

# Usporedba zvonolike i eliptične raspodjele uzgona na krilu

---

**Mage, Petar**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2018**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Transport and Traffic Sciences / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:119:933706>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-19**



*Repository / Repozitorij:*

[Faculty of Transport and Traffic Sciences -  
Institutional Repository](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET PROMETNIH ZNANOSTI

Petar Mage

USPOREDBA ZVONOLIKE I ELIPTIČNE RASPODJELE UZGONA NA KRILU

ZAVRŠNI RAD

Zagreb, 2018.

Zagreb, 11. rujna 2018.

Zavod: **Zavod za aeronautiku**  
Predmet: **Teorija leta I**

## ZAVRŠNI ZADATAK br. 4781

Pristupnik: **Petar Mage (0135240549)**  
Studij: **Aeronautika**  
Smjer: **Pilot**  
Usmjerenje: **Civilni pilot**

Zadatak: **Usporedba zvonolike i eliptične raspodjele uzgona na krilu**

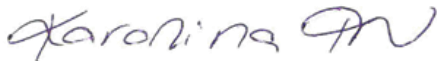
Opis zadatka:

U radu je potrebno dati povijesni razvoj izračuna raspodjele uzgona na krilu kao i vezu između geometrije krila i raspodjele uzgona. Nadalje, potrebno je objasniti i usporediti eliptičnu i zvonoliku raspodjelu uzgona, te utjecaj raspodjele uzgona na inducirani otpora zrakoplova. Analizu je potrebno provesti u programu XFLR5.

Zadatak uručen pristupniku: 24. travnja 2018.

Rok za predaju rada: 11. rujna 2018.

Mentor:



---

dr. sc. Karolina Krajček Nikolić

Predsjednik povjerenstva za  
završni ispit:

---

Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet Prometnih Znanosti

ZAVRŠNI RAD

USPOREDBA ZVONOLIKE I ELIPTIČNE RASPODJELE UZGONA NA KRILU

COMPARISON OF BELL-SHAPED AND ELLIPTICAL LIFT DISTRIBUTION  
ALONG THE WING

Mentor: dr. sc. Karolina Krajček Nikolić

Student: Petar Mage

JMBAG: 0135240549

Zagreb, rujan 2018.

## Sažetak

Rad obrađuje temu raspodjele uzgona na krilu uspoređujući dva oblika distribucije uzgona, zvonoliki i eliptični. Cilj je analizirati i usporediti zvonoliku i eliptičnu raspodjelu uzgona na krilima zrakoplova kroz njihove specifičnosti i utjecaj na inducirani otpor letjelice te navedenu analizu i rezultate prikazati kroz XFLR5 program. Razlozi zbog kojih zvonolika raspodjela još nije zaživjela u komercijalnom zrakoplovstvu te njene prednosti i mane također su iznijeti kao dio rada.

Rad se također dotiče povijesnog razvoja izračuna raspodjele uzgona kao i geometrije krila općenito, što je neizbježno za shvaćanje principa stvaranja i formiranja uzgona kao glavne sile koja održava zrakoplov u zraku.

**KLJUČNE RIJEČI:** raspodjela uzgona, geometrija krila, eliptična raspodjela uzgona, zvonolika raspodjela uzgona, inducirani otpor zrakoplova.

## Summary

This paper elaborates the lift distribution along the wing of an aircraft by comparing two types of lift distribution, bell-shaped and elliptical. The aim of the paper is to analyse and compare these two types of lift distribution through their specifics and influence on the induced drag of an aircraft, as well as to review the results and analysis of the work through XFLR5 computer program. Reasons for not implying the bell-shaped spanload in commercial aviation today are also a part of the paper, along with its relevant positive and negative characteristics.

The work as well covered the historical development of calculating the lift distribution along the wing and wing geometry in general, as it is inevitable for one to understand the whole idea and principles that stand behind the lift force of an aircraft, its forming and distribution.

**KEY WORDS:** lift distribution, wing geometry, elliptical lift distribution, bell-shaped lift distribution, induced drag of an aircraft.

## Sadržaj

1. Uvod.....	1
2. Povijesni razvoj izračuna raspodjele uzgona.....	2
3. Geometrija krila i raspodjela uzgona .....	7
3.1 Geometrija krila.....	7
3.2 Raspodjela uzgona .....	10
4. Eliptična raspodjela uzgona.....	14
5. Zvonolika raspodjela uzgona .....	17
6. Utjecaj raspodjele uzgona na inducirani otpor zrakoplova.....	22
7. Analiza u XFLR5 programu .....	24
8. Zvonolika raspodjela uzgona u praksi.....	28
9. Zaključak.....	30
Literatura .....	31
Popis slika.....	32
Popis tablica .....	33

## 1. Uvod

Zbog karakterističnog oblika aeroprofila to jest krila, aerodinamička sila stvara se na osnovu razlike tlakova s gornje i donje strane krila koja gura zrakoplov u smjeru manjeg tlaka zraka. Ukupna aerodinamička sila je rezultirajuća sila koja djeluje na aerofil ili krilo uslijed njegovog gibanja kroz zrak, a koja će detaljnije biti opisana u idućim poglavljima rada zajedno s geometrijom krila. Uzgon je tako komponenta ukupne aerodinamičke sile koja je okomita na pravac neporemećenog strujanja i koja održava zrakoplov u zraku. U jednoliko pravocrtnom letu zrakoplova sila uzgona uravnotežuje njegovu težinu [1].

Raspodjela uzgona duž krila je način na koji se ukupna sila uzgona manifestira preko površine krila duž njegovog raspona. Ona se očituje kroz niz vektora manjih uzgona koji integrirani čine ukupan uzgon na krilu. Svaki navedeni „manji“ uzgon naziva se lokalni uzgon koje promatrana sekcija krila proizvodi svojom geometrijom u kombinaciji sa opstrujavanjem zraka oko nje. Spajanjem vrhova vektora svih lokalnih uzgona duž raspona dobije se oblik raspodjele uzgona poviše promatranog krila.

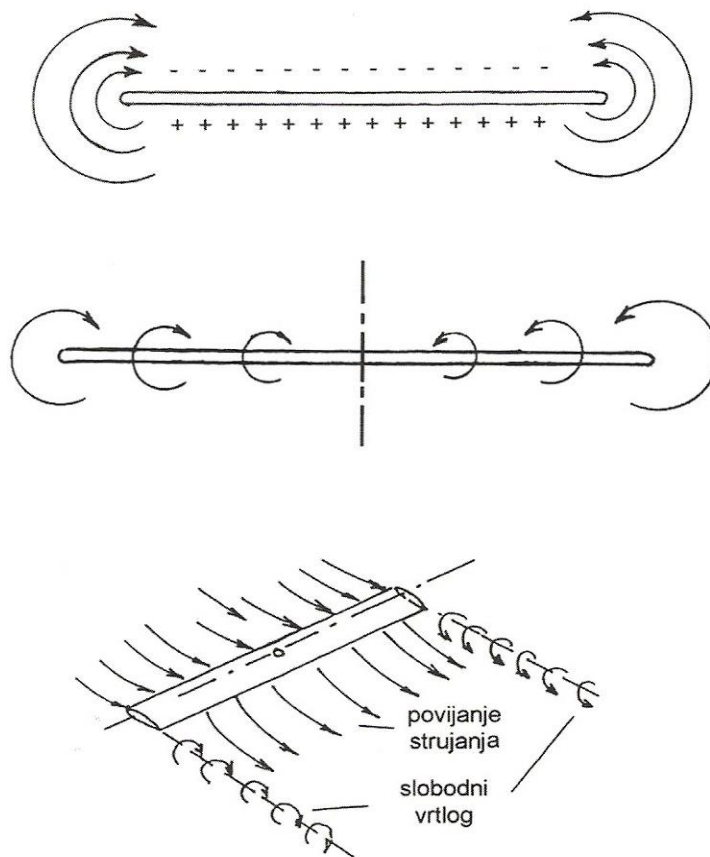
Raspodjela uzgona bitna je pretpostavka pri dizajniranju zrakoplova to jest njegovih uzgonskih površina. Pomoću nje se mogu odrediti aerodinamičke karakteristike zrakoplova u letu, njegove prednosti i mane te predvidjeti ponašanje letjelice u određenim uvjetima leta.

Daljnji rad će proći kroz povijesni razvoj izračuna raspodjele uzgona, razradu i primjenu konkretnih oblika distribucije uzgona s njihovim prednostima i manama te se dotaći budućnosti nekih rješenja.



## 2. Povijesni razvoj izračuna raspodjele uzgona

Prvi cjelovit opis uzgona i otpora pojavio se već na samom početku dvadesetog stoljeća, 1906. godine u knjizi *Zračni Let, dio prvi: Aerodinamika* čiji je autor britanski inženjer Frederick William Lanchester. Lanchester je u radu razvio model vrtložnog strujanja koje se javlja na stražnjem kraju krila tijekom leta i razvija se iza njega, koji je također sadržavao opis uzgona i otpora krila. Efekt tih vrtloga očitovao se kao odmicanje rezultantne aerodinamičke sile na takav način da se jedna njezina komponenta stvara u pravcu otpora, što je danas poznato kao inducirani otpor zbog prisutnosti trodimenzionalnog strujanja. Na slici 1 prikazano je formiranje vrtloga kao posljedica prestrujavanja zraka s donjake na gornjaku.



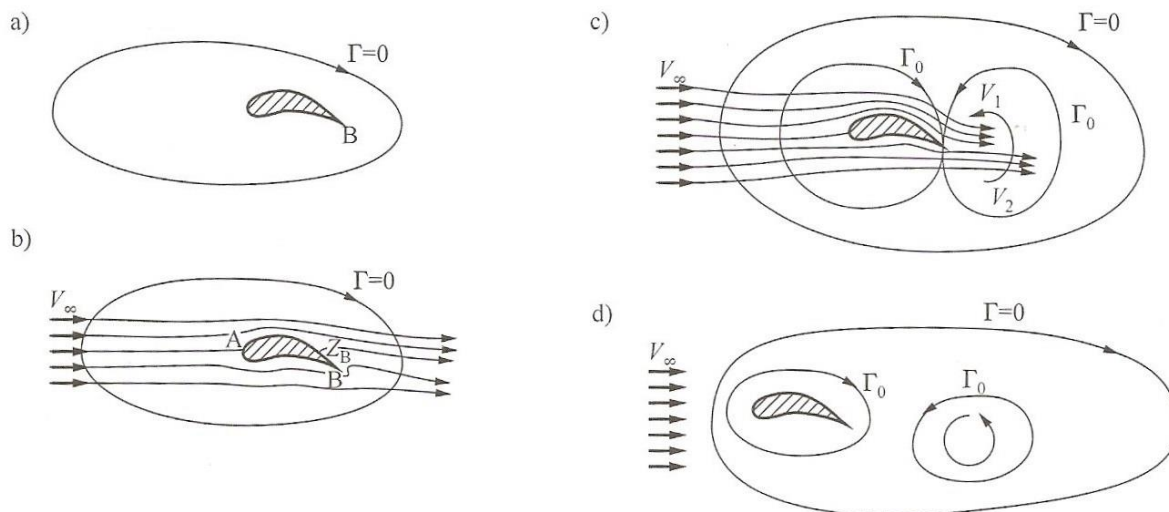
*Slika 1 Prikaz prestrujavanja zraka s donjake na gornjaku s prijeda, otraga i formiranje vrtloga iza krila*

Izvor: Zlatko Rendulić, „Aerodinamika i mehanika leta“, Tuhelj 2006.

