Eksperimentalno određivanje momenata tromosti višerotorske bespilotne letjelice

Matak, Leo

Undergraduate thesis / Završni rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Transport and Traffic Sciences / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:119:097627

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**



Repository / Repozitorij:

Faculty of Transport and Traffic Sciences - Institutional Repository







SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET PROMETNIH ZNANOSTI

Leo Matak

EKSPERIMENTALNO ODREĐIVANJE MOMENATA TROMOSTI VIŠEROTORSKE BESPILOTNE LETJELICE

ZAVRŠNI RAD

Zagreb, 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET PROMETNIH ZNANOSTI
ODBOR ZA ZAVRŠNI RAD

Zagreb, 30. ožujka 2018.

Zavod: **Zavod za aeronautiku**
Predmet: **Teorija leta II**

ZAVRŠNI ZADATAK br. 4782

Pristupnik: **Leo Matak (0135240437)**
Studij: Aeronautika
Smjer: Kontrola leta

Zadatak: **Eksperimentalno određivanje momenata tromosti višerotorske bespilotne letjelice**

Opis zadatka:

Određivanje momenata tromosti bespilotne letjelice vrlo je bitno za izradu modela dinamike leta. U radu je potrebno dati definiciju momenata tromosti letjelice te obrazložiti bitnost njihovog poznavanja za dinamiku leta. Također, potrebno je opisati analitičku i eksperimentalnu metodu određivanja momenata tromosti, te na primjeru višerotorske bespilotne letjelice ekperimentalno odrediti njezine momente tromosti oko osi x, y i z osi. Eksperiment je potrebno popratiti fotografijama, a dobivena rješenja validirati.

Mentor:

Karolina KN

dr. sc. Karolina Krajček Nikolić

Predsjednik povjerenstva za završni ispit:

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET PROMETNIH ZNANOSTI

ZAVRŠNI RAD

Eksperimentalno određivanje momenata tromosti višerotorske bespilotne letjelice

Experimental Determination of Inertia Moments on a Rotary Wing Unmanned Aerial Vehicle

Mentor: dr. sc. Karolina Krajček Nikolić

Student: Leo Matak
JMBAG: 0135240437

Zagreb, 2018.

Sažetak

Momenti tromosti nekog tijela, primjerice letjelice, ključni su parametar njegove dinamike jer predstavljaju mjeru otpora rotacijskom gibanju. Što je letjelica tromija, teže će biti započeti, ali i zaustaviti njezinu rotaciju. U radu je prikazana metodologija teorijskog i eksperimentalnog određivanja vrijednosti momenata tromosti pravilnih geometrijskih tijela, te vrlo jednostavna metoda određivanja momenta tromosti nepravilnih tj., složenih predmeta na primjeru bespilotne letjelice s rotacionim krilom. Eksperimentalna metoda određivanja momenata tromosti tijela temelji se na principu bifilarnog njihala i mjerenju perioda njihanja. Za potvrdu ispravnosti postavki njihala najprije se testira podudaranje poznate vrijednosti gravitacijskog ubrzanja s dobivenom vrijednosti nakon uvrštavanja izmjerenog perioda. Sljedeći korak je eksperimentalno određivanje momenata tromosti geometrijski pravilnog tijela - drvenog kvadra poznatih dimenzija. Tek nakon potvrde da su metodom dovoljno točno određeni momenti tromosti drvenog kvadra, provodi se eksperimentalno određivanje momenata tromosti bespilotne letjelice s rotacionim krilom. Rezultati testiranja momenata tromosti bespilotne simetrične letjelice mase 292 g, pokazali su kako su momenti tromosti oko longitudinalne i poprečne osi gotovo identični, dok su najveće vrijednosti dobivene za moment tromosti oko *z* osi.

KLJUČNE RIJEČI: eksperimentalno određivanje momenata tromosti, bifilarno njihalo, bespilotna letjelica, rotacijsko gibanje

Summary

Moment of inertia of a specific body, say an aircraft, is a key parameter of its dynamics, because it represents the amount of resistance required to counteract angular motion. The more the aircraft is inert, the harder it is to start and to stop its rotation. This thesis shows the methodology of theoretical and experimental determination of moments of inertia for regular geometric bodys, and a fairly simple method used for irregular and complex bodys, such as a rotary wing unmanned aerial vehicle. The experimental method is based on a principle of a bifilar torsional pendulum and its measured swing periods. First, the known values of the gravitational acceleration and the measured values are compared, in order to confirm the accuracy of the pendulum. The next step is experimentally determining the moment of inertia for a regular geometric body, in this case a wooden cuboid. After confirming the method is accurate, using the wooden cuboid, it can be proceeded to determining the moment of inertia for a rotary wing unmanned aerial vehicle. The results of the experiment on a rotary wing unmanned aerial vehicle, with a mass of 292 g, showed that moments of inertia around longitudinal and lateral axis are almost identical, while the moment of inertia around the vertical z axis has the highest values.

KEY WORDS: experimental determination of moments of inertia, bifilar pendulum, unmanned aerial vehicle, rotational motion

SADRŽAJ

1. Uvod 1
2. Moment tromosti 2
2.1. Analitičko određivanje momenata tromosti 5
2.2. Jednadžba gibanja krutog tijela oko nepomične osi 6
2.3. Uloga momenata tromosti u gibanju zrakoplova 7
2.4. Momenti tromosti oko pojedinih osi zrakoplova 8
3. Eksperimentalno određivanje momenata tromosti krutog tijela 11
3.1. Princip rada bifilarnog torzijskog njihala 11
3.2. Opis postupka eksperimenta i potrebne opreme 13
4. Mjerenja momenata tromosti drvenoga kvadra 15
4.1. Analitičko određivanje momenata tromosti drvenoga kvadra 15
4.2. Eksperimentalno određivanje momenata tromosti drvenoga kvadra 15
5. Određivanje momenata tromosti bespilotne letjelice 20
5.1. Definiranje koordinatnog sustava letjelice 20
5.2. Eksperimentalno određivanje momenata tromosti letjelice 21
6. Zaključak 25
Literatura 26
Popis slika 27
Popis tablica 28
Popis oznaka 29

1. UVOD

Mjerenja momenata tromosti su neizostavni dio kod dizajniranja, modeliranja i konstrukcija zrakoplova, uključujući male bespilotne letjelice. Kako bi zrakoplov mogao mijenjati smjer, pilot mora moći jednostavno manevrirati silama i momentima zrakoplova zakretanjem njegovih upravljačkih površina. Moment tromosti kod rotacijskog gibanja istovjetan je masi kod translacijskog gibanja. Što je moment tromosti nekog tijela veći to ga je teže pokrenuti tj. zaustaviti njegovu rotaciju. Za razliku od mase momenti tromosti nisu nepromjenjive veličine, već ovise o osima oko kojih se odvija rotacija.

Proteklih nekoliko godina male bespilotne letjelice su izuzetno dobile na vrijednosti zahvaljujući širokoj lepezi mogućnosti za koje se mogu koristiti. Vrijednosti momenata tromosti letjelica određuju potrebne momente zakretanja za željeno kutno ubrzanje oko promatrane osi rotacije. Iz tih razloga su bitne osobine za proučavanje dinamike leta i razvoja. Eksperimentalno određivanje momenata tromosti nije novi koncept, već dolazi još iz davnog razvojnog doba zrakoplovstva. Godine 1926. objavilo se prvo istraživanje rotacija oko osi. Tada se već osjetila nužnost eksperimentalnog određivanja momenata tromosti letjelica. Eksperiment odrađen u ovom radu, pomoću torzijskog njihala s 2 vezice, princip vuče još iz tih povijesnih vremena. Način mjerenja se nije puno promijenio zbog svoje jednostavnosti. Uz jednostavnost, eksperiment je vrlo siguran i izuzetno pouzdan.

