena je prema podacima iz „Google Maps“ sustava, a u njoj se nalaze udaljenosti između svih čvorova na ruti koju obilazi vozilo 5 te će se prema njoj projektirati rute korištenjem matematičkih modela.

Tablica 74. Redoslijed i udaljenosti rute vozila 5

Čvor	Lokacija	Adresa	Udaljenost od prethodne lokacije (km)	Udaljenost od polazišta (km)
x_0	Zagreb	Radnička 216	0	0
x_1	Sisak	Petrinjska 15	62	62
x_2	Lekenik	Žažina bb	24	41
x_3	Zagreb	Zagrebačka cesta 203	48	12
x_4	Sisak	Cvetkovićeva 10	69	64
x_5	Sisak	Zagrebačka 44	7	56
x_6	Petrinja	Sisačka 2	13	59
x_7	Zagreb	Dankovečka 2	67	8
		Ukupna duljina rute	298 km	

Tablica 75. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila 5

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	0	62	41	12	64	56	59	8
x_1	62	0	24	68	2	6	7	70
x_2	41	24	0	48	24	17	21	40
x_3	12	68	48	0	69	62	66	14
x_4	64	2	24	69	0	7	10	72
x_5	56	6	17	62	7	0	13	64
x_6	59	7	21	66	10	13	0	67
x_7	8	70	40	14	72	64	67	0

5.5.1. Projektiranje rute vozila 5 Clark-Wright-ovim algoritmom „ušteda“

Iz matrice udaljenosti računaju se uštede za svaki par čvorova međusobno. Uštede se izračunavaju prema formuli (11), a rješenje svakog pojedinačnog izračuna prikazuje vrijednost uštede između dva odabrana vrha. U nastavku je prikazan postupak izračuna te lista ušteda kao što je prikazano tablicom 76:

Uštede se računaju prema formuli (11):

$$S(i, j) = d(0,i) + d(0, j) - d(i, j)$$

$S_{12} = d(0,1) + d(0,2) - d(1,2) = 62 + 41 - 24 = 79$

$S_{13} = 62 + 12 - 68 = 6$

$S_{14} = 62 + 64 - 2 = 124$

$S_{15} = 62 + 56 - 6 = 112$

$S_{16} = 62 + 59 - 7 = 115$

$S_{17} = 62 + 8 - 70 = 0$

$S_{23} = 41 + 12 - 48 = 5$

$S_{24} = 41 + 64 - 24 = 81$

$S_{25} = 41 + 56 - 17 = 80$

$S_{26} = 41 + 59 - 21 = 79$

$S_{27} = 41 + 8 - 40 = 9$

$S_{34} = 12 + 64 - 69 = 7$

$S_{35} = 12 + 56 - 62 = 6$

$S_{36} = 12 + 59 - 66 = 5$

$S_{37} = 12 + 8 - 14 = 6$

$S_{45} = 64 + 56 - 7 = 113$

$S_{46} = 64 + 59 - 10 = 113$

$S_{47} = 64 + 8 - 72 = 0$

$S_{56} = 56 + 59 - 13 = 102$

$S_{57} = 56 + 8 - 64 = 0$

$S_{67} = 59 + 8 - 67 = 0$

Tablica 76. Lista ušteda za rutu vozila 5 prema veličini

Grana (*i*, *j*)	Ušteda s(*i*, *j*)	Grana (*i*, *j*)	Ušteda s(*i*, *j*)	Grana (*i*, *j*)	Ušteda s(*i*, *j*)
(1,4)	124	**(2,5)**	80	**(3,7)**	6
(1,6)	115	**(1,2)**	79	**(2,3)**	5
(4,5)	113	**(2,6)**	79	**(3,6)**	5
(4,6)	113	**(2,7)**	9	**(1,7)**	0
(1,5)	112	**(3,4)**	7	**(4,7)**	0
(5,6)	102	**(1,3)**	6	**(5,7)**	0
(2,4)	81	**(3,5)**	6	**(6,7)**	0