Rad nije izazvao velike interese u Velikoj Britaniji tada, ali je zaintrigirao njemačkog inženjera Ludwiga Prandtla koji je matematički potvrdio Lanchesterovu teoriju o vrtloženju zraka po izlasku s krila konačnog raspona. Inspiriran radom britanskog inženjera Prandtl je tijekom 1918. i 1919. godine objavio svoju teoriju, to jest matematički model koji predviđa raspodjelu uzgona duž trodimenzionalnog krila ovisno o njegovoj geometriji. Teorija je poznata kao Prandtlova teorija raspodjele uzgona ili još kao Lanchester-Prandtlova teorija krila, iako su njenom razvoju, u radu skupa s Prandtlom, naknadno doprinjeli i njemački znanstvenici Albert Betz i Max Munk [6].

Promatrajući trodimenzionalno krilo konačnog raspona pokazalo se da razvoj i raspodjela uzgona ne odgovara u potpunosti očekivanjima predviđenim dvodimenzionalnom analizom. Umjesto toga Prandtl je u svojim zapažanjima iznio činjenicu da lokalno formiranje uzgona uvelike ovisi o uzgonu formiranom od susjednih sekcija krila, te da analitički nije tako lako predvidjeti ukupnu raspodjelu i veličinu uzgona kojeg će krilo određene geometrije proizvesti. Prandtl je svoju teoriju temeljio na pretpostavci da, iako je strujanje zraka oko krila trodimenzionalno ono se može aproksimirati linearnim zbrojem stujanja oko svakog pojedinog aeroprofila krila. U konačnici je takva dvodimenzionalna aproksimacija strujanja ipak dala zadovoljavajuće rezultate uzevši u obzir i stvaranje vrtloga na stražnjim krajevima krila prilikom izračuna.

Teorija također primjenjuje koncept nastajanja cirkulacije oko aeroprofila kao i teorem Kutta i Jukowskog, tako da se umjesto raspodjele uzgona promatra raspodjela cirkulacije duž raspona krila sastavljenog od više aeroprofila. Takav pristup izračunu lokalnog uzgona na krilu, razmatranjem cirkulacije oko aeroprofila, omogućuje da se u obzir uzmu prethodno spomenuti utjecaji susjednih sekcija krila. Shodno tome, svaka promjena uzgona duž raspona krila jednaka je promjeni cirkulacije [2].



a) stanje mirovanja b) početak strujanja c) formira se startni vrtlog d) otkida se startni vrtlog

Slika 2 Nastajanje cirkulacije oko aeroprofila

Izvor: Petar Kesić, „Osnove aerodinamike“, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2003.

Sa slike 2 vidljivo je nastajanje cirkulacije oko aeroprofila, gdje je:

$\Gamma$  - Cirkulacija

$B$  - Izlazni brid aeroprofila

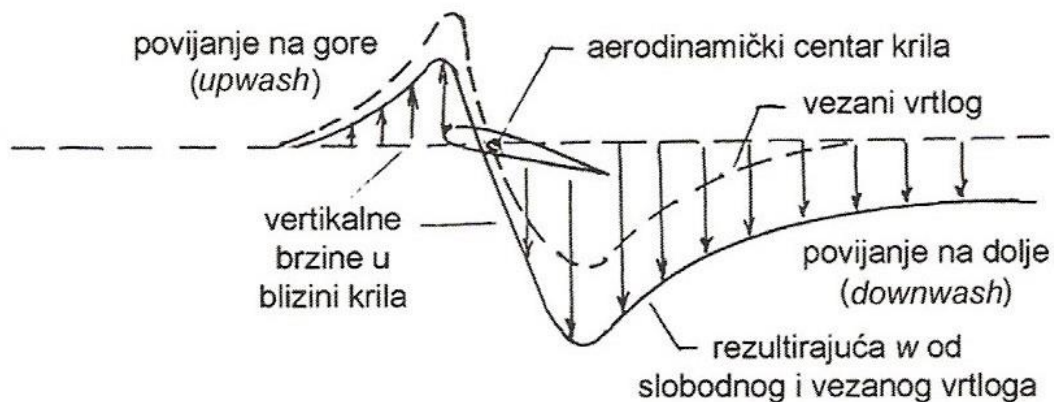
$A$  - Prednja točka zastoja

$V_\infty$  - Beskonačna brzina

$Z_B$  - Stražnja točka zastoja

Ključno je još bilo uočiti inducirano vertikalno strujanje u blizini krila, eng. downwash. Vrtlozi na krajevima krila, nastali prestrujavanjem zraka s donjake na gornjaku usljed razlike tlakova, stvaraju vertikalne komponente brzine u strujnom toku ispred i iza krila. Ti vrtlozi djeluju na povijanje na gore (eng. upwash) ispred krila i povijanje prema dolje (eng. downwash) iza krila, koje postoji i u dvodimenzionalnom strujanju.

U dvodimenzionalnom strujanju navedena pojava naziva se vezani vrtlog jer je on vezan na prisustvo uzgona. Dodavši tome sada komponente slobodnih vrtloga na krajevima krila rezultat je superponiranje vertikalnih brzina u oba smjera kao što je prikazano na slici 3.



*Slika 3 Prikaz vertikalnih brzina oko aeroprofila*

Izvor: Zlatko Rendulić, „Aerodinamika i mehanika leta“, Tuhelj 2006.

Ne znajući za drugi, inženjeri su Prandtlov matematički model skupa s eliptičnom raspodjelom uzgona koristili od njihove prve pojave 1922. godine. Ipak 1933. Prandtl je objavio još jedan, manje poznat rad u kojem je iznio ideju o boljoj raspodjeli uzgona od eliptične, te da svako drugačije rješenje uzrokuje veći otpor. Prandtl je u svom drugom radu zaključio kako je njegova prvotna teza o eliptičnoj raspodjeli kao najefikasnijoj bila nepotpuna, te da ipak postoji raspodjela uzgona duž raspona bolja od eliptične koja će kasnije biti poznata kao zvonolika. Ta raspodjela uzgona prema Prandtlu osiguravala je 11 % manji inducirani otpor s 22 % većim rasponom uz korištenje iste količine materijala za izradu i jednako opterećenje krila u korijenu [3].

1933. godine u Njemačkoj, braća Reimar i Walter Horten potaknuta rekreativnim jedrenjem uz pomoć Prandtlovih radova započinju s izradom jedrilica. Godinu dana kasnije, 1934. Reimar Horten prvi put iznosi termin zvonolika raspodjela uzgona koju koristi za izradu svojih karakterističnih letjelica u obliku letećeg krila. Kao konstrukcijsko rješenje za postizanje takvog oblika uzgona braća Horten uvijali su krila svojim letjelicama, te su u idućih 20 godina uspješno proizveli brojna leteća krila koja su postala temelj za takve zrakoplove u budućnosti. Najpoznatiji njihov projekt je zrakoplov *Horten Ho 229*, prvo leteće krilo pokretano mlaznim motorima.

U potrazi za smanjenjem induciranog otpora, 1950. godine američki inženjer Robert T. Jones koji tada nije bio upoznat sa radom Ludwiga Prandtla, dolazi do rješenja koje smanjuje inducirani otpor za 15 % uz povećanje raspona za 15 %. Pri tome ukupan uzgon i opterećenje krila u korijenu

ostaju jednaki kao kod eliptične raspodjele. Raspodjela uzgona koju je Jones iskoristio za njegov rad bila je zvonolika. Njegovo postignuće naposljetku nije zaživilo u praksi zbog nepraktičnosti kod postizanja takvog uzgona koristeći se samo izmjenama tlocrta krila.

Iduće veće istraživanje koje je dovelo do zvonolike raspodjele uzgona kao rješenja bilo je 1975. godine. Tada su njemački inženjer Armin Klein i njegov američki suradnik, Sathy Viswanathan u potrazi za smanjenjem opterećenja krila u korijenu još jednom potvrdili tezu o prednostima zvonolike raspodjele uzgona. Ovaj put razlog je bio smicanje vjetra koje naglo povećava opterećenje na zrakoplov pa tako i na krila. Uz očuvanje jednakog opterećenja u korijenu primijetili su smanjenje induciranog otpora.

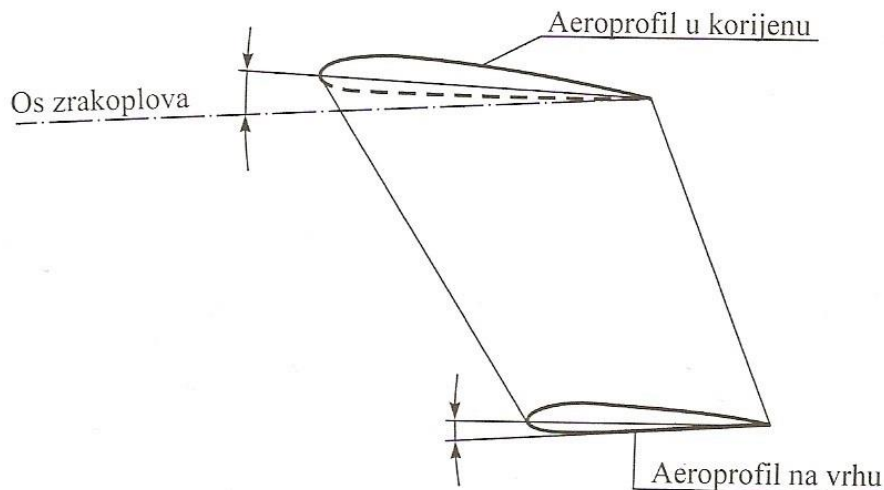
Posljednji u nizu bio je projekt raspodjele uzgona na krilima s minimalnim induciranom otporom primijenjen na zrakoplove i ptice kojeg je provela NASA 2016. godine [3]. Projekt se temeljio na Prandtlovoj zvonolikoj raspodjeli uzgona kao modelu po kojem ptice generiraju uzgon u letu. Zvonolikom raspodjelom uzgona američki su znanstvenici djelomice dokazali kako ptice lete i izvode zaokrete bez vertikalnog stabilizatora, zašto lete u formaciji s preklopljenim vrhovima krila te zašto suženi vrhovi krila ne uzrokuju lokalni slom uzgona.