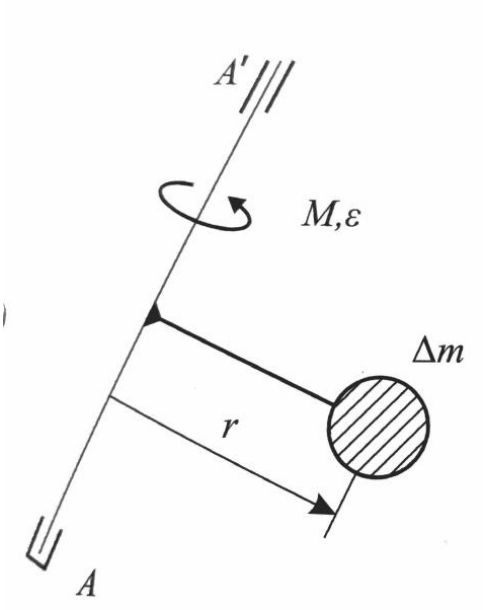
U radu je opisano što su to momenti tromosti, kako se određuju analitički, te kako se mogu eksperimentalno odrediti za drveni kvadar i bespilotnu letjelicu s rotacionim krilom oko osi *x*, *y*, i *z*. Kako bi se osigurala točnost metodologije eksperimenta koristio se drveni kvadar poznatih, tj. mjerljivih vrijednosti dužine, visine i širine, kojemu je bilo jednostavno analitički izračunati momente tromosti oko vlastitih osi, te onda provjeriti odgovaraju li eksperimentalnim rezultatima. Period osciliranja se mjerio 10 puta za svaku os kako bi se minimalizirala ljudska pogreška mjerenja, te je onda uzet prosjek. Nakon drvenog kvadra, mjerili su se momenti tromosti bespilotne letjelice rotacionog krila.

2. MOMENT TROMOSTI

Neka se uzme da postoji neka čestica mase Δm, te da je ona nekom čvrstom vezom zanemarive mase pričvršćena na osovinu *AA'*. Budu li na nju djelovale sile ili spreg sila $\vec{M}$ doći će do rotacije. Kutno će ubrzanje $\vec{\varepsilon}$ tada biti obrnuto proporcionalno umnošku mase čestice *m* i kvadrata njene odaljenosti *r* od osi rotacije, što se može zapisati i u sljedećem obliku:

$$M = (r^2 \cdot \Delta m)\varepsilon \tag{2.1}$$

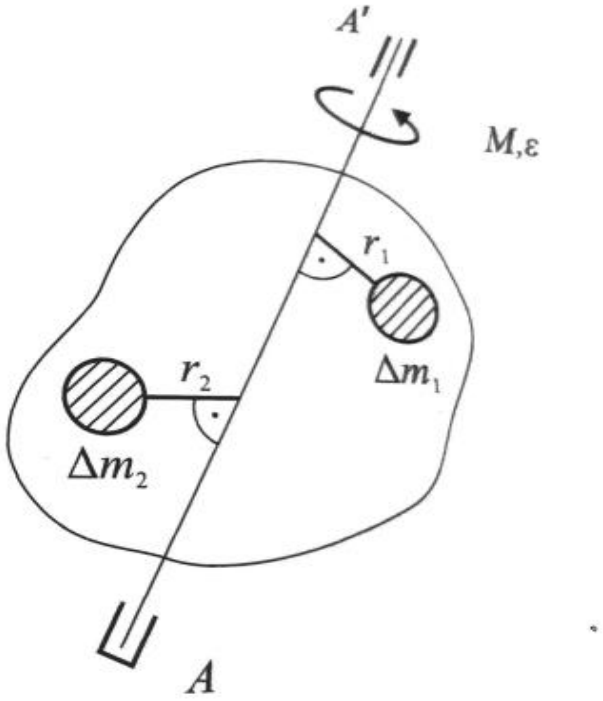
Umnožak $r^2 \cdot \Delta m$ prikazuje mjeru tromosti opisanog sustava. Ta se mjera još naziva i dinamičkim momentom tromosti čestice mase Δm s obzirom na os *AA'*. [1]



Slika 1 - Rotacija čestice oko nepomične osi AA' [1]

Kada bi se tijelo mase *m* podijelilo na veliki broj manjih elemenata Δm_1, Δm_2,…, Δm_i, moglo bi se prikazati kako je zapravo mjera inercije, tj. tromosti jednaka zbroju malih elementarnih momenata inercije: Kada bi se tijelo mase m podijelilo na veliki broj manjih elemenata Δm_1, Δm_2,…, Δm_i, moglo bi se prikazati kako je zapravo mjera inercije, tj. tromosti, jednaka zbroju tih malih elementarnih momenata inercije:

$$r_1^2 \Delta m_1 + r_2^2 \Delta m_2 + \cdots \approx \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \Delta m_i \tag{2.2}$$



Slika 2 - Rotacija krutog tijela oko nepomične osi AA' [1]

Prelaskom na graničnu vrijednost, tj. kad dimenzije elemenata Δm_1, Δm_2 , … , Δm_i postanu beskonačno male, a njihov broj beskonačno velik, zbroj:

$$r_1^2 \Delta m_1 + r_2^2 \Delta m_2 + \cdots \approx \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \Delta m_i \tag{2.3}$$

Prelazi u integral:

$$I = \int_m r^2 dm \tag{2.4}$$

U izrazu (2.4) sa *r* je označena najmanja udaljenost ranije spomenutog beskonačno malog elementa neke mase *dm* od osi rotacije AA', te se time dolazi do definicije za aksijalni moment tromosti tijela oko spomenute osi.

Jednadžba (2.4) opisuje otpor rotacijskom gibanju nekog tijela. Kao što je masa tijela *m* mjera otpora translacijskog gibanju, tako je i moment inercije mjera otpora rotacijskom gibanju.

Kako se u izrazu za moment tromosti pojavljuje umnožak mase i kvadrata udaljenosti od osi, jedinica za moment tromosti je kgm^2. Iz izraza je jasno vidljivo da je vrijednost momenta tromosti uvijek veća od nule (masa je uvijek veća od nule i kvadrat udaljenosti je veći od nule).

Kod momenata inercije bitnu ulogu igra gustoća promatranog tijela. Ako gustoća nije jednaka po cijelom tijelu, onda se ρ mora uključiti u integraciju. Međutim, ako gustoća je jednaka za cijelo tijelo, onda za sve elemente koji imaju masu *dm* vrijedi da je $dm = \rho dV$ (*dV* je elementarni volumen tijela). Ako se to uzme u obzir, izraz (2.4) se može zapisati u obliku:

$$I = \rho \int_V r^2 dV \tag{2.5}$$

Polumjer inercije *i* tijela mase *m* s obzirom na neku os, može se definirati kao:

$$i = \sqrt{\frac{I}{m}} \quad \text{ili} \quad I = i^2 m \tag{2.6}$$

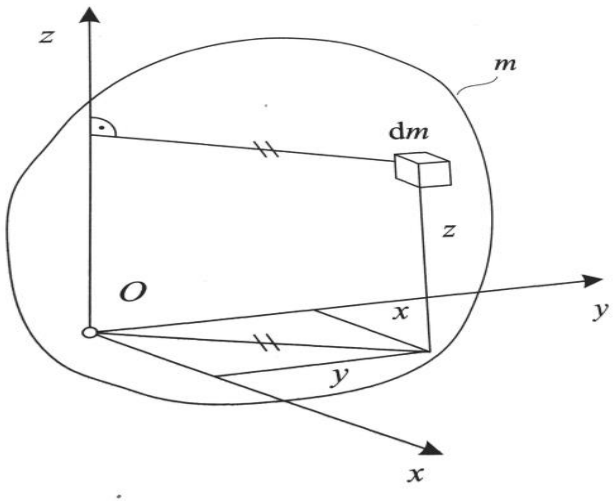
Polumjer inercije predstavlja udaljenost od osi rotacije na kojoj bi trebala biti koncentrirana čitava masa tijela kako bi aksijalni moment tromosti tijela pri tome ostao nepromijenjen [1].

Momenti inercije s obzirom na osi pravokutnoga koordinatnog sustava definirani su na sljedeći način:

$$I_x = \int_m (y^2 + z^2) dm \tag{2.7}$$

$$I_y = \int_m (z^2 + x^2) dm \tag{2.8}$$

$$I_z = \int_m (y^2 + x^2) dm \tag{2.9}$$



Slika 3 - Momenti tromosti prema osima pravokutnoga koordinatnog sustava [1]

2.1. Analitičko određivanje momenata tromosti

Momente tromosti pravilnih geometrijskih tijela kojima se oblik može opisati matematičkim formulama, kao npr.: disk ili ispunjeni kvadar i sl. je lako izračunati. Problem nastaje kada je potrebno odrediti momente tromosti objekata koji nisu pravilni, odnosno, nije ih lako matematički opisati [5]. Određivanju momenata tromosti predmetima nepravilnih oblika se pristupa empirijski odnosno eksperimentalno, jer je analitički gotovo nemoguće. Moment tromosti, prema tome, ovisi o obliku tijela, raspodjeli mase, položaju osi rotacije i udaljenosti od osi rotacije.