(1,4) => 0 ↔ 1 ↔ 4 ↔ 0,

(1,6) => 0 ↔ 6 ↔ 1 ↔ 4 ↔ 0,

(4,5) => 0 ↔ 6 ↔ 1 ↔ 4 ↔ 5 ↔ 0,

(4,6), (1,5), (5,6) => oba čvora se već nalaze u ruti,

(2,4) => čvor 4 je unutarnji čvor te ga se ne može povezati s ostalim čvorovima,

(2,5) => 0 ↔ 6 ↔ 1 ↔ 4 ↔ 5 ↔ 2 ↔ 0,

(1,2), (2,6) => oba čvora se već nalaze u ruti,

(2,7) => 0 ↔ 6 ↔ 1 ↔ 4 ↔ 5 ↔ 2 ↔ 7 ↔ 0,

(3,4), (1,3), (3,5) => čvorovi 1, 3 i 5 su unutarnji čvorovi te ih se ne može povezati s ostalim čvorovima,

(3,7) => 0 ↔ 6 ↔ 1 ↔ 4 ↔ 5 ↔ 2 ↔ 7 ↔ 3 ↔ 0.

Ruta je kompletirana te se ostale veze između čvorova zanemaruju, a ruta glasi:

$0 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 0$, dok je ukupna duljina rute 158 km.

5.5.2. Projektiranje rute vozila 5 Clark-Wright-ovim algoritmom „ušteda“, metoda s indikatorom *T*

Prikazana je polu-matrica unutar koje se nalaze uštede prema čvorovima, a polu-matrica je vrijednosno identična podacima iz matrice ušteda kod Clark-Wright-ovog algoritma ušteda, dakle također se računa prema formuli (11), kao što je prikazano tablicom 77:

Tablica 77. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila 5, Clark-Wrightova metoda s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
	x_1	79	6	124	112	115	0
		x_2	5	81	80	79	9
			x_3	7	6	5	6
				x_4	113	113	0
					x_5	102	0
						x_6	0
							x_7

Polu - matrica s rješenjem Clark-Wright-ove metode s indikatorom *T* za rutu vozila 3, kao što je prikazano tablicom 78:

Tablica 78. Matrični prikaz izračuna za rutu vozila 5, Clark Wrightova metoda s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
	x_1	79	6	1 124	112	1 115	0
		x_2	5	81	1 80	79	1 9
			x_3	7	6	5	1 6
				x_4	1 113	113	0
					x_5	102	0
						x_6	0
							x_7

Rješenje algoritma dobiveno Clark-Wright-ovim algoritmom, metoda s indikatorom *T*, glasi: 0 ↔ 6 ↔ 1 ↔ 4 ↔ 5 ↔ 2 ↔ 7 ↔ 3 ↔ 0 te njena ukupna udaljenost iznosi 158 km.

5.5.3. Projektiranje rute vozila 5 pomoću metode grananja i ograničavanja

Projektiranje rute vozila 5 računa se pomoću metode grananja i ograničavanja na jednak način kao što je objašnjeno u poglavlju 4.3., dakle pomoću izračuna kazni za nepoštivanje predložene veze među lokacijama i odabira pojedinih relacija, kao što je prikazano tablicom 79 te izračun prikazan tablicom 80:

Tablica 79. Matrica udaljenosti za rutu vozila 5, metoda grananja i ograničavanja

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	62	41	12	64	56	59	8
x_1	62	∞	24	68	2	6	7	70
x_2	41	24	∞	48	24	17	21	40
x_3	12	68	48	∞	69	62	66	14
x_4	64	2	24	69	∞	7	10	72
x_5	56	6	17	62	7	∞	13	64
x_6	59	7	21	66	10	13	∞	67
x_7	8	70	40	14	72	64	67	∞

Tablica 80. Matrični prikaz izračuna za rutu vozila 5, metoda grananja i ograničavanja

	x_0	x_7
x_5	∞	0^0
x_7	0^0	∞

Ukupna udaljenost rute iznosi 200 km.