### 3. Geometrija krila i raspodjela uzgona

Iako se neki njegovi djelovi koriste kao upravljačke površine, a unutarnji prostor kao spremnici za gorivo ili balast, krilo je osnovna uzgonska površina zrakoplova. Geometrija krila je glavni čimbenik oblikovanja uzgona i otpora zrakoplova, o njoj ovise raspored i vrijednosti lokalnog uzgona i otpora duž raspona.

#### 3.1 Geometrija krila

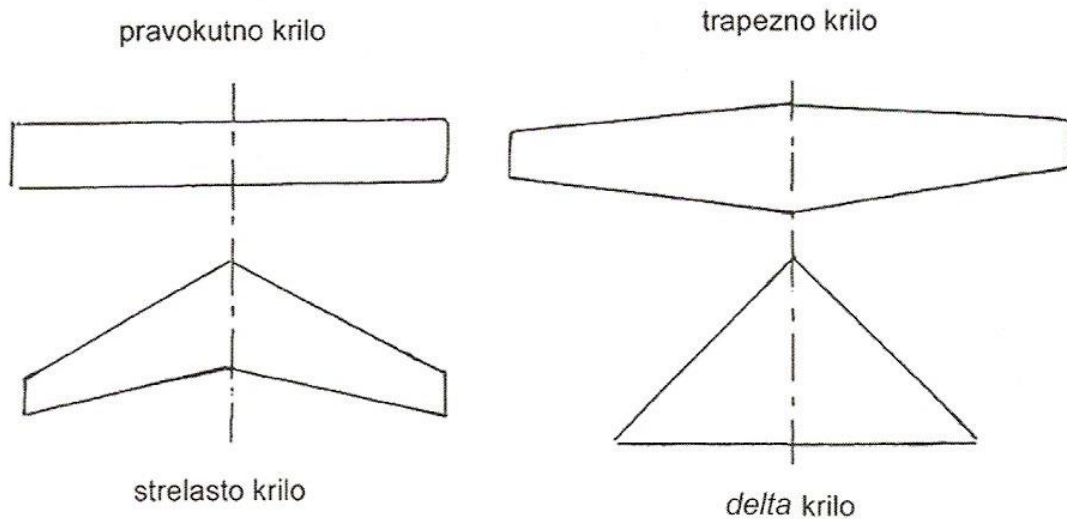
Krila se dobiju jednostavno nizanjem aeroprofila jedan do drugog koji mogu biti isti ili promjenjivi duž raspona. Osim njihovog oblika, od korijena prema vrhu krila se također može mijenjati i položaj aeroprofila. Za takva krila, kojima tetive svih aeroprofila ne leže u istoj ravnini kaže se da su geometrijski vitoperena, jedno takvo krilo prikazano je na slici 4.



*Slika 4 Geometrijski vitopereno krilo*

Izvor: Petar Kesić, „Osnove aerodinamike“, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2003.

Osim različitih aeroprofila, krila mogu biti i različitih tlocrtnih oblika. Pod oblikom krila podrazumijeva se oblik projekcije krila na ravninu okomitu na ravninu simetrije, a koja je paralelna s tetivom aeroprofila u ravnini simetričnosti [1]. Postoji mnogo raznih oblika krila, ali su najčešći oblici pravokutni, trapezni, strelasti i delta oblik. Svi oni naravno imaju svoj specifičan utjecaj na formiranje uzgona i performanse zrakoplova. Neki od tih oblika prilazani su na slici 5.



Slika 5 Najčešći oblici krila

Izvor: Zlatko Rendulić, „Aerodinamika i mehanika leta“, Tuhelj 2006.

Osnovne geometrijske karakteristike krila su: raspon, površina, suženje krila, srednja geometrijska tetiva, srednja aerodinamička tetiva, aspektni odnos, kut strijele, kut dijedra i vitoperenje krila.

Raspon krila je udaljenost između dva vrha krila, a označava se sa  $b$ ,  $b=2s$ , gdje je  $s$  poluraspon.

Površina krila  $S$  je površina tlocrtna projekcije krila. U nju najčešće spada i površina zamišljenog segmenta površine koji se dobije produljenjem bridova krila od korijena do osi simetrije zrakoplova.

Suženje krila  $\lambda$  definirano je kao odnos tetiva aeroprofila na vrhu  $c(v)$  i u korijenu  $c(0)$ ,  $\lambda = c(v)/c(0)$ .

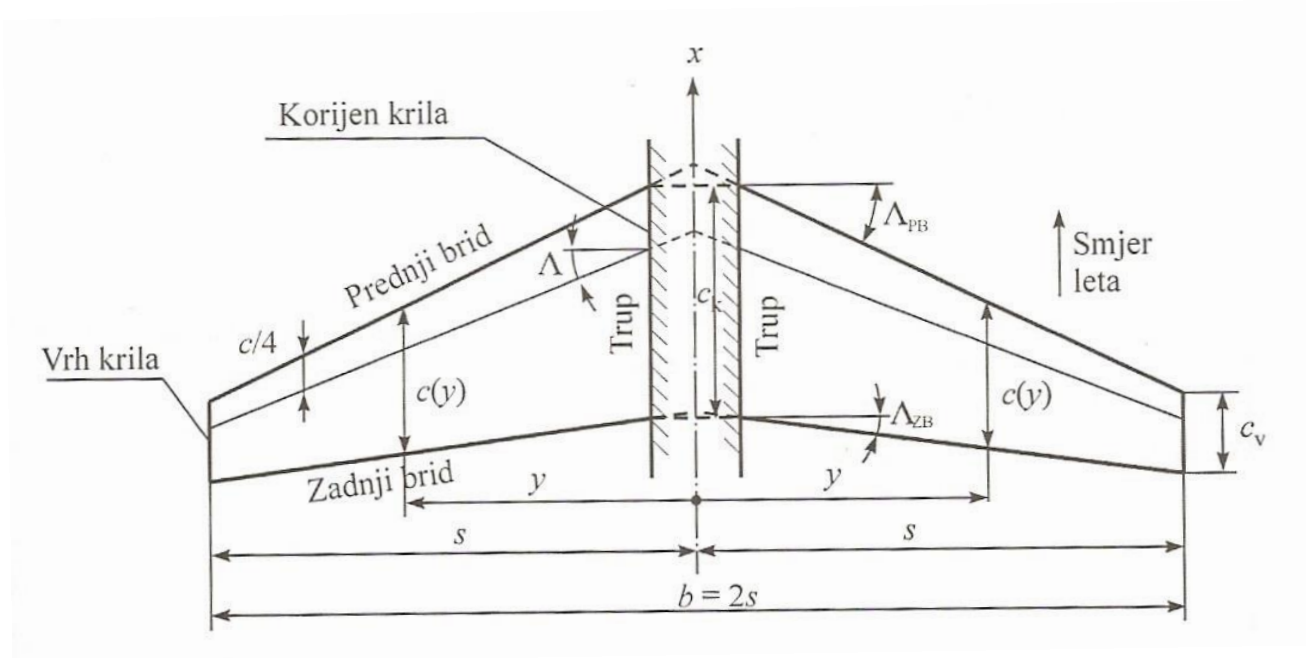
Srednja geometrijska tetiva je ona koja se dobije kao srednja vrijednost dužine tetiva svih aeroprofila duž krila. Označava se s  $c_g$  ili kao  $SGT$ .

Srednja aerodinamička tetiva  $c_a$  ili  $SAT$  je tetiva fiktivnog krila s uniformnom duljinom tetive koja ima iste aerodinamičke karakteristike kao i stvarno krilo.

Aspektni odnos ili vitkost krila označava se kao  $AR$ , a definira se kao odnos kvadrata raspona s površinom krila bilo kojeg oblika:  $AR = b^2/S$ . Ovaj parametar je važan za određivanje sile otpora kod krila konačnog raspona. Što je aspektni odnos veći, to jest što je krilo vitkije, to je zrakoplov aerodinamički efikasniji jer s povećanjem vitkosti raste i omjer uzgona s otporom zrakoplova što smanjuje potrošnju goriva i povećava dolet.

Kut strijele  $\Lambda$  jest kut kojeg čine odgovarajući bridovi krila (prednji ili stražnji) s ravninom koja je okomita s pravcem leta. Kut strijele se definira u odnosu na zamišljeni pravac koji povezuje sve točke udaljene za  $c/4$  od prednjeg brida krila i ravnine koja je okomita na pravac leta [2].

Kut dijedra je kut što ga krilo zatvara s horizontalnom ravninom. Ako pri tom kutu krila formiraju „V“ oblik radi se o pozitivnom kutu dijedra, u suprotnom slučaju riječ je o negativnom kutu dijedra. Osnovne geometrijske karakteristike prikazane su na slici 6.



Slika 6 Osnovne geometrijske značajke krila

Izvor: Petar Kesić, „Osnove aerodinamike“, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2003.



### 3.2 Raspodjela uzgona

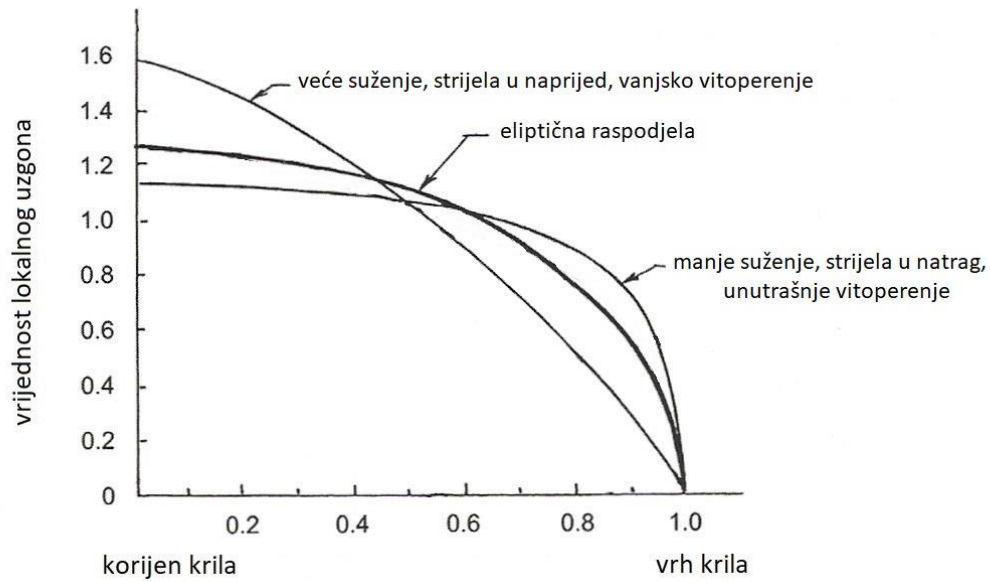
Geometrija krila ima velik utjecaj na raspodjelu uzgona duž raspona krila. Od prethodno navedenih geometrijskih karakteristika, kada je riječ o formiranju određenog oblika raspodjele uzgona duž krila, veći utjecaj nad ostalima imaju suženje krila, kut strijele i vitoperenje krila.