Ako je *m* masa tijela, a *r* njegov polumjer, a os rotacije ujedno i os simetrije moment inercije šupljeg valjka ili prstena iznosit će :

$$I = mr^2 \tag{2.10}$$

Tromost jednoliko ispunjenog valjka ili kružne ploče iznosit će:

$$I = \frac{mr^2}{2} \tag{2.11}$$

Homogeno ispunjene kugle:

$$I = \frac{2mr^2}{5} \tag{2.12}$$

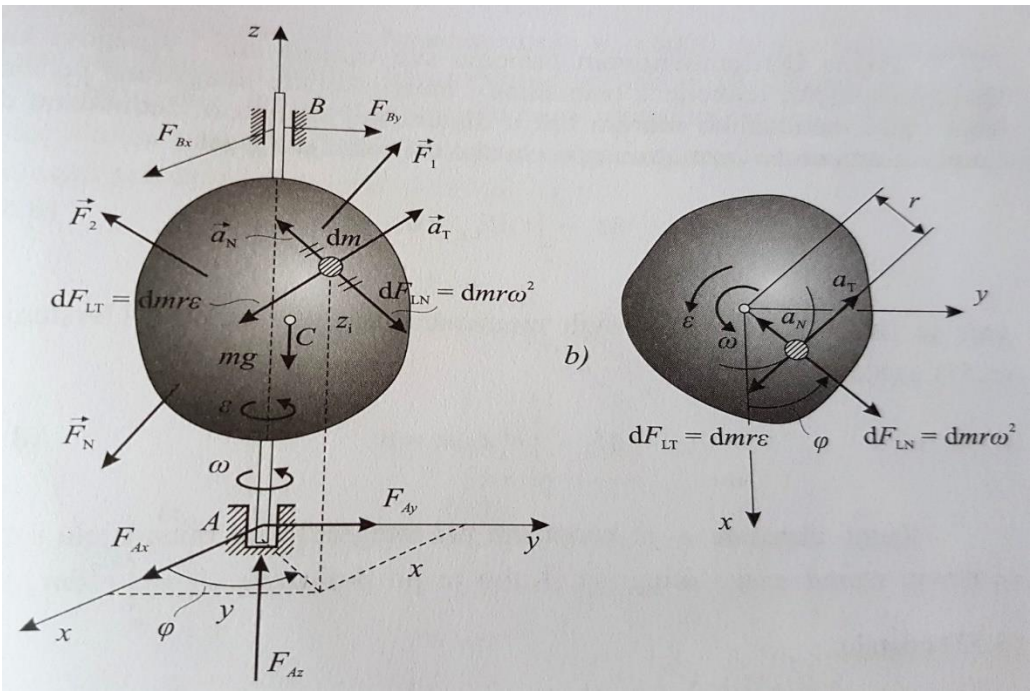
Moment tromosti homogeno ispunjenoga štapa kojemu je os rotacije okomita na dužinu štapa, i nalazi se na polovici dužine štapa *l* :

$$I = \frac{ml^2}{12} \tag{2.13}$$

Ovo su samo neki primjeri pravilnih tijela kojima se s lakoćom računaju momenti tromosti, međutim u ovom radu se radi na eksperimentalnom određivanju momenata tromosti nepravilnog tijela jedne bespilotne letjelice s rotacionim krilom [3].

2.2. Jednadžba gibanja krutog tijela oko nepomične osi

Pri rotaciji krutog tijela oko nepomične osi točke na tijelu gibaju se po koncentričnim kružnicama koje leže u ravninama okomitima na os rotacije. Rotacija krutog tijela mase *m* oko nepomične osi *z* prikazana je na slici 4.



Slika 4 - Rotacija tijela oko nepomične osi z

Na tijelo prikazano na slici 4. djeluju razne sile kao što su $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \ldots, \overrightarrow{F_N}$, te zbog toga tijelo ima neku kutnu brzinu $\vec{\omega}$ i kutno ubrzanje $\vec{\varepsilon}$. U prirodnom koordinatnom sustavu se ubrzanje svake čestice tijela može prikazati preko komponenti sila, i to tangencijalne i normalne. Na desnom djelu slike 4., prikazano je promatranje gibanja tijela u ravnini *xy* koje je okomito na os rotacije *z.* Na tom djelu se vide komponente ubrzanja:

$$a_N = r\omega^2 \tag{2.14}$$

$$a_T = r\varepsilon \tag{2.15}$$

Pa su inercijske sile koje djeluju na česticu mase *dm* :

$$dF_{LN} = r\omega^2 dm \tag{2.16}$$

$$dF_{LT} = r\varepsilon dm \tag{2.17}$$

Prema D'Alembertovom principu sve vanjske sile koje djeluju na tijelo, reakcije u osloncima i inercijske sile integrirane po čitavom tijelu međusobno moraju biti u dinamičkoj ravnoteži [1]. Jednadžba dinamičke ravnoteže razmatranog tijela oko osi rotacije *z* glasi:

$$M_z - \int_m rd\,F_{LT} = 0 \tag{2.18}$$

Gdje je $M_z = \sum M_{zi}$ zbroj svih momenata oko osi rotacije. Daljnjim sređivanjem i uvrštavanjem izraza (2.17) u (2.18) dolazi se do :

$$M_z - \int_m r^2 \varepsilon dm = 0 \tag{2.19}$$

Kutno ubrzanje ε je konstanta pri integraciji po masi tijela i može se staviti ispred znaka integrala. Kako je po definiciji $I_z = \int_m r^2 dm$ izraz (2.19) prelazi u:

$$M_z = I_z \varepsilon \tag{2.20}$$

odnosno:

$$M_z = I_z \ddot{\varphi} \tag{2.21}$$

Izraz (2.21) predstavlja jednadžbu gibanja za kruto tijelo koje rotira oko nepomične osi. Dakle, rezultantni moment oko osi rotacije jednak je umnošku momenta tromosti I_z oko osi rotacije i kutnog ubrzanja ε. $\ddot{\varphi}$ predstavlja drugu derivaciju prevaljenog kuta φ što je isto što i ε. Ova jednadžba potpuno je istovjetna jednadžbi translacijskog gibanja $F_x = ma$ odnosno $F_x = m\ddot{x}$ gdje je $\ddot{x}$ također druga derivacija puta. Uspoređivanjem tih dviju jednadžbi vidi se da moment inercije u jednadžbi rotacijskog gibanja ima istu ulogu kao i masa u jednadžbi gibanja čestice [1].

2.3. Uloga momenata tromosti u gibanju zrakoplova

Tijekom leta, krila zrakoplova odnosno kontrolne površine zrakoplova zbog reakcija sa zrakom stvaraju aerodinamičke sile. Hvatišta aerodinamičkih sila kontrolnih površina nalaze se na nekoj udaljenosti od središta mase zrakoplova uslijed čega nastaju momenti oko glavnih osi. Zakretni moment uzrokuje rotaciju zrakoplova [3]. Sposobnost kontroliranja količine generirane sile i momenata omogućuje pilotu manevriranje i izravnavanje zrakoplova. Kako bi se ostvarile što bolje karakteristike manevriranja proizvođači zrakoplova moraju uzeti u obzir momente tromosti. Momenti tromosti nekog aviona prikazuju koliki će biti potreban moment za početak okretanja te koliko će se brzo zaustavljati iz rotacije. Oni igraju istu ulogu koju masa ima kada se radi o linearnom ubrzanju. Što je zrakoplov teži, odnosno ima veću masu, više je vremena potrebno da ubrza, kao i da se zaustavi.