5.5.4. Projektiranje rute vozila 5 korištenjem metode najbližeg susjeda

Odabirom minimalnih udaljenosti u matrici rješava se metoda najbližeg susjeda postupkom objašnjenim u poglavlju 4.4, kao što je prikazano tablicom 81:

Tablica 81. Matrični prikaz izračuna za rutu vozila 5, metoda najbližeg susjeda

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	62	41	12	64	56	59	8
x_1	62	∞	24	68	2	6	7	70
x_2	41	24	∞	48	24	17	21	40
x_3	12	68	48	∞	69	62	66	14
x_4	64	2	24	69	∞	7	10	72
x_5	56	6	17	62	7	∞	13	64
x_6	59	7	21	66	10	13	∞	67
x_7	8	70	40	14	72	64	67	∞

$0 \rightarrow 7$,

$7 \rightarrow 3 \Rightarrow 0 \rightarrow 7 \rightarrow 3$,

$3 \rightarrow 2 \Rightarrow 0 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 2$,

$2 \rightarrow 5 \Rightarrow 0 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5$,

$5 \rightarrow 1 \Rightarrow 0 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1$,

$1 \rightarrow 4 \Rightarrow 0 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 4$,

$4 \rightarrow 6 \Rightarrow 0 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 6$,

$6 \rightarrow 0 \Rightarrow 0 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 0$,

Ukupna duljina rute iznosi 164 km.

6. USPOREDBA REZULTATA DOBIVENIH PRIMJENOM MATEMATIČKIH MODELA

Nakon izračuna najkraćeg puta za svaku rutu, a time ujedno i metode koja daje najkraći put, potrebno je izdvojiti najbolje rješenje svake rute posebno, kao što je prikazano tablicom 82:

Tablica 82. Rezultati dobiveni primjenom matematičkih modela

Ruta vozila	**Clark-Wrightov algoritam ušteda (km)**	**Metoda s indikatorom *T* (km)**	**Metoda grananja i ograničavanja (km)**	**Metoda najbližeg susjeda (km)**	**Najbolje rješenje (km)**
Ruta vozila 1	240	240	240	256	**240**
Ruta vozila 2	306	306	302	342	**302**
Ruta vozila 3	229	229	230	231	**229**
Ruta vozila 4	172	172	171	184	**171**
Ruta vozila 5	158	158	200	164	**158**

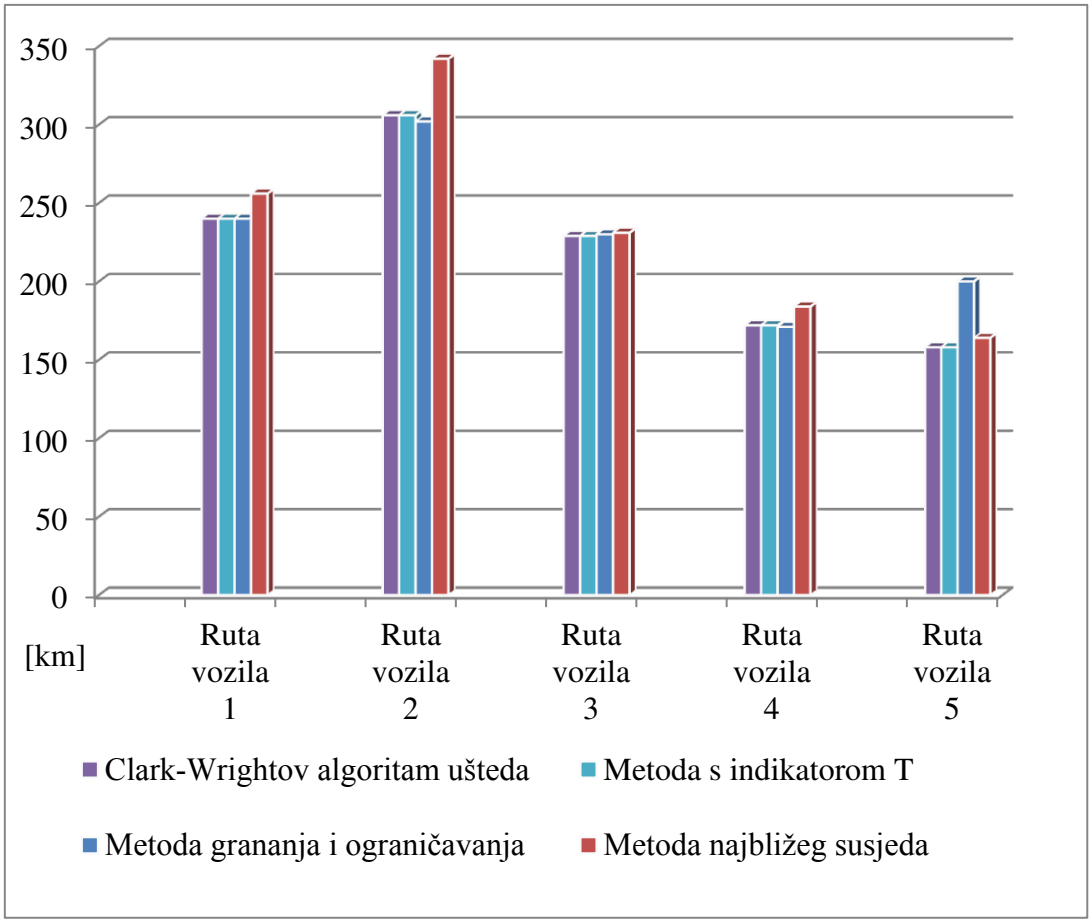
Sve navedene rute obuhvaćaju lokacije u Zagrebu i okolici, budući da se lokacija punionice nalazi u Zagrebu, međutim rute posjećuju lokacije i u Zagrebačkoj, Krapinsko-zagorskoj, Međimurskoj, Varaždinskoj, Koprivničko-križevačkoj, Bjelovarsko-bilogorskoj, Sisačko-Moslavačkoj i Karlovačkoj županiji.