Manjim suženjem krila, tetive na vrhu će se manje kratiti pa će gubitak lokanog uzgona na vrhovima krila biti manji. Drugim riječima, pad uzgona od korijena krila prema vrhu će nastupiti pri većim napadnim kutevima.

Kut strijele također ima utjecaj na oblik raspodjele uzgona iako se na prvi pogled ne doima tako. O kutu strijele krila ovisi vertikalno strujanje brzina na dolje, prethodno spomenuto kao povijanje prema dolje (eng. downwash) koje djeluje iza krila. Rezultat ovog efekta je povećanje uzgona na vrhovima krila, a smanjenje uzgona u korijenu krila za strelasta krila sa strijelom unatrag. U slučaju krila sa strijelom prema naprijed rezultat je obrnut; uzgon na vrhovima krila je smanjen, a onaj koji se formira pri korijenu krila je povećan. Ovaj efekt može biti poprilično velik što nije dobro jer povećava strukturalno opterećenje kod slučajeva sa strijelom u natrag [7].

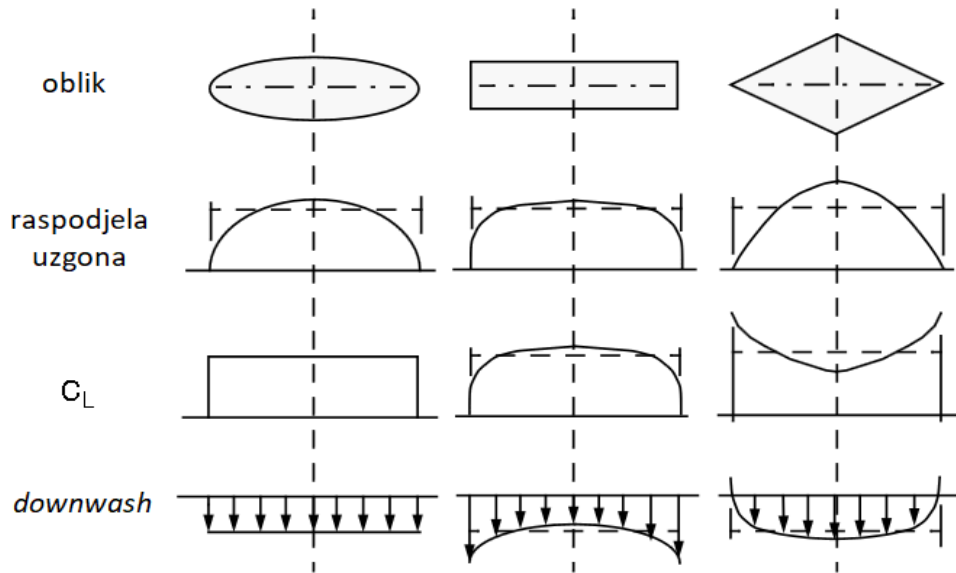
Vanjsko vitoperenje krila je ono kod kojeg je kut između horizontalne ravnine (koja sadrži os zrakoplova) i tetive aeroprofila veći u korijenu nego u vrhu (eng. washout). Krilo s unutarnjim vitoperenjem je ono kod kojeg je kut između tetive aeroprofila i navedene horizontalne ravnine manji u korijenu nego na vrhu krila (eng. wash-in). Vanjsko vitoperenje krila je u praksi zastupljenije zbog poboljšanja letnih karakteristika u prevučenom letu, to jest odgađanja sloma uzgona na vrhovima krila gdje se nalaze upravljačke površine. Kada je riječ o raspodjeli uzgona, krila s vanjskim vitoperenjem imaju kasniji pad uzgona od korijena prema vrhu za razliku od onih s unutarnjim vitoperenjem kod kojih ono nastupa ranije.

Svrha povećanja aspektnog odnosa je da se poveća uzgon pri određenom napadnom kutu krila. Povećanjem aspektnog odnosa rastu svi prethodno navedeni efekti zbog neizbježnog povećanja površine krila. Slike 7 i 8 prikazuju različit utjecaj geometrije krila na raspodjelu uzgona.



Slika 7 Utjecaj pojedinih geometrijskih riješenja krila na oblik raspodjele uzgona

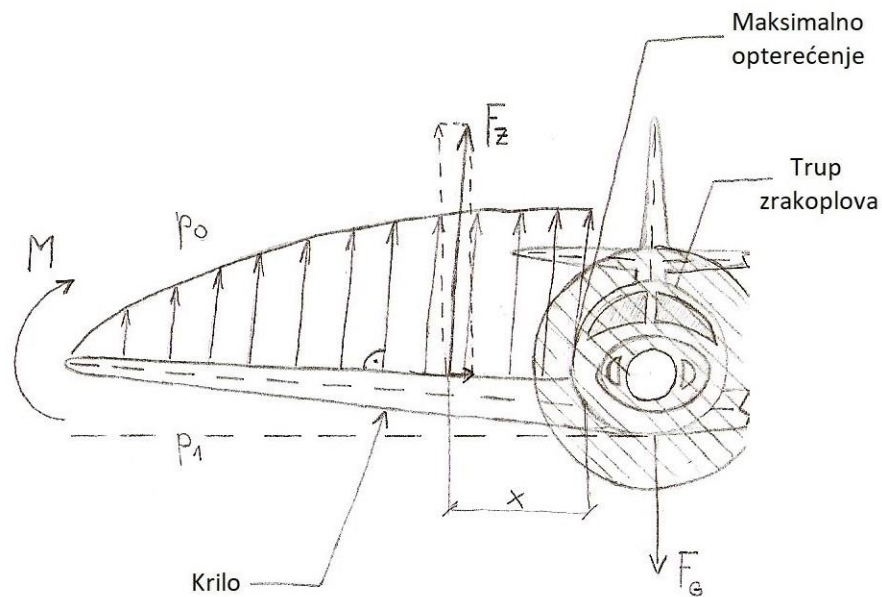
Izvor: Zlatko Rendulić, „Aerodinamika i mehanika leta“, Tuhelj 2006.



Slika 8 Utjecaj oblika krila na raspodjelu uzgona i inducirani otpor

Izvor: rcsoaringdigest.com/OTW/on-the-wing4/162-HCP2.pdf, 2.9.2018.

Još jedna bitna pojava koja se veže uz krilo i stvaranje uzgona jest naprezanje krila zbog savijanja. Sila uzgona koja djeluje okomito na krilo, osim što održava zrakoplov u zraku stvara moment koji savija krilo oko njegovog korijena. To naprezanje na savijanje ima najveći iznos na spoju krila s trupom zrakoplova odnosno u korijenu. Prilikom projektiranja zrakoplova vrlo je bitno znati maksimalno dopušteno opterećenje na savijanje zbog leta u turbulentnoj atmosferi. U takvim uvjetima leta, osim uzgona, dolazi i do vertikalnog smicanja vjetra koji potencira naprezanje krila u korijenu što konstrukcija mora izdržati.



*Slika 9 Naprezanje uslijed savijanja*

Na slici 9 prikazane su sile koje uzrokuju savijanje krila oko njegovog korijena. Rezultantna sila uzgona  $F_z$  posljedica je djelovanja tlaka na površinu krila, u ovom slučaju to je razlika tlakova  $p_1$  i  $p_2$  koji djeluju svaki sa svoje strane krila duž raspona. Što je hvatište sile uzgona dalje od trupa zrakoplova, to jest bliže vrhu krila, to je krak momenta koji savija krilo veći. Rastom kraka sile raste i moment pa tako i naprezanje u korijenu. Za veličine na slici vrijedi:

$$M = F_z \cdot x$$

$$F_z = S \cdot \Delta p$$

$$p_1 > p_2$$

Gdje je:

$M$  – Moment

$x$  - Krak

$F_z$  – Sila uzgona

$S$  – Površina krila

$\Delta p$  – Razlika tlakova s donje i gornje strane krila

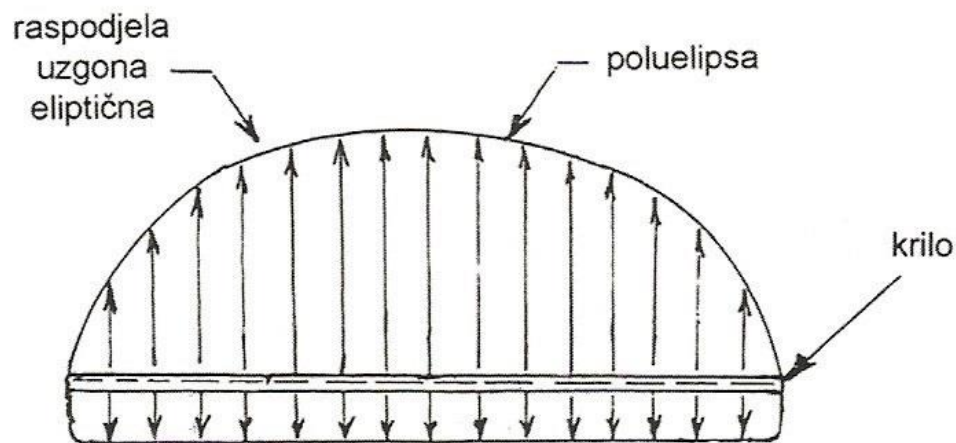
$p_1$  – Tlak zraka na donjaci

$p_0$  – Tlak zraka na gornjaci

Težina zrakoplova označena je kao  $F_G$  koja djeluje kroz njegovo težište okomito na površinu zemlje. Zrakoplov s druge strane trupa uravnotežuje jednak moment induciran na isti način koji djeluje u suprotnom smjeru (suprotno kazaljci na satu).