Tri su momenta inercije, po jedan oko svake osi okretanja, međutim, najbitniji je moment tromosti oko longitudinalne osi. Najbitniji je iz razloga što krila stvaraju najveće momente

tromosti. Što je veći moment inercije duž dane osi, zrakoplovu je zahtjevnije postići potrebno kutno ubrzanje. Vrijednost momenta duž neke osi određen je raspodjelom težine oko te osi.

Na primjer, u gibanju valjanja, okretanja oko longitudinalne osi, ako zrakoplov ima dosta težine kod vrha krila okretat će se sporije. Vrh krila je krajnji dio krila koji se nalazi na najvećoj udaljenosti od tijela zrakoplova. U pravilu se taj dio krila radi da bude što lakši baš iz spomenutih razloga, međutim postoje zrakoplovi koji pri kraju krila imaju spremnike za gorivo i sl., što mora biti uzeto u obzir kod proračuna brzine rotacije. [4] Momenti tromosti će tako ovisiti i o vrsti i položaju zakrilaca na krilu. Kako se zrakoplov kreće s vremenom će gubiti gorivo, pa tako i masu u krilima. Kako se to mijenja mijenjat će se i njegova tromost manevriranja. Podvozje će također imati ulogu ako je izvučeno, kako kod slijetanja tako i kod zrakoplova koji imaju fiksno izvučeno podvozje. Što je podvozje dulje, i gume teže, stvarati će veći otpor pri rotaciji.

Zrakoplovni manevri su oblici letenja koji zrakoplova postavljaju u neobične pozicije. Oni se izvode u zračnim predstavama, borbama zrakoplova, raznim natjecanjima i sl. Manevri mogu biti izvedeni pojedinačno ili u formacijama od više zrakoplova. Gotovo pa svi zrakoplovi su sposobni izvoditi neke tipove manevara, iako to nije uvijek baš legalno ili najsigurnije. Kod manevriranja uz mnoge druge stvari kao što je vučna sila, energija i težina, bitnu ulogu igraju i momenti tromosti, tj. raspodjela mase oko osi zrakoplova. Posebno se rade krila sa spremnicima što bližim trupu zrakoplova kako bi se postigla brža okretanja. Sami materijali od kojih se proizvode pridonose smanjenju tromosti.

Kako bi se dodatno smanjila masa pri kraju krila, proizvode se krila koja se sužavaju. Takva su krila strukturno i aerodinamički učinkovitija od krila koja su konstantnog oblika, a lakše ih je izraditi od eliptičnog tipa krila [3].



Slika 5 - Neki od tipova izrade krila

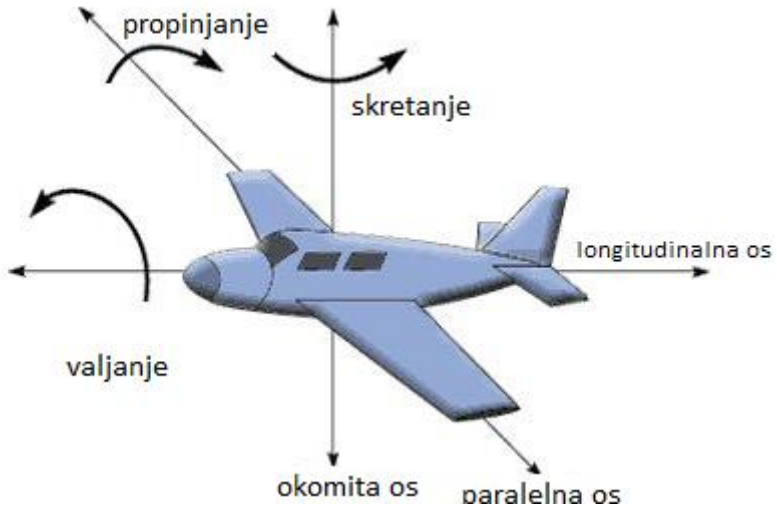
2.4. Momenti tromosti oko pojedinih osi zrakoplova

Za razliku od automobila koji se kreću samo translacijski, naprijed i nazad po svoje 3 osi, zrakoplovi imaju sposobnost gibanja rotacijski oko svake osi. Kaže se da se zrakoplovi gibaju u pravom 3d[1] prostoru, te zbog toga imaju tzv. 6 stupnjeva slobode gibanja. Uz mogućnost

[1] 3d prostor – trodimenzionalni prostor, prostor koji ima tri dimenzije, odnosno definiran je s tri dimenzije

kretanja naprijed i nazad po svakoj od 3 osi, za zrakoplove je bitna i mogućnost okretanja oko svake osi.

Gibanje po x osi: naprijed i nazad	+	Rotacija oko x osi – *roll*	= 6 stupnjeva slobode
Gibanje po y osi: lijevo i desno		Rotacija oko y osi – *pitch*	
Gibanje po z osi: gore i dolje		Rotacija oko z osi – *yaw*	



Slika 6 - 6 stupnjeva slobode

Može se reći da je kutna količina gibanja $\vec{L}$ nekog krutog tijela jednaka umnošku momenta tromosti *I* i kutne brzine $\vec{\Omega}$

$$\vec{L} = I\vec{\Omega} \tag{2.22}$$

Ukupna količina gibanja cijelog tog istog krutog tijela dobiva zbrajanjem svih količina gibanja pojedinih čestica. Da bi se to postiglo potrebno je raspisati kutnu količinu gibanja po komponentama. Izraz kutne količine gibanja čestice jednak je izrazu ukupne količine gibanje, međutim moraju se uvesti neke nove oznake jer se sada promatra više komponenti. Uzimajući sve to u obzir dolazi se do konačnih izraza za komponente kutne količine gibanja krutog tijela:

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ L_y &= -I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ L_z &= -I_{xz}\omega_x - I_{yz}\omega_y - I_{zz}\omega_z \end{aligned} \tag{2.23}$$

Koristeći gornje izraze, jednakost $\vec{L} = I\vec{\Omega}$ može se zapisati kao matrična jednadžba:

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

Matrica u sredini naziva se tenzorom inercije, i sastoji se od devet elemenata. Tenzor inercije govori o raspodjeli mase u krutom tijelu. Ako je tijelo simetrično oko neke osi, primjerice, *x* osi, onda će vrijediti $I_{xy} = I_{yx} = I_{xz} = I_{zx} = 0$. Kako je prije navedeno da se kutna količina gibanja za kruto tijelo izračunava sumiranjem svih kutnih količina gibanja svih čestica, slijedi da svaki element tenzora inercije predstavlja sumu istog izraza za svaku česticu tijela. Ova tvrdnja potvrđuje se usporedbom između jednadžbe kutne količine gibanja za i -tu česticu i sljedećih izraza.

Elementi na dijagonali matrice su zapravo ukupni momenti inercije oko pojedinih osi [4]:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum_i m_i \, (y_i^2 + z_i^2) \\ I_{yy} &= \sum_i m_i \, (z_i^2 + x_i^2) \\ I_{zz} &= \sum_i m_i \, (x_i^2 + y_i^2) \end{aligned} \tag{2.25}$$

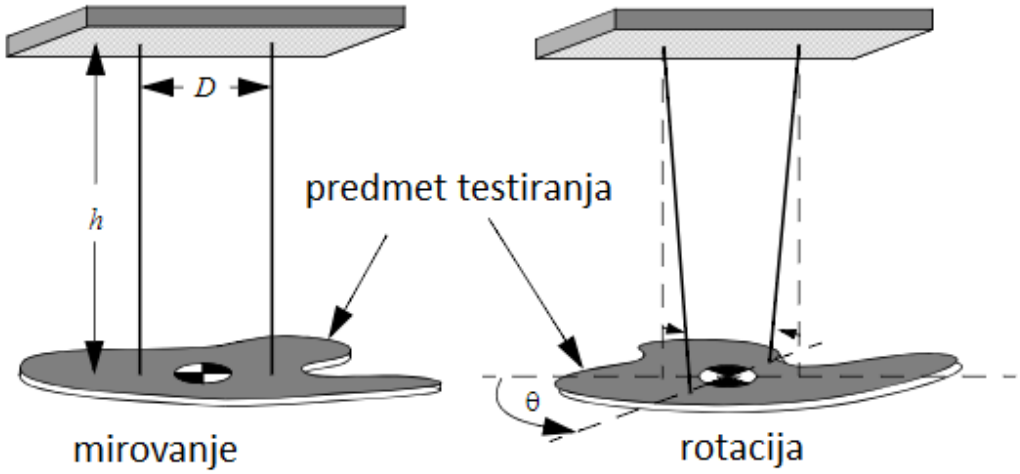
Iz čega se vidi da što je masa dalja od osi rotacija moment tromosti će se povećavati, također vrijedi i za udaljenost. Što je neka čestica mase *m* dalja od osi rotacija zrakoplova bit će potreban veći moment da ju se pokrene u rotaciju i da ju se zaustavi iz iste. Ove jednakosti se mogu bolje shvatiti ako se pogleda slika 3.