U tri od pet analiziranih ruta, odnosno 60% promatranih slučajeva, Clark-Wrightov algoritam ušteda i metoda s indikatorom *T* daje najbolje rješenje. Iako je rješenje obje metoda u svim slučajevima jednako, izračun kojim se dolazi do rješenja je drugačiji, međutim, obzirom da obje metode računaju uštede formulom (11), rezultati su jednaki.

Metoda grananja i ograničavanja dala je najbolje rješenje također u tri od pet analiziranih ruta, dakle 60%, međutim za razliku od Clark-Wrightovog algoritma ušteda i metode s indikatorom *T*, u nekim slučajevima, ima puno veći otklon od najboljeg rješenja, kao što je vidljivo na primjeru rute vozila 5.

Metoda najbližeg susjeda učinkovitošću je najlošija od promatranih, niti jednom nije dala najbolje rješenje, iako je pri izračunu rute rute vozila 3 i 5 imala otklon unutar 5% od najboljega rješenja te pri izračunu rute 1 i 4 unutar 10% od najboljeg rješenja.

Odnosi između ruta pojedinih vozila i danih rješenja u kilometrima dani su grafikonom 2:



Grafikon 2. Odnos ruta vozila i dobivenih rješenja

7. ZAKLJUČAK

Optimizacija rutiranja može se obaviti i softverskim alatima, međutim i za takve alate potrebno je prije svega postaviti matematičku osnovu koja je temelj svakog optimizacijskog programa te implementacija ovakvih modela u softverske alate nije pretjerano zahtjevna. Modeliranjem u svrhu optimizacije rutiranja postižu se znatna smanjenja, kao što je dokazano ovim radom na primjeru distribucije plinskih boca, gdje je intuitivno planirana ruta u svim slučajevima bila znatno dulja od novo projektiranih ruta, iako razlozi takvog rutiranja nisu sasvim očiti, jer postoji mogućnost da su neki korisnici prioritetniji od ostalih, što može utjecati na postupak, a ne može se uvrstiti u model ukoliko o tome nema podataka.

Budući da INA d.d. distribuciju plinskih boca obavlja preko ugovornih partnera, odnosno vanjskih pružatelja usluge prijevoza, ne može se u potpunosti tvrditi koliko ušteda prijeđenih kilometara smanjuje cijenu usluge prijevoza INA-i zbog nepoznavanja detalja ugovora, međutim, smanjenjem ukupne prijeđene udaljenosti, smanjuje se i vrijeme potrebno za dostavu robe, što znači povećanu dostupnost robe za krajnjeg korisnika, a time i povećanu mogućnost prodaje. Iz perspektive pružatelja usluge prijevoza, uštede su najveće, počevši od potrošnje goriva, smanjenja troškova koji nastaju uslijed većeg korištenja vozila (amortizacija, kvarovi, maziva i sl.) kao i troškovi uzrokovani kašnjenjem na dostave ili prikupe, budući da je cilj svake tvrtke ostvariti zaradu i zadovoljiti zahtjeve korisnika. Valja napomenuti da se smanjenjem broja kilometara koja vozila prijeđu određenom rutom, smanjuje i vrijeme zadržavanja vozila koja prevoze opasan teret prometnicama, obzirom da je teret koji se prevozi klasificiran kao opasan. Prednosti optimizacije rute se tiču i smanjenja eksternih troškova vezanih za promet, kao što su utjecaj prometa na onečišćenje zraka, prirode i okoliša te buke, ukoliko se smanji broj prijeđenih kilometara.