## 4. Eliptična raspodjela uzgona

Korištenjem Prandtlovog matematičkog modela za izračun uzgona duž raspona krila dobivena je optimalna raspodjela uzgona za određeni raspon uz minimalni inducirani otpor krila. Tu optimalnu raspodjelu uzgona s minimalnim induciranim otporom Prandtl je, prema njenom obliku, nazvao eliptičnom. Od njegove prve objave 1922. godine pa sve do danas, Prandtlov matematički model i eliptična raspodjela se koriste kao standardi pri dizajniranju zrakoplova [3].



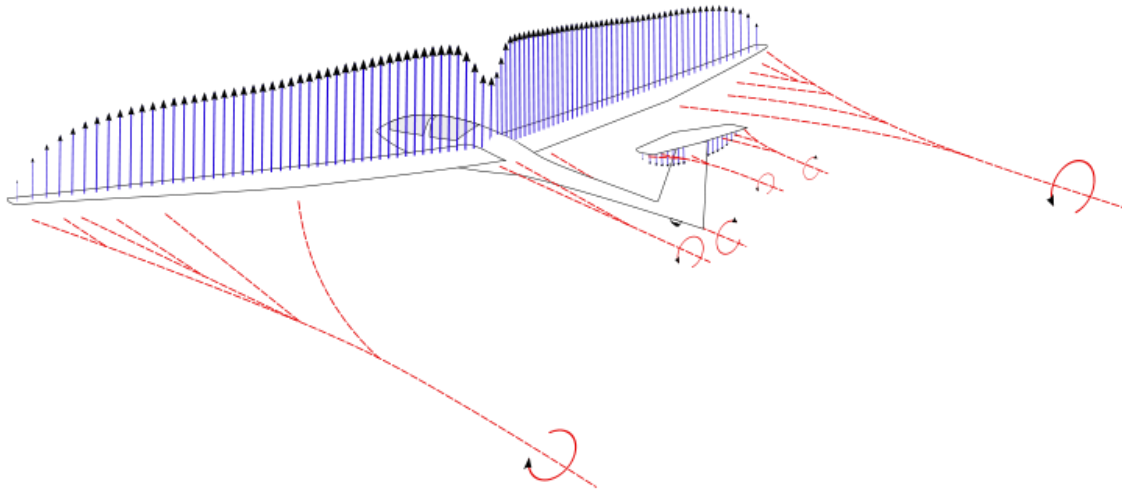
Slika 10 Eliptična raspodjela uzgona

Izvor: Zlatko Rendulić, „Aerodinamika i mehanika leta“, Tuhelj 2006.

Na slici 10 prikazana je eliptična raspodjela uzgona po rasponu krila. Takva raspodjela uzgona očituje se u obliku poluelipse na gornjaci krila, čija je duljina osi jednaka duljini raspona krila. Na donjaci krila jasno se vidi jednolik raspored strujanja na dolje (eng. downwash). Promatrajući lokalne vrijednosti uzgona od vrha krila prema korijenu, s lijeva na desno uzgon raste identično funkciji kvadratnog korijena. Prema tome, maksimalna vrijednost lokalnog uzgona ostvaruje se na polovici osi ili u korijenu krila.

Valja napomenuti kako slika prikazuje krilo bez trupa zrakoplova. Ako bi se uzeo u obzir i trup zrakoplova korijeni krila nebi bili na polovici osi već nešto prije polovice svaki sa svoje strane. Tako bi se i maksimalna vrijednost uzgona postizala na dvije točke, to jest pri svakom od dva

korijena krila između kojih vlada manji uzgon. Takva stvarna raspodjela uzgona prikazana je na slici 11.



*Slika 11 Stvarna raspodjela uzgona uzduž krila uzevši u obzir i trup letjelice*

Izvor: [tangvald.wordpress.com/tag/vortex-induced-drag](http://tangvald.wordpress.com/tag/vortex-induced-drag), 19.8.2018.

Teorija i ispitivanja u aerodinamičkom tunelu također pokazuju kako je strujanje na dolje (eng. downwash) jednoliko ili uniformno raspoređeno po rasponu krila jedino kod nezakrivljenih (planarnih) krila eliptičnog oblika [1]. Jedan takav primjer jest krilo poznatog britanskog lovca *Spitfire*.

Ako se želi dobiti krilo oblika različitog od eliptičnog, s eliptičnom cirkulacijom, potrebno je smanjiti efektivni kut duž raspona, odnosno koristiti vitopereno krilo. Krila eliptičnog oblika osim što prirodno uzrokuju eliptičnu raspodjelu uzgona duž raspona imaju i svojih nedostataka, strukturalno su kompleksnija te ih je teže proizvesti zbog oblikovanja. Rebra koja se nalaze u unutrašnjosti zahtjevaju više žičanih spojeva kako bi se prilagodila okruglom obliku, a to znači manje mjesta u krilu za spremnike goriva. Zbog navedenih konstrukcijskih prepreka ovakav oblik krila se izbjegava kod velikih zrakoplova. Oni pribjegavaju pravokutnim, trapeznim ili strelastim krilima koja su vitoperena kako bi se postigla raspodjela uzgona što bliža eliptičnoj.

Za eliptičnu raspodjelu uzgona vrijedi da je uzgon po jedinici raspona funkcija dužne udaljenosti od korijena krila prema formuli:

$$F = F_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{b/2}\right)^2}$$

Gdje je:

$F$  – lokalna sila uzgona

$F_0$  – sila uzgona u korijenu (maksimalna vrijednost)

$x$  – udaljenost od korijena krila

$b$  – poluraspon krila

Ukupna sila uzgona je površina ispod navedene krivulje čija se vrijednost izračuna pomoću integrala.

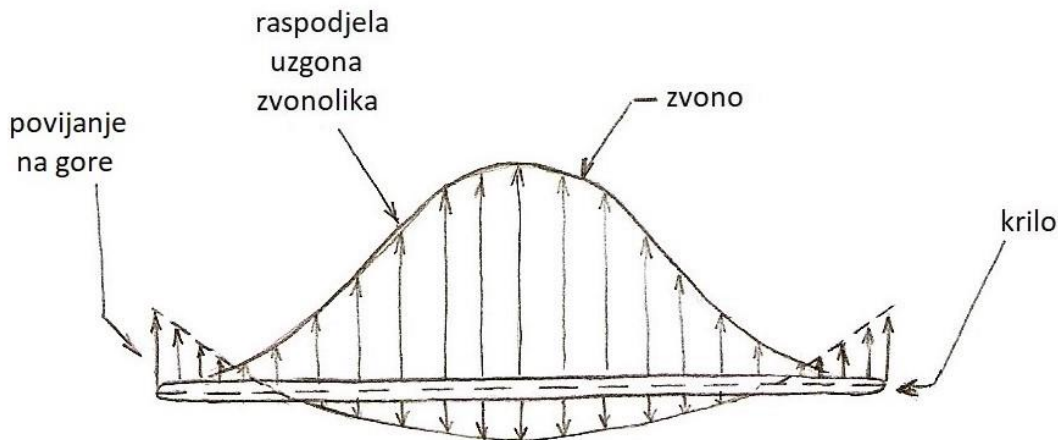
Karakteristike ovakvog oblika distribucije uzgona su da je raspored strujanja na dolje jednolik duž krila, što je i prethodno spomenuto. Inducirani otpor je minimalan, a efektivni napadni kut i lokalni koeficijent uzgona su konstantni duž raspona kao i apsolutni napadni kut te kut strujanja prema dolje. Na vrhovima ovakvih krila dolazi do naglog diskontinuiteta strujanja prema gore i prema dolje što rezultira formiranjem snažnih vrtloga po izlasku struje s vrhova krila. Avioni koji imaju eliptičnu raspodjelu uzgona također podliježu i neželjenom momentu skretanja pri valjanju poznatom kao *adverse yaw*.

*Adverse yaw* je pojava neželjenog skretanja zrakoplova oko njegove vertikalne (normalne) osi koja se javlja kao posljedica povećanja otpora na krilu koje se diže pri valjanju. Kada pilot gurne palicu u lijevo kako bi ostvario lijevo valjanje, krilce na lijevom krilu se podiže, time smanjujući napadni kut na krilu što smanjuje uzgon kojeg to krilo proizvodi te ono pada dolje. S druge strane krilce na desnom krilu spušta se na dolje, povećavajući tako napadni kut tog krila što uzrokuje i povećanje njegovog uzgona pa se to krilo podiže na gore. Kako povećanjem uzgona neizbježno raste i inducirani otpor kao horizontalna komponenta ukupne aerodinamičke sile, tako desno krilo ima veći otpor od lijevog pri lijevom valjanju. Rezultat je skretanje zrakoplova u desno kod lijevog valjanja. Jednaka pojava se odvija pri desnom valjanju samo na suprotnom krilu. Desno valjanje će uzrokovati lijevo skretanje zbog povećanog otpora na vanjskom (lijevom) krilu.

Navedena neželjena skretanja moguće je kompenzirati kormilom smjera pri izvođenju zaokreta kako bi se izbjeglo vanjsko klizanje zrakoplova tako da pilot daje komandu skretanja u onu stranu u koju izvodi valjanje. Takav zaokret je poznat kao koordinirani zaokret. Osim kormila smjera moguće je i konstrukcijski dozvoliti krilcima veći otklon prema gore nego na dolje ili upravljačku površinu izvesti na takav način da prilikom otklona na gore njen napadni brid strši ispod donjake krila tako nadoknađujući potreban otpor kako bi se skretanje anuliralo.

## 5. Zvonolika raspodjela uzgona

Unatoč njenom otkriću već 1933. godine zvonolika raspodjela uzgona nije dobila puno prostora u zrakoplovnoj industriji. Najviše su je koristili braća Horten kod izrade letećih krila neposredno prije i za vrijeme Drugog svjetskog rata u Njemačkoj te nakon rata u Argentini. Da nije bilo njihovih projekata zvonolika raspodjela prošla bi relativno nezamijećeno. Njihov je rad privukao pažnju američkih znanstvenika koji su u to vrijeme svoje ideje crpili iz ratnih plijenova američke vojske s područja razorene Njemačke. Tako među brojnim inženjerskim čudima njemačkog naroda tridesetih i četrdesetih godina dvadesetog stoljeća, ni ovaj projekt letećeg krila nije bio pošteđen da se kao ratni plijen pošalje preko oceana, prouči i iskoristi u svrhe Vlade SAD-a.