3. EKSPERIMENTALNO ODREĐIVANJE MOMENATA TROMOSTI KRUTOG TIJELA

Ovaj dio, te svi sljedeći dijelovi rada odnose se direktno na provedeni eksperiment. Dosad je bilo opisano što je to moment tromosti, njegove značajke, važnosti i uloge, ali općenito za sve letjelice i kruta tijela. Eksperiment se temelji na mjerenju perioda ovješenog predmeta na bifilarno torzijsko njihalo, koje je detaljnije opisano u sljedećem poglavlju.

3.1. Princip rada bifilarnog torzijskog njihala

Njihalo prikazano na slici 3.1, je torzijsko njihalo koje se sastoji od 2 vezice, duljine *h*, na koje je ovješen testni predmet, te su one međusobno udaljene za vrijednost *D* [5].



Slika 7 - Prikaz bifilarnog torzijskog njihala

Za tijela kojima je matematički nemoguće opisati oblik, momente inercije tj. tromosti određuje se eksperimentiranjem koristeći jednostavno njihalo koje koristi povezanost između perioda oscilacije i momenata tromosti ovješenog tijela.

Njihalo, odnosno predmet ovješen na njihalo, oscilira oko svoje vertikalne osi. Kut rotacije u horizontalnoj ravnini je θ. Zahvaljujući gravitacijskoj sili dolazi do povratnog zakretnog momenta njihala, jer se promatrani predmet lagano podigne svaki put kad oscilira. To uzrokuje njegov povratak u prvobitno stanje. Takvom gibanju vrlo je jednostavno izmjeriti period. U pravilu se mjeri 10 puta po 10 oscilacija te se onda uzima prosjek za vrijeme jednog perioda. Također, ne mjeri se od prvog otpuštanja predmeta jer je veća vjerojatnost pogreške, pusti se prvi put da se zanjiše te se kreće mjeriti kada se predmet vrati u početni položaj [5] [7].

Da bi se krenulo s eksperimentom njihalo prvo mora biti testirano radi ispravnosti. Kako bi se to učinilo gravitacijsko ubrzanje će biti eksperimentalno određeno ljuljajući predmet, te onda mjerenjem perioda njihanja i onda korištenjem sljedećih jednadžbi:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{3.1}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}} \rightarrow g = \omega^2 h = \frac{4\pi^2 h}{T^2} \tag{3.2}$$

Ako su eksperimentalno određeni rezultati za gravitacijsko ubrzanje dovoljno blizu poznatoj vrijednosti ($g = 9{,}81$ m/s^2), onda se može reći kako je njihalo dobro postavljeno, te se može početi raditi na određivanju momenata tromosti koristeći jednadžbe u nastavku. Kako bi se odredili momenti tromosti, period T koji će se dalje koristiti u jednadžbama nije period oscilacije nego vrijeme potrebno predmetu da se rotira oko svoje osi:

$$I = \frac{mgD^2T^2}{16\pi^2 h} \tag{3.3}$$

Gdje je :

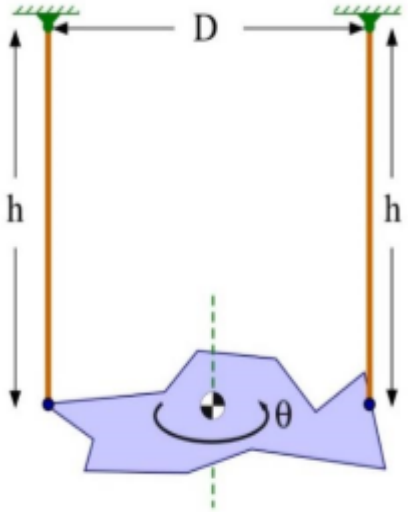
m – masa tijela

g – gravitacijsko ubrzanje

D – udaljenost između vezica

T – period vremena potreban tijelu da se rotira oko osi

h – duljina vezica njihala



Slika 8 - Konfiguracija njihala

3.2. Opis postupka eksperimenta i potrebne opreme

Eksperiment sam po sebi nije težak za izvesti, ne zahtijeva napredne laboratorije ili lasersku preciznost, međutim određena oprema je potrebna. Vezice mogu biti bilo kojeg materijala, međutim što su lakše, manje će utjecati na rezultat. Bilo koji mobitel s malo boljem kamerom je dostatan. Metar i ravnalo služe za mjerenje duljina i udaljenosti vezica kao i za dimenzioniranje kvadra. Ostala oprema, isključujući testni predmet, odnosno bespilotnu letjelicu, nije toliko bitna za eksperiment, te se može improvizirati s odabirom.

- 2 vezice jednake duljine
- Drveni blok dimenzija 12,3 cm x 3,8 cm x 8,9 cm.
- Mobitel kao fotoaparat i štoperica
- Metar
- Ravnalo
- Binder clips
- Škare
- Mini quadcopter
- Gumice
- Spajalice za papir
- Kemijska olovka i bilježnica
- Kalkulator

Koristeći se prethodno navedenom opremom, do rezultata traženih u ovom radu se dolazi sljedećim načinom:

1. Odrediti dimenzije drvenog kvadra; masu *m,* dužinu *a,* visinu *b* i širinu *c.* Nakon toga uvrstiti u formule i izračunati momente oko sve 3 osi.
2. Sastaviti jednostavno bifilarno torzijsko njihalo, pazeći da vezice budu paralelne i jednake duljine. Nakon toga treba ovjesiti kvadar tako da ne bude nagnut, već da leži u ravnini.
3. Izmjeriti i zapisati vrijednosti udaljenosti vezica *D*, i duljine *h*
4. Provjera ispravnosti njihala. Da bi se osigurala ispravnost testira se za neku poznatu vrijednost. U ovom radu je uzeta konstanta gravitacijskog ubrzanja, *g*. Za određivanje gravitacijskog ubrzanja njiše se spomenuti kvadar te mu se mjeri vrijeme potrebno do povratka u početni položaj; period *T*. Period je dakle vrijeme potrebno da se predmet zanjiše u jednom smjeru te vrati skroz nazad u početni položaj. Kako bi se minimalizirala ljudska pogreška kod mjerenja, mjeri se 10 oscilacija 10 puta, te se uzima prosječna vrijednost.
5. Za određivanje gravitacijskog ubrzanja koristi se sljedeća formula:

$$g = \omega^2 h = \frac{4\pi^2 h}{T^2}$$

U ovom radu koristile su se mjerne jedinice u obliku centimetara po sekundi po sekundi; *cm/s*^{2} tako da gravitacijsko ubrzanje treba iznositi otprilike 981 cm/s^2.

6. Nakon što se gravitacijsko ubrzanje eksperimentalno odredi, i približno bude jednako poznatoj vrijednosti njihalo je ispravno postavljeno tj. konfigurirano te se može preći na eksperimentalno određivanje momenata tromosti. Ponovo se mjeri udaljenost između vezica *D*, te njihova duljina, *h*.
7. Za eksperimentalno određivanje momenata tromosti koristi se sljedeća jednadžba:

$$I = \frac{mgD^2T^2}{16\pi^2 h}$$

Pritom period *T* više nije period oscilacije njihanja kao u 4. tj. 5. koraku nego je to sad vrijeme potrebno da se tijelo rotira oko svoje osi. Za svaku os se mjeri posebno. Također 10 oscilacija 10 puta za svaku os.