Može se zaključiti da Clark-Wrightov algoritam ušteda i metoda s indikatorom T daju najbolje rezultate u najviše primjera. Obzirom da skraćenjem puta koji vozila moraju proći, trošak transporta pada, a budući da je direktno vezan za trošak distribucije, može se reći da smanjenjem ukupnih prijeđenih kilometara dolazi do smanjenja ukupnih troškova poslovanja.

LITERATURA

[1] Protega, V., autorizirana predavanja iz kolegija Prijevozna logistika I, Fakultet prometnih znanosti, predavanje 2016.

[2] Ivaković, Č., Stanković, R., Šafran, M.: Špedicija i logistički procesi, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 2010.

[3] Pašagić Škrinjar, J.: Prijevozna logistika II, autorizirana predavanja, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti, 2017./2018.

[4] Rogić, K., autorizirana predavanja iz kolegija Distribucijska logistika 1, predavanje 2017.

[5] Maretić D., Optimizacija distribucijske mreže primjenom matematičkih metoda, diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti, 2018.

[6] Carić T., Fosin J., Optimizacija prometnih procesa, autorizirana predavanja, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti, 2014./2015.

[7] Kiš Miroslav, Englesko-hrvatski i hrvatsko-engleski informatički rječnik, Zagreb, Naklada Ljevak, 2000., str. 36

[8] https://www.coursera.org/lecture/ml-clustering-and-retrieval/complexity-of-brute-force-search-5R6q3 [pristupljeno: rujan 2018.]

[9] G. Gutin, A. Yeo and A. Zverovich, Traveling salesman should not be greedy: domination analysis of greedy-type heuristics for the TSP, Discrete Applied Mathematics 117 (2002), str. 81-86

[10] Teodorović, D., Transportne mreže, Saobraćajni fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd 2007.

[11] Golden B.L., Magnanti T.L., Nguyen H.Q.: Implementing Vehicle Routing Algorithms, Networks 7, 1997.

[12] http://laboi.fon.bg.ac.rs/wp-content/uploads/2014/12/AlgoritamUsteda.pdf [pristupljeno: rujan 2018.]

[13] Toth, P., Vigo, D., Vehicle Routing problems, methods and applicatons, Second Edition, 2014.

[14] Mataija M., Rakamarić Šegić M., Jozić F.: Solving the travelling salesman problem using the Branch and bound method, Zbornik Veleučilišta u Rijeci, Vol. 4 (2016.), No. 1, pp. 259-270

[15] D. Applegate, R. Bixby, V. Chvátal, W. Cook, The travelling Salesman Problem, Princeton University Press, New Jersey, 2006.

[16] Lenore Cowen, T., Travelling Salesman Problem, Jisoo Park University, 2011.

POPIS KRATICA

LPG (engl. *liquefied petroleum gas*) – ukapljeni naftni plin

UNP – ukapljeni naftni plin,

ADR (*franc. Accord europeen relatif au transport international des marchandises dangereuses par route*) – europski sporazum o međunarodnom prijevozu opasnih tvari u cestovnom prometu,

SAP (*engl. Systems, Applications and Product*) – sustavi, aplikacije i proizvodi,