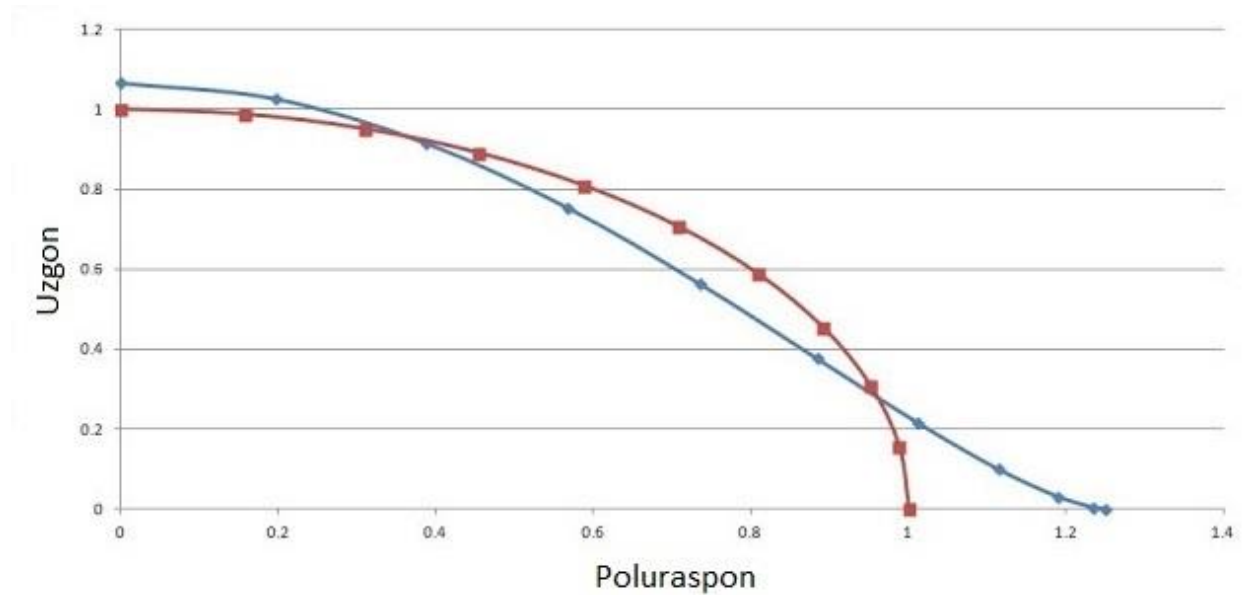
*Slika 12 Zvonolika raspodjela uzgona*

Sa slike 12 je vidljivo da se zvonolika raspodjela uzgona duž raspona krila očituje u obliku zvona čiji je promjer jednak rasponu, a koji svoj maksimum lokalnog uzgona ostvaruje ponovno u korijenu. Za razliku od eliptične raspodjele, promatrajući distribuciju uzgona od vrha krila prema korijenu, s lijeva na desno, kod zvonolike raspodjele lokalni uzgon raste eksponencijalno, slično kao kvadratna funkcija. Na donjaci krila više nije prisutan jedolnik raspored strujanja prema dolje (eng. downwash) već u obliku poluelipse s maksimumom u korijenu krila, a specifično je po tome što prelazi iz strujanja na dolje u strujanje na gore idući prema vrhovima krila.

Zvonolika raspodjela osigurava manji otpor i veći raspon zadržavajući pri tome jednak uzgon i jednako opterećenje krila u korijenu (opterećenje na savijanje). Primjerice, ako ne postoje ograničenja što se tiče duljine raspona, a postoji opasnost od prekoračenja strukturalnog opterećenja krila, zvonolika raspodjela uzgona omogućuje zadržavanje jednake mase krila uz veći



raspon i manji otpor krila [4]. Ovakvu distribuciju uzgona moguće je osigurati geometrijskim ili aerodinamičkim vitoperenjem. Obije raspodjele po polurasponu prikazane su na slici 13.



Slika 13 Zvonolika i eliptična raspodjela po polurasponu

Izvor: [aerocrafty.blogspot.com/2013/06/bell-shaped-lift-distribution.html](http://aerocrafty.blogspot.com/2013/06/bell-shaped-lift-distribution.html), 19.8.2018.

Za zvonoliku raspodjelu uzgona vrijedi da je uzgon duž raspona jednak:

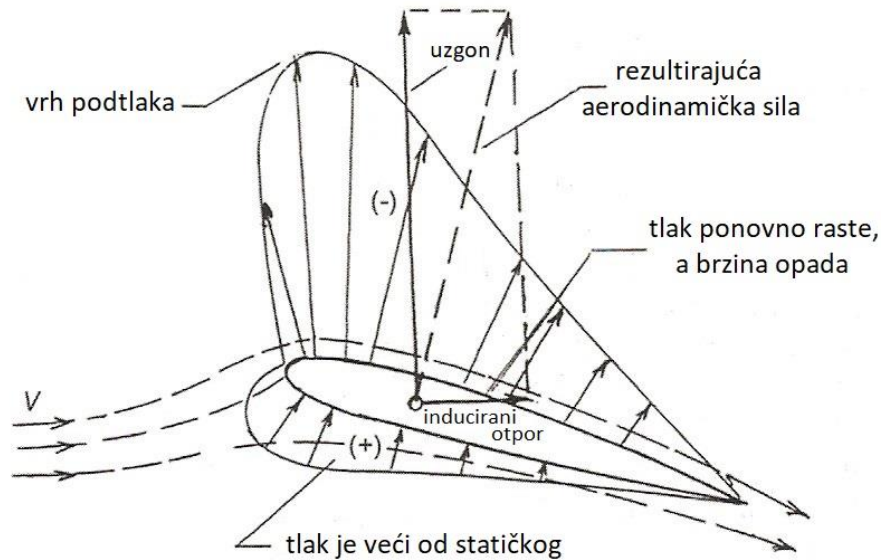
$$L = (1 - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

Gdje je:

$L$  – lokalni uzgon

$x$  – udaljenost od korijena krila

Kod tako konfiguriranih uzgonskih površina, koje daju zvonoliku distribuciju uzgona, posebno je zanimljiv fenomen induciranog potiska. Rezultantna aerodinamička sila na krilima zvonolikog uzgona nije konstantna po smjeru duž raspona. Pri trupu zrakoplova, to jest u korijenu krila ta se sila odmiče u smjeru suprotnom od smjera gibanja, čija horizontalna komponenta čini inducirani otpor što je uobičajena nuspojava uzgona prikazana na slici 14.



Slika 14 Inducirani otpor krila

Izvor: Petar Kesić, „Osnove aerodinamike“, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2003.

Idući prema vrhovima krila ta horizontalna komponenta uzgona slabi sve dok eventualno ne dostigne nulu nakon čega krene rasti u suprotnom smjeru, to jest u smjeru kretanja krila ili zrakoplova [3]. Navedena promjena smjera uobičajeno se dogodi na udaljenosti nakon pola raspona krila prema vrhovima, a taj fenomen naziva se inducirani potisak ili obrnuti inducirani otpor.

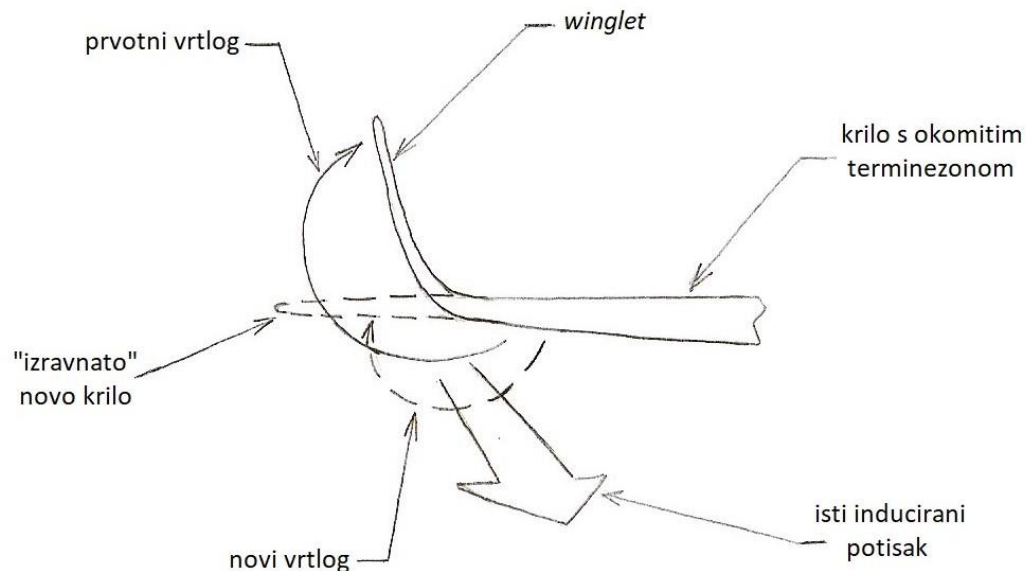
Shodno tome, upravljačka površina koja bi se našla u tom području obrnutog inducirano otpora uzrokovala bi povećanje potiska s povećanjem uzgona, pa bi primjerice krilce u ovakvim uvjetima pri valjanju prouzročilo i skretanje zrakoplova u smjeru nagiba što je poznato kao *proverse yaw* ili željeno skretanje. Ako bi se krilca adekvatno dizajnirala s obzirom na navedeni fenomen, zrakoplov ne bi više imao potrebu za kormilom smjera, jer bi se svaki zaokret prirodno koordinirao onako kako je to prethodno navedeno. Što znači ušteda pri izradi i održavanju, manji otpor i jednostavnija konstrukcija letjelice.

Ipak treba imati na umu da kormilo smjera ne služi samo kod skretanja za kordinaciju zaokreta već i znatno pomaže upravljanju u nekim nepredviđenim situacijama. Dvije takve okolnosti su na primjer slijetanje s jakim bočnim vjetrom i kompenzacija asimetrične vučne sile prilikom otkaza jednog od motora. Bočni vjetar je česta pojava pri slijetanju zrakoplova tako da kormilo smjera ne gubi svoju svrhu kao upravljačka površina u potpunosti. Ovo zapažanje je također i mogući odgovor na pitanje kako ptice lete bez vetrikalnog stabilizatora.

Druga vrlo bitna karakteristika zvonolike raspodjele uzgona, po čemu se ona također razlikuje od eliptične, jest specifično formiranje vrtloga. Vrtlozi kod eliptične raspodjele formiraju se kao posljedica prestrujavanja zraka sa donjake na gornjaku, koje se odvija na vrhovima krila. Ti vrtlozi imaju znatan doprinos jačini inducirano g otpora.