8. Nakon što su dobiveni rezultati eksperimentiranja sa drvenim kvadrom, uspoređuje se s dobivenim analitičkim rezultatima. Ako je devijacija analitičkog računanja i eksperimentiranja < 10% njihalo je ispravno konfigurirano. U slučaju da je razlika veća od 10%, negdje je došlo do pogreške.
9. Kada su rezultati uspoređeni i utvrđeno je da je sustav ispravno postavljen, da daje točne rezultate, može se preći na pravi zadatak ovoga rada. Ponavljaju se koraci od 2 – 7, samo što se umjesto drvenog kvadra koristi bespilotna letjelica rotacionog krila. [5]

4. MJERENJA MOMENATA TROMOSTI DRVENOGA KVADRA

Prije nego se s dovoljnom točnošću moglo krenuti eksperimentirati i određivati momente inercije nekog nepravilnog tijela kao što je letjelica rotacionog krila, moralo se utvrditi ispravnost postavljane aparature odnosno njihala. To je potvrđeno koristeći prvo pravilno geometrijsko tijelo; homogeno ispunjeni drveni kvadar.

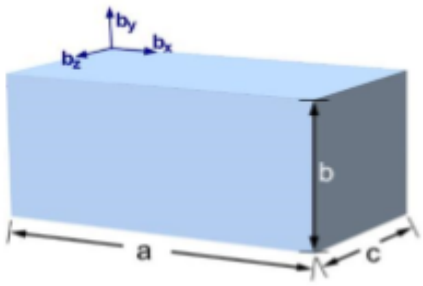
4.1. Analitičko određivanje momenata tromosti drvenoga kvadra

Za izračunavanje momenata tromosti drvenoga kvadra koriste se poznate jednadžbe:

$$I_x = \frac{m(b^2 + c^2)}{12}$$

$$I_y = \frac{m(a^2 + c^2)}{12} \tag{4.1}$$

$$I_z = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}$$



Slika 9 - Osi i varijable kvadra

Tablica 1 - Karakteristike drevnoga kvadra

a (cm)	*b* (cm)	*c* (cm)	*m* (g)	I_x (gcm^2)	I_y (gcm^2)	I_z (gcm^2)
12,3	3,7	8,8	292	2217,51	5565,76	4014,51

4.2. Eksperimentalno određivanje momenata tromosti drvenoga kvadra

Prije nego se mogu eksperimentalno odrediti momenti tromosti drvenog kvadra, uspoređena je eksperimentalno dobivena vrijednost gravitacijskog ubrzanja i poznata vrijednost iste. Vrijednost gravitacijskog ubrzanja dobivena je mjerenjem perioda potrebnog za njihanje drvenoga kvadra te uvrštavanjem tog perioda u sljedeću jednadžbu:

$$g_y = \omega^2 h = \frac{4\pi^2 h}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 91}{1{,}9135^2} = 981{,}1699 \approx 981\,\mathrm{cm/s^2} \tag{4.2}$$



Slika 10 - Postavka za određivanje momenata oko x osi

Tablica 2 - vrijeme potrebno kvadru za 10 oscilacija

	x	*y*	*z*
Mjerenje	Vrijeme (s)		
1	19,421	19,322	19,222
2	19,312	18,938	19,212
3	19,182	18,971	19,289
4	19,461	19,215	19,327
5	19,122	19,105	19,095
6	19,492	19,223	19,123
7	19,226	19,208	19,226
8	19,449	19,167	19,354
9	19,056	18,989	19,225
10	19,563	19,212	19,137
Prosjek	**19,328**	**19,135**	**19,221**



Slika 11 - Postavka za određivanje momenata oko y osi



Slika 12 - Postavka za određivanje momenata oko z osi

Tablica 3 - vrijeme potrebno za 10 oscilacija oko osi

	x	*y*	*Z*
Mjerenje	Vrijeme (s)		
1	11,60	14,03	11,71
2	11,64	13,51	11,39
3	11,86	13,47	11,41
4	11,86	13,42	11,42
5	11,70	13,89	11,44
6	11,73	13,94	11,54
7	11,73	13,62	11,53
8	12,03	13,55	11,59
9	12,04	13,62	11,58
10	11,72	14,02	11,64
Prosjek	**11,79**	**13,71**	**11,54**

Tablica 4 - mjerenja njihala po osima

Os	*m* (g)	*h* (cm)	*D* (cm)	*T*, njihanja (s)	*T*, rotacije oko osi (s)	*w* (rad/s)
x	292	91	8,8	1,9328	1,1791	3,2508
y	292	91	12,3	1,9135	1,3707	3,2836
z	292	91	12,3	1,9221	1,1535	3,2689

Tablica 5 - Usporedba poznatih vrijednosti gravitacijskog ubrzanja i izračunatog gravitacijskog ubrzanja

Os	Eksperimentalno (cm/s^2)	Poznato (cm/s^2)	Odstupanje
x	961,673	981	2,01%
y	981,17	981	0,017%
z	972,409	981	0,883%

Momente inercije može se odrediti mjerenjem perioda vremena potrebnog bloku da se rotira oko svoje osi umjesto da ga se ljulja kao u prethodnom mjerenju. Nakon izmjerenog perioda, uvrštava se u sljedeću jednadžbu:

$$I_y = \frac{mgD^2T^2}{16\pi^2 h} = \frac{292 \cdot 981 \cdot 12{,}3^2 \cdot 1{,}3707^2}{16\pi^2 \cdot 91} = 5666{,}12 \approx 5565{,}76\ \mathrm{gcm}^2 \qquad (4.3)$$

Tablica 6 - Usporedba analitičkih i eksperimentalnih rezultata momenata tromosti

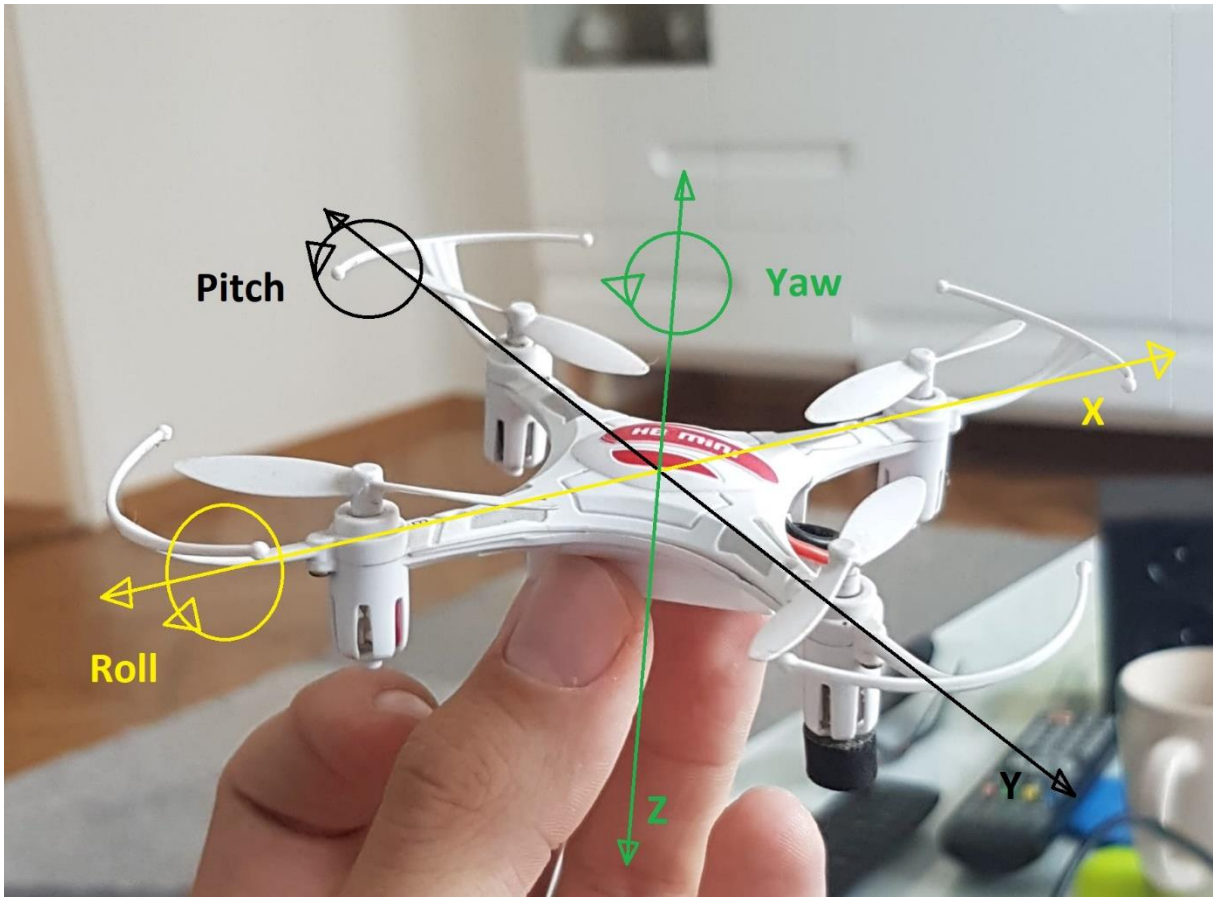
Os	Eksperimentalno (gcm^2)	Analitičko (gcm^2)	Odstupanje
x	2146,15	2217,51	3,33%
y	5666,17	5565,76	1,77%
z	4012,73	4014,51	0,044%

Rezultati eksperimentalno određenih momenata tromosti drvenog bloka su vrlo točni kao što je prikazano u tablici 4. Odstupanja između eksperimentalnih i analitičkih vrijednosti za I_x, I_y i I_z bila su 3,33 %, 1,77 % i 0,044 % .