ERP (*engl. enterprise resource planning*) – planiranje resursa poduzeća,

LOC – logistički operativni centar,

TSP (*engl. Traveling salesman problem*) – problem trgovačkog putnika,

VRP (*engl. vehicle routing problem*) – problem usmjeravanja vozila,

NNH (*engl. Nearest neighbour heuristic*) – heuristika najbližeg susjeda

POPIS SLIKA

Slika 1. Opći proces prijevozne logistike 4

Slika 2. Prikaz najučestalijih inačica problema usmjeravanja vozila 17

Slika 3. Izračunavanje ušteda 18

Slika 4. Metoda s indikatorom T, primjer 1. 26

Slika 5. Metoda s indikatorom T, primjer 2. 27

Slika 6. Distribucijska mreža 1 28

Slika 7. Ruta 0 - 2 - 3 – 0 30

Slika 8. Ruta 0 - 4 - 3 - 2 – 0 31

Slika 9. Ruta 0 - 4 - 3 - 1 – 0 32

POPIS TABLICA

Tablica 1. Matrica primjera 1 22

Tablica 2. Lista rangiranih ušteda prema veličini 24

Tablica 3. Matrični prikaz primjera metode grananja i ograničavanja 1 34

Tablica 4. Matrični prikaz minimalnih vrijednosti primjera metoda grananja i ograničavanja34

Tablica 5. Matrični prikaz primjera metode grananja i ograničavanja 35

Tablica 6. Matrični prikaz izdvajanja minimalnih vrijednosti iz primjera metode grananja i ograničavanja 35

Tablica 7. Matrični prikaz primjera metode grananja i ograničavanja 35

Tablica 8. Matrični prikaz izračuna kazni za metodu grananja i ograničavanja 36

Tablica 9. Matrični prikaz izračuna kazni za metodu grananja i ograničavanja 37

Tablica 10. Matrični prikaz reducirane matrice za metodu grananja i ograničavanja 37

Tablica 11. Matrični prikaz primjera metode grananja i ograničavanja..... 37

Tablica 12. Matrični prikaz primjera metode grananja i ograničavanja..... 38

Tablica 13. Matrični prikaz primjera metode grananja i ograničavanja..... 38

Tablica 14. Matrični prikaz primjera metode grananja i ograničavanja..... 38

Tablica 15. Matrični prikaz primjera metode grananja i ograničavanja..... 39

Tablica 16. Matrični prikaz primjera metode grananja i ograničavanja..... 39

Tablica 17. Matrični prikaz primjera metode grananja i ograničavanja..... 39

Tablica 18. Matrični prikaz izračuna primjera metode najbližeg susjeda 41

Tablica 19. Matrični prikaz izračuna metode najbližeg susjeda 41

Tablica 20. Matrični prikaz izračuna primjera metode najbližeg susjeda 42

Tablica 21. Matrični prikaz izračuna metode najbližeg susjeda 42

Tablica 22. Matrični prikaz izračuna metode najbližeg susjeda 43

Tablica 23. Matrični prikaz izračuna metode najbližeg susjeda 43

Tablica 24. Matrični prikaz izračuna metode najbližeg susjeda 44

Tablica 25. Matrični prikaz izračuna metode najbližeg susjeda 44

Tablica 26. Matrični prikaz izračuna metode najbližeg susjeda 45

Tablica 27. Redoslijed i udaljenosti rute vozila 1 47

Tablica 28. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila 1 47

Tablica 29. Uštede za rutu vozila 1 prema redoslijedu vrhova 49

Tablica 30. Lista ušteda za rutu vozila 1 prema veličini 50

Tablica 31. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila 1, Clark-Wrightova metoda s indikatorom T 51

Tablica 32. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1, Clark-Wrightova metoda s indikatorom T 52

Tablica 33. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1, Clark-Wrightova metoda s indikatorom T 53

Tablica 34. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1, Clark-Wrightova metoda s indikatorom T 54

Tablica 35. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1, Clark-Wrightova metoda s indikatorom T 55

Tablica 36. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1, Clark-Wrightova metoda s indikatorom T 56

Tablica 37. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1, Clark-Wrightova metoda s indikatorom T 57

Tablica 38. Matrični prikaz udaljenosti na ruti vozila 1, metoda grananja i ograničavanja 58

Tablica 39. Matrični prikaz reducirane matrice za izračun rute vozila 1, metoda grananja i ograničavanja 59

Tablica 40. Matrični prikaz reducirane matrice za izračun rute vozila 1, metoda grananja i ograničavanja 59

Tablica 41. Matrični prikaz za izračun rute vozila 1, metoda grananja i ograničavanja..... 60