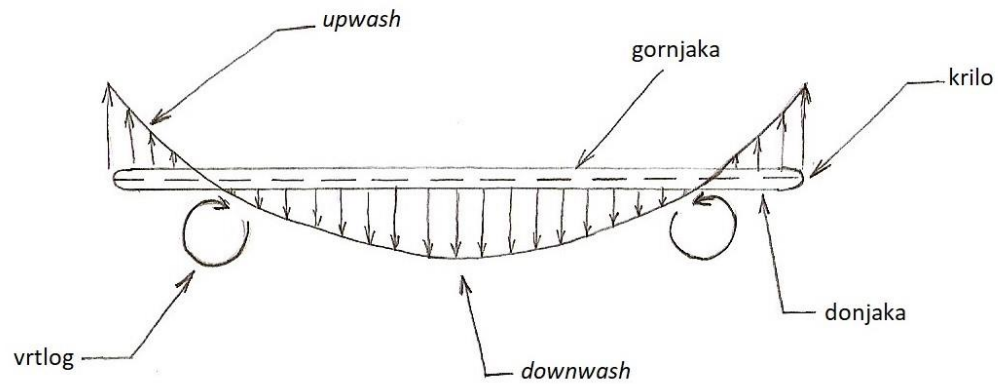
Pojava se nastoji izbjeći promjenom geometrije vrhova krila tako da se, umjesto ravnih završetaka, na vrhove krila spajaju okomiti terminezoni (eng. sharklets/winglets) koji smanjuju vršne vrtloge, a samim time i inducirani otpor. Okomito postavljene terminezoni preusmjeravaju struju zraka na takav način da ona stvara silu uzgona prema trupu zrakoplova. Ta sila nije potpuno okomita na trup zrakoplova (ili korijen krila), već je i nagnuta u smjeru gibanja (prema naprijed). To znači da je manja komponenta ukupne sile koju terminezon proizvodi paralelna s induciranim otporom, ali djeluje u suprotnom smjeru, generirajući tako inducirani potisak.

Kada bi se takvo krilo izravnilo, a da pri tom mjesto na kojem se vrtlozi formiraju ostane isto, rezultat bi bio formiranje vrtloga na donjaci krila prije samog vrha, a to je upravo ono što se događa kod zvonolike raspodjele uzgona.



*Slika 15 Zamišljeno poravnanje krila uz jednake vrtložne karakteristike*

Vršni vrtlozi se kod zvonolike raspodjele uzgona formiraju na mjestima gdje vertikalno strujanje duž krila mijenja svoj smjer s dolje na prema gore (prelazak iz *downwash* u *upwash*) [8]. Drugim riječima ostvaruje se potpuno isti efekt kao što je prethodno zamišljen, vrtlozi nastaju na donjaci krila prije vrha krila, a inducirani potisak je zadržan. Navedeni efekt prikazan je na slici 16.



Slika 16 Formiranje vrtloga kod zvonolike raspodjele uzgona

## 6. Utjecaj raspodjele uzgona na inducirani otpor zrakoplova

Kao što je već ranije spomenuto u drugom poglavlju, inducirani otpor je otpor koji nastaje kao posljedica uzgona, to je horizontalna komponenta rezultantne aerodinamičke sile koja djeluje na krilo u suprotnom smjeru od smjera gibanja. Za inducirani otpor krila vrijedi:

$$X_i = C_{xi} \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 A$$

Gdje je:

$X_i$  – inducirani otpor

$C_{xi}$  – koeficijent induciranog otpor

$\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2$  – dinamički tlak

$A$  – površina krila

Uzme li se da je dinamički tlak konstantan kao i površina krila, inducirani otpor ovisit će o koeficijentu induciranog otpora za koji vrijedi:

$$C_{xi} = \frac{C_z^2}{\pi e AR}$$

Gdje je:

$C_z$  – koeficijent uzgona

$e$  – Oswaldov koeficijent efikasnosti krila

$AR$  – aspektni odnos

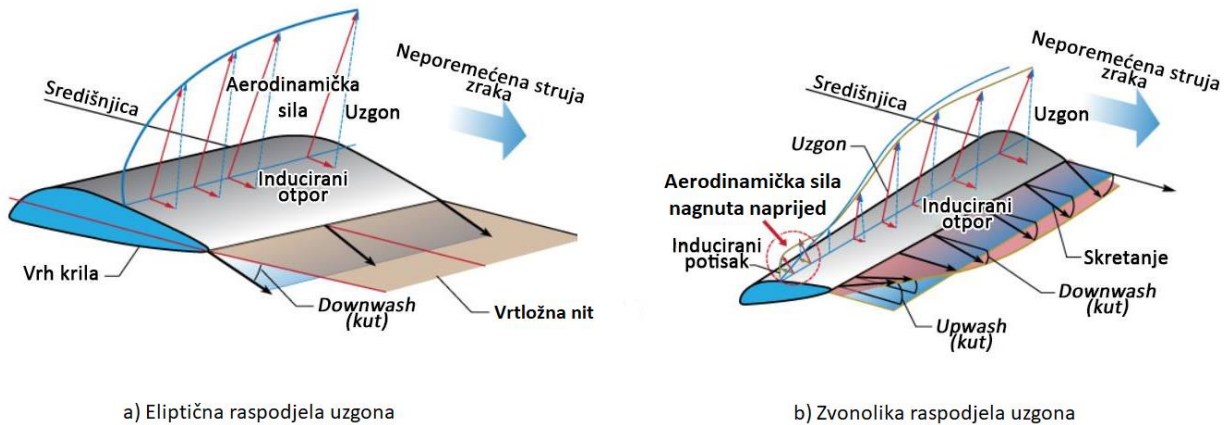
Iz prethodne formule je vidljivo da koeficijent induciranog otpora ovisi o tri parametra, koeficijentu uzgona, koeficijentu efikasnosti i aspektnom odnosu.

Pri velikim brzinama na malim i srednjim visinama, koeficijent uzgona  $C_z$  je malen zbog potrebne manje promjene napadnog kuta u svrhu povećanje uzgona. Da bi se jednak uzgon ostvario pri malim brzinama (slijetanje i polijetanje) potrebno je povećati napadni kut kako bi se i koeficijent uzgona povećao. To znači da inducirani otpor raste sa smanjenjem brzine jer je na manjim brzinama potreban veći koeficijent uzgona koji uzrokuje veće vrtloge na kraju krila.

Koeficijent efikasnosti  $e$  jednak je jedinici za eliptično krilo, za sve druge oblike krila ima vrijednost manju od jedinice. Pravokutno krilo na primjer ima manju efikasnost od eliptičnog, ali je

jednostavnije za izradu jer se njegova duljina tetive ne mjenja duž raspona. Kompromisno rješenje je trapezno krilo kod kojega se duljine tetiva smanjuju idući od korijena prema vrhu. Suženje krila uzrokuje porast koeficijenta efikasnosti.

Dominantan utjecaj na koeficijent induciranog otpora ima aspektni odnos  $AR$  koji se kod podzvučnih zrakoplova kreće u granicama od 4 do 20 [2]. Povećanjem aspektnog odnosa smanjuje se inducirani otpor što se i vidi iz formule jer se on nalazi u nazivniku.



a) Eliptična raspodjela uzgona

b) Zvonolika raspodjela uzgona

*Slika 17 Raspodjela induciranog otpora pri različitim raspodjelama uzgona*

Izvor: [ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20160003578.pdf](https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20160003578.pdf), 20.8.2018.

Na slici 17 prikazana su strujanja oko krila s različitom distribucijom uzgona sa kojih se jasno vidi različit utjecaj na vektore induciranog otpora i smjer razvoja njegovih produkata (vrtložni list i vrtlozi) po izlasku s krila. Raspored otpora je znatno drukčiji prema čemu se da zaključiti da način na koji je uzgon raspoređen duž krila definira razvoj induciranog otpora zrakoplova. Kod zvonolike raspodjele dolazi do karakteristične pojave promjene smjera induciranog otpora za 180 stupnjeva u horizontalnoj ravnini što je već spomenuto kao inducirani potisak.

## 7. Analiza u XFLR5 programu

Analiza je napravljena za dvije vrste krila, ne uzimajući u obzir trup zrakoplova. Prvo krilo izabrano je kao eliptično bez kuta strijele, s ciljem da se postigne eliptična raspodjela uzgona. Drugo krilo je suženo vitopereno krilo, s pozitivnim kutem strijele. Kako bi se postigla zvonolika raspodjela uzgona krilo je geometrijski vitopereno prema van (eng. washout).

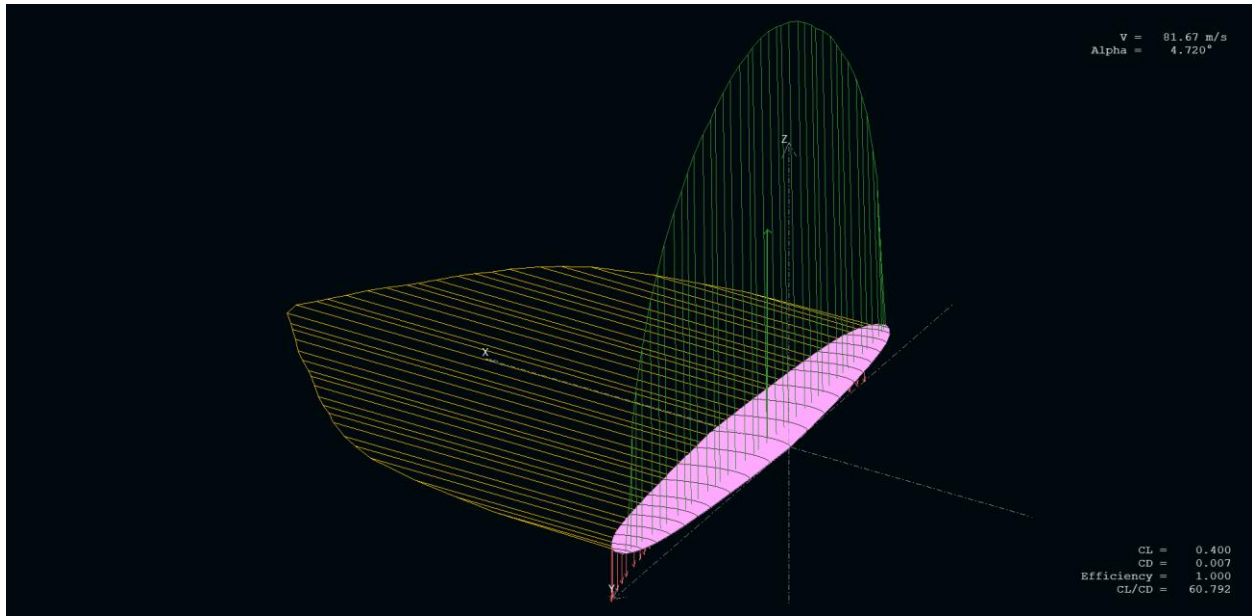
Oba krila jednakih su površina i aeroprofila duž raspona, NACA0012. Djeluju u jednakim atmosferskim uvjetima (koji su standardni) te su izložena struji zraka prosječne brzine od približno 81.7 m/s. Promatrat će se njihove karakteristike pri konstantnom uzgonu čiji je koeficijent 0.40.

Karakteristike oba krila navedene su u tablici koja slijedi, pri tom će se krilo koje stvara eliptičnu raspodjelu uzgona označiti kao Krilo E, a krilo koje stvara zvonoliku raspodjelu uzgona Krilo Z.

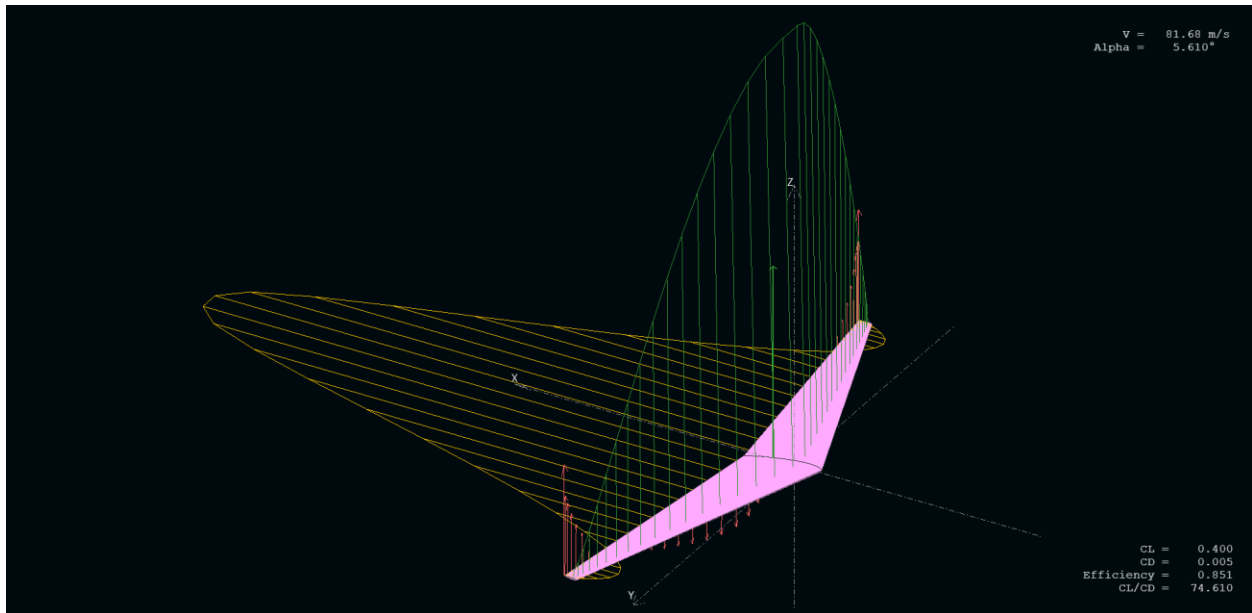
Tablica 1 Geometrijske karakteristike ispitivanih krila

Geometrijska karakteristika	Oznaka	Krilo E	Krilo Z
Raspon	$b [m]$	1.5	1.83
Tetiva u korijenu	$c_o [m]$	0.26	0.28
Tetiva na vrhu	$c_v [m]$	0.030	0.048
Suženje	$\lambda$	8.67	5.83
Površina	$S [m^2]$	0.3	0.3
Aspektni odnos	$AR$	7.49	11.16
Kut Strijele	$\Lambda [^\circ]$	0	17.70
Vitoperenje u korijenu	$\phi_o [^\circ]$	0	0
Vitoperenje na vrhu	$\phi_v [^\circ]$	0	-8
Srednja geometrijska tetiva	$c_g [m]$	0.2	0.16
Srednja aerodinamička tetiva	$c_a [m]$	0.21	0.19

Na slikama koje slijede, zelene linije predstavljaju raspodjelu uzgona, crvene strujanje na dolje (*downwash*) i na gore (*upwash*), a žute linije predstavljaju inducirani otpor. Ružičastom bojom je označeno krilo. Bitno je također razumjeti da je eliptična raspodjela zbog relativno velikih vrijednosti lokalnog uzgona u ovom slučaju izdužena. Zbog toga poprima oblik vertikalno orijentirane poluelipse više nego horizontalne.

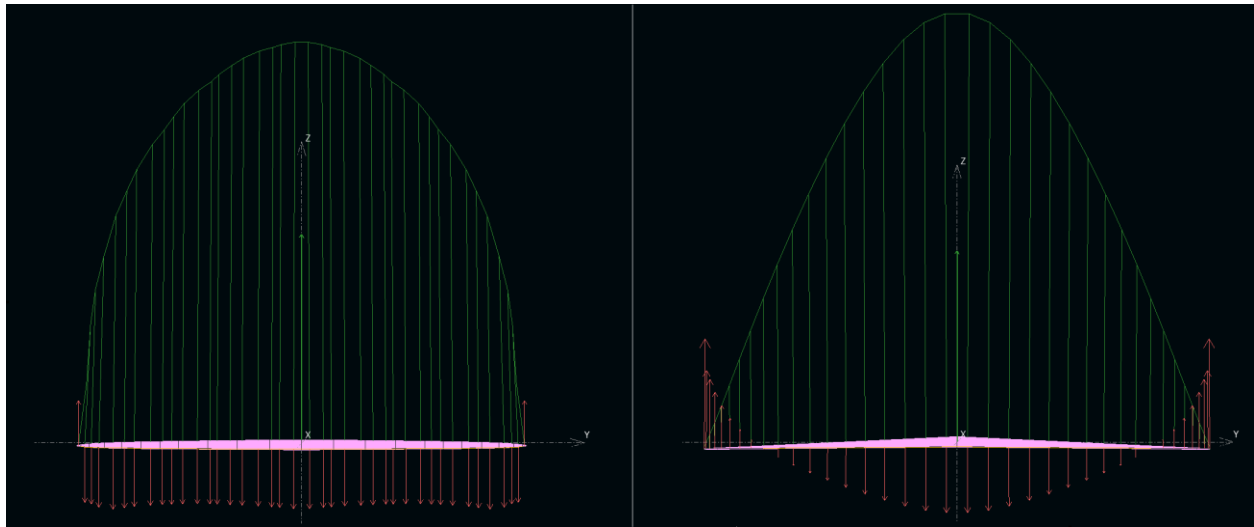


Slika 18 3D prikaz eliptične raspodjele uzgona

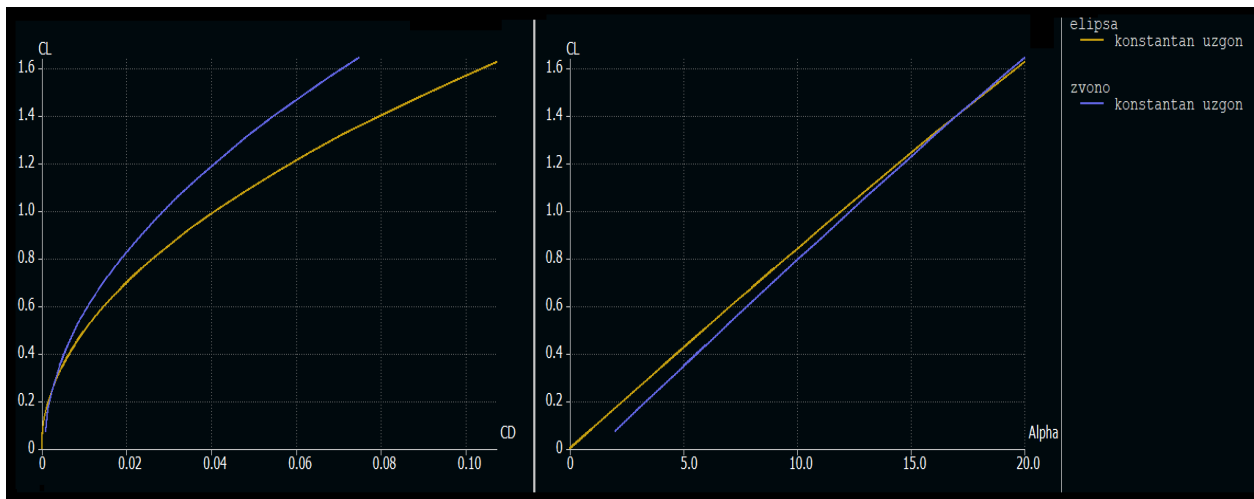


Slika 19 3D prikaz zvonolike raspodjele uzgona





Slika 20 Prikaz oba krila otraga



Slika 21 Grafički prikaz rezultata dvaju krila

Analiza je pokazala da krilo koje proizvodi zvonoliku raspodjelu uzgona, pri jednakim atmosferskim uvjetima i brzini opstrujavanja, za isti uzgon daje manji otpor unatoč malo manjoj efikasnosti u ovom slučaju. Za jednak koeficijent uzgona,  $C_L = 0.40$ , krilo koje ostvaruje zvonoliku raspodjelu uzgona ima koeficijent otpora  $C_D = 0.005$ , dok krilo koje ostvaruje eliptičnu raspodjelu ima koeficijent otpora  $C_D = 0.007$  što je razlika od 28.6%.

Tablica 2 Usporedba rezultata ispitivanih krila

Parametar	Oznaka	Krilo E	Krilo Z
Brzina opstrujavanja	$V [m/s]$	81.67	81.68
Napadni kut	$\alpha [^\circ]$	4.720	5.610
Koeficijent uzgona	$C_L$	0.40	0.40
Koeficijent otpora	$C_D$	0.007	0.005
Koeficijent efikasnosti	$e$	1.000	0.851
Finesa	$C_L/C_D$	60.792	74.610

Krila su dizajnirana tako da djele jednaku površinu s time da krilo Z ima veći raspon za 22% prema Prandtlovoj tezi. Veći raspon za jednaku masu i manji otpor uz korištenje jednako mnogo materijala za izradu (oba krila su sačinjena od istih aeroprofila i imaju jednaku površinu). Moment savijanja u korijenu u analizi nije prikazan