5. ODREĐIVANJE MOMENATA TROMOSTI BESPILOTNE LETJELICE

5.1. Definiranje koordinatnog sustava letjelice

Da bi letjelica bila efikasna potrebno je s lakoćom moći kontrolirati nagib i orijentaciju u sve tri dimenzije i oko sve 3 osi. Tijekom leta, svaka letjelica će se okretati oko svog centra gravitacije, točke koja je lokacija središta mase letjelice. Kad bi morali definirati jednu točku u kojoj je pohranjena tj. koncentrirana sva masa letjelice, to bi bila ta točka. Kroz tu se točku onda može odrediti 3-dimenzionalni koordinatni sustav kojem je svaka os okomita na druge dvije osi. Orijentacija zrakoplova može se tada odrediti količinom rotacije dijelova zrakoplova duž spomenutih osi.



Slika 13 - Osi rotacije letjelice

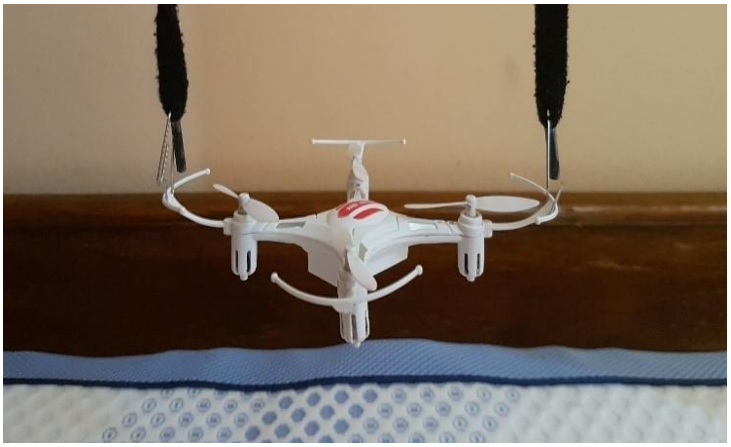
Yaw ili vertikalna os je definirana kao os koja je okomita na ravninu motora tj. rotora i prolazi kroz centar mase. *Yaw* gibanja ili *skretanja* su gibanja u kojima letjelica ostaje u istoj ravnini te se rotira oko spomenute osi u lijevo ili desno. *Pitch* ili poprečna os je os paralelna s ravninom motora i okomita na *Yaw* os te također prolazi središtem mase. *Pitch* gibanja ili *poniranja* su gibanja kojima se kontrolira *stav* tj. nagib letjelice, odnosno kontrolira se podizanje ili spuštanje prednjeg djela letjelice. *Roll* ili longitudinalna os je os okomita na prethodno definirane osi te se gibanja oko te osi očituju kao valjanja, odnosno podizanja i spuštanja bočnih rotora.

5.2. Eksperimentalno određivanje momenata tromosti letjelice

Jednom kompleksnom predmetu kao što je letjelica s 4 rotora nije moguće matematički odrediti momente tromosti oko vlastitih osi. Možda kad bih se letjelica rastavila na dijelove te se onda zasebno računalo za svaki dio te se u konačnici zbrojilo, bi se došlo do nekog točnog rezultata. Puno jednostavnije rješenje je eksperimentalni pristup uz torzijsko njihalo [8].



Slika 14 - Postavka za određivanje momenata oko x osi



Slika 15 - Postavka za određivanje momenata oko z osi



Slika 16 - Postavka za određivanje momenata oko y osi



Slika 17 - Cjelokupna postavka za računanje momenata oko osi z

Tablica 7 - Vrijeme potrebno letjelici za 10 oscilacija u postavci njihala

	Yaw	Roll	Pitch
Mjerenje	Vrijeme (s)		
1	18,77	19,01	18,65
2	18,42	19,02	18,59
3	18,65	18,54	18,76
4	18,77	18,65	18,89
5	18,46	18,36	18,87
6	18,43	18,65	18,65
7	18,41	18,81	18,55
8	18,44	18,75	18,44
9	18,54	18,92	18,49
10	18,32	18,79	18,46
Prosjek	**18,521**	**18,75**	**18,635**

Tablica 8 - Vrijeme potrebno za 10 oscilacija rotiranja oko osi

	Yaw	*Roll*	*Pitch*
Mjerenje	Vrijeme (s)		
1	12,83	12,21	12,3
2	13,01	12,17	12,18
3	12,97	12,22	12,28
4	12,91	12,12	12,1
5	13,04	12,12	12,18
6	13,04	12,17	12,07
7	13,02	12,13	12,11
8	12,89	12,21	12,14
9	12,92	12,29	12,25
10	13,07	12,2	12,28
Prosjek	**12,19**	**12,18**	**12,97**

Tablica 9 - Mjerenja njihanja letjelice po osima

Os	*m* (g)	*h* (cm)	*D* (cm)	*T*, njihanja (s)	*T*, rotacije oko osi (s)	*w* (rad/s)
x	16	85	8	1,875	1,2184	3,351
y	16	85	8	1,8635	1,2189	3,3717
z	16	85	12	1,8521	1,297	3,3925

Sada kad je potvrđena eksperimentalna metoda korištena u ovom eksperimentu za određivanje momenata tromosti nekoga objekta, mogu se odrediti traženi momenti tromosti bespilotne letjelice. Slično kao u provjeri za drveni kvadar, prije svega se mora gravitacijsko ubrzanje potvrditi kako bi se osigurala vjerodostojna konfiguracija:

$$g_{roll} = \omega^2 h = \frac{4\pi^2 h}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 85}{1{,}875^2} = 954\,\mathrm{cm/s^2} \approx 981\,\mathrm{cm/s^2} \tag{5.1}$$

Tablica 10 - Usporedba poznatih vrijednosti gravitacijskog ubrzanja i izračunatog gravitacijskog ubrzanja

Os	Eksperimentalno (cm/s^2)	Poznato (cm/s^2)	Odstupanje
x	954,501	981	2,776%
y	966,318	981	1,519%
z	978,25	981	0,281%

Nakon toga, kao što je navedeno u prethodnom odjeljku, moment tromosti oko vlastite osi se može računati sljedećom jednadžbom:

$$I_{roll} = \frac{mgD^2T^2}{16\pi^2 h} = \frac{16 \cdot 981 \cdot 8^2 \cdot 1{,}2184^2}{16\pi^2 \cdot 85} = 111{,}099\,\mathrm{gcm^2} \tag{5.2}$$

Preostali rezultati testiranja gravitacijskog ubrzanja i proračuni momenata tromosti za bespilotnu letjelicu mogu se pronaći u tablicama 6. i 7. Ti isti rezultati su potvrđeni prijašnjim eksperimentom s drvenim kvadrom koji se pokazao izuzetno točnim.

Tablica 11 - Eksperimentalno određeni momenti

	Eksperimentalno određeni momenti (gcm^2)
Yaw	283,265
Roll	111,099
Pitch	111,19

6. ZAKLJUČAK

Za vozila koja se kreću samo translacijski, najbitniju ulogu kod tromosti čini isključivo masa. Za vozila kao što su zrakoplovi i letjelice, odnosno vozila koja se uz translacijska gibanja kreću i rotiranjem, ključnu ulogu čine momenti tromosti oko osi rotacija. Zbog potreba skretanja, upravljanja i manevriranja zrakoplova, pa tako i letjelica potrebno je proračunati momente tromosti. Kod geometrijski pravilnih predmeta do tih se rezultata može doći analitički, međutim za složenije predmete učinkovitiji pristup je eksperimentalni. Zbog vrlo male devijacije poznate vrijednosti gravitacijskog ubrzanja i gravitacijskog ubrzanja određenog mjerenjem perioda drvenog kvadra, te malog odstupanja analitički određenih momenata tromosti i eksperimentalno određenih momenata tromosti drvenog kvadra, daljnji rezultati dobiveni za letjelicu mogu se smatrati dostatnima. Odstupanja eksperimentalno utvrđenih i poznatih vrijednosti gravitacijskog ubrzanja variraju od 0,017 % do 2,776 % za drveni kvadar i letjelicu, a odstupanja između eksperimentalno određenih momenata inercije za kvadar kreću se od 0,044 % do 3,33 %. Najvjerojatniji uzrok pogrešaka bio je ljudska pogreška pri mjerenju perioda. Da bi se pogreška umanjila što više, provedeno je 10 ispitivanja po 10 oscilacija te se onda uzimao prosjek. Mjerenja perioda mogu se vidjeti u tablicama 2, 3, 7. i 8. Zbog simetrične konstrukcije i raspodjele mase letjelice, dobiveni rezultati momenata tromosti oko longitudinalne i paralelne osi su identični, dok su najveće vrijednosti rezultata dobivene za rotaciju oko vertikalne (*yaw*) osi. Mjerenja izvršena u okviru završnog rada prikazuju kako se moment tromosti može jednostavno odrediti eksperimentalno kako za bespilotnu letjelicu, tako i za bilo koji predmet nepravilnog oblika.

LITERATURA

[1] J. Jurum-Kipke, H. Wolf i O. Muftić, MEHANIKA U PROMETU, Zagreb: FAKULTET PROMETNIH ZNANOSTI SVEUČILIŠTA U ZAGREBU, 2009.

[2] D. Fujs, »ANALIZA JEDNADŽBE GIBANJA ZRAKOPLOVA ZA RAZLIČITE REŽIME LETA,« Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 2015.

[3] Wikipedia, »Moment inercije,« 3 Kolovoz 2016.

[4] C. Reyes, »RCadvisor,« Ožujak 2012. [Mrežno]. Dostupno: http://rcadvisor.com/airplane-moments-inertia. [Pokušaj pristupa 23 kolovoz 2018].

[5] M. Koken, *The Experimental Determination of the Moment of Inertia of a Model Airplane,* Honors Research Projects, 2017.

[6] W. Gracey, »The experimental determination of the moments of inertia of airplanes by a simplified compound-pendulum method,« Langley Memorial Aerunautical Laboratory, Washington, 1948.

[7] H. G. S. M. A. M. C. B. S.-S. B. Y. Minami Koyama, »EXPERIMENTAL DETERMINATION OF AN IRREGULAR OBJECT'S MOMENT OF INERTIA,« Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería , Mexico, 2010.

POPIS SLIKA

Slika 1 - Rotacija čestice oko nepomične osi AA' [1] 2
Slika 2 - Rotacija krutog tijela oko nepomične osi AA' [1] 3
Slika 3 - Momenti tromosti prema osima pravokutnoga koordinatnog sustava [1] 4
Slika 4 - Rotacija tijela oko nepomične osi z 6
Slika 5 - Neki od tipova izrade krila 8
Slika 6 - 6 stupnjeva slobode 9
Slika 7 - Prikaz bifilarnog torzijskog njihala 11
Slika 8 - Konfiguracija njihala 13
Slika 9 - Osi i varijable kvadra 15
Slika 10 - Postavka za određivanje momenata oko x osi 16
Slika 11 - Postavka za određivanje momenata oko y osi 17
Slika 12 - Postavka za određivanje momenata oko z osi 17
Slika 13 - Osi rotacije letjelice 20
Slika 14 - Postavka za određivanje momenata oko x osi 21
Slika 15 - Postavka za određivanje momenata oko z osi 21
Slika 16 - Postavka za određivanje momenata oko y osi 22
Slika 17 - Cjelokupna postavka za računanje momenata oko osi z 22

POPIS TABLICA

Tablica 1 - Karakteristike drevnoga kvadra 15
Tablica 2 - vrijeme potrebno kvadru za 10 oscilacija 16
Tablica 3 - vrijeme potrebno za 10 oscilacija oko osi.....18
Tablica 4 - mjerenja njihala po osima 18
Tablica 5 - Usporedba poznatih vrijednosti gravitacijskog ubrzanja i izračunatog gravitacijskog ubrzanja.....18
Tablica 6 - Usporedba analitičkih i eksperimentalnih rezultata momenata tromosti 19
Tablica 7 - Vrijeme potrebno letjelici za 10 oscilacija u postavci njihala 23
Tablica 8 - Vrijeme potrebno za 10 oscilacija rotiranja oko osi 23
Tablica 9 - Mjerenja njihanja letjelice po osima 24
Tablica 10 - Usporedba poznatih vrijednosti gravitacijskog ubrzanja i izračunatog gravitacijskog ubrzanja.....24
Tablica 11 - eksperimentalno određeni momenti 24

POPIS OZNAKA

Latinica

a b c	dužina, visina i širina drvenog kvadra
a_N	normalno ubrzanje
a_T	tangencijalno ubrzanje
D	udaljenost između vezica njihala
f	frekvencija titranja
dF_{LN}	normalna inercijska sila koja djeluje na česticu
dF_{LT}	tangencijalna inercijska sila koja djeluje na česticu
$\vec{F}_1\ \vec{F}_2\ \vec{F}_N$	sile koje djeluju na tijelo
g	akceleracija sile teže
h	duljina vezica njihala
I	moment tromosti
i	polumjer inercije tijela
$I_{xx}\ I_{yy}\ I_{zz}$	ukupni momenti inercije oko pojedinih osi
j	aksijalni moment tromosti tijela
$J_x\ J_y\ J_z$	momenti inercije s obzirom na osi koordinatnog sustava
$\vec{L}$	ukupna kutna količina gibanja zrakoplova
$L_x\ L_y\ L_z$	komponente kutne količine gibanja krutog tijela
Δm	masa čestice
dm	elementarna masa tijela
$\vec{M}$	spreg sila čiji vektor leži na osi rotacije i djeluje na česticu
Δm_i	masa i-te čestice
M_z	zbroj svih momenata oko osi rotacije
r	udaljenost od osi rotacije
T	period oscilacije
dV	elementarni volumen tijela
$\ddot{x}$	pravocrtno ubrzanje

Grčki alfabet

$\vec{\varepsilon}$	kutno ubrzanje
ρ	gustoća tijela
$\vec{\omega}$	kutna brzina čestice
$\ddot{\varphi}$	druga derivacija prijeđenog kuta
$\vec{\Omega}$	vektor ukupne kutne brzine tijela

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet prometnih znanosti
10000 Zagreb
Vukelićeva 4

IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI I SUGLASNOST

Izjavljujem i svojim potpisom potvrđujem kako je ovaj završni rad isključivo rezultat mog vlastitog rada koji se temelji na mojim istraživanjima i oslanja se na objavljenu literaturu što pokazuju korištene bilješke i bibliografija.

Izjavljujem kako nijedan dio rada nije napisan na nedozvoljen način, niti je prepisan iz necitiranog rada, te nijedan dio rada ne krši bilo čija autorska prava.

Izjavljujem također, kako nijedan dio rada nije iskorišten za bilo koji drugi rad u bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili obrazovnoj ustanovi.

Svojim potpisom potvrđujem i dajem suglasnost za javnu objavu završnog rada pod naslovom **Eksperimentalno određivanje momenata tromosti višerotorske bespilotne letjelice**

na internetskim stranicama i repozitoriju Fakulteta prometnih znanosti, Digitalnom akademskom repozitoriju (DAR) pri Nacionalnoj i sveučilišnoj knjižnici u Zagrebu.

U Zagrebu, 12.9.2018

Student/ica:

(potpis)