Tablica 42. Matrični prikaz za izračun rute vozila 1, metoda grananja i ograničavanja..... 61

Tablica 43. Matrični prikaz za izračun rute vozila 1, metoda grananja i ograničavanja..... 61

Tablica 44. Matrični prikaz za izračun rute vozila 1, metoda grananja i ograničavanja..... 62

Tablica 45. Matrični prikaz reducirane matrice za izračun rute vozila 1, metoda grananja i ograničavanja 62

Tablica 46. Matrični prikaz za izračun rute vozila 1, metoda grananja i ograničavanja..... 62

Tablica 47. Matrični prikaz reducirane matrice za izračun rute vozila 1, metoda grananja i ograničavanja 63

Tablica 48. Matrični prikaz izračuna rute vozila 1, metoda najbližeg susjeda 64

Tablica 49. Redoslijed i udaljenosti rute vozila 2 65

Tablica 50. Matrica udaljenosti za rutu vozila 2 65

Tablica 51. Lista ušteda za rutu vozila 2 prema veličini 67

Tablica 52. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila 2, Clark-Wrightova metoda s indikatorom T 68

Tablica 53. Matrični prikaz izračuna za rutu vozila 2, Clark-Wrightova metoda s indikatorom T 69

Tablica 54. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila 2, metoda grananja i ograničavanja.... 70

Tablica 55. Matrični prikaz reducirane matrice za rutu vozila 2, metoda grananja i ograničavanja 70

Tablica 56. Matrični prikaz izračuna za rutu vozila 2, metoda grananja i ograničavanja..... 70

Tablica 57. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila 2, metoda najbližeg susjeda..... 71

Tablica 58. Redoslijed i udaljenosti rute vozila 3 73

Tablica 59. Matrica udaljenosti za rutu vozila 3 73

Tablica 60. Lista ušteda za rutu vozila 3 prema veličini 76

Tablica 61. Matrica udaljenosti za rutu vozila 3, Clark-Wrightova metoda s indikatorom T . 78

Tablica 62. Matrični prikaz izračuna za rutu vozila 3, Clark-Wrightova metoda s indikatorom T 79

Tablica 63. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila 3, metoda grananja i ograničavanja.... 80

Tablica 64. Matrični prikaz izračuna rute vozila 3, metoda grananja i ograničavanja..... 80

Tablica 65. Matrični prikaz izračuna rute vozila 3, metoda najbližeg susjeda 81

Tablica 66. Redoslijed i udaljenosti rute vozila 4 82

Tablica 67. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila 4 82

Tablica 68. Lista ušteda za rutu vozila 4 prema veličini 84

Tablica 69. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila 4, Clark-Wrightova metoda s indikatorom T 86

Tablica 70. Matrični prikaz izračuna za rutu vozila 4, Clark-Wrightova metoda s indikatorom T 87

Tablica 71. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila 4, metoda grananja i ograničavanja.... 88

Tablica 72. Matrični prikaz izračuna za rutu vozila 4, metoda grananja i ograničavanja..... 88

Tablica 73. Matrični prikaz izračuna za rutu vozila 4, metoda najbližeg susjeda..... 88

Tablica 74. Redoslijed i udaljenosti rute vozila 5 90

Tablica 75. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila 5 90

Tablica 76. Lista ušteda za rutu vozila 5 prema veličini 92

Tablica 77. Matrični prikaz udaljenosti za rutu vozila 5, Clark-Wrightova metoda s indikatorom T 93

Tablica 78. Matrični prikaz izračuna za rutu vozila 5, Clark Wrightova metoda s indikatorom T 94

Tablica 79. Matrica udaljenosti za rutu vozila 5, metoda grananja i ograničavanja 95

Tablica 80. Matrični prikaz izračuna za rutu vozila 5, metoda grananja i ograničavanja 95

Tablica 81. Matrični prikaz izračuna za rutu vozila 5, metoda najbližeg susjeda 96

Tablica 82. Rezultati dobiveni primjenom matematičkih modela 97

POPIS GRAFIKONA

Grafikon 1. Grafički prikaz rute iz primjera 1..... 25

Grafikon 2. Odnos ruta vozila i dobivenih rješenja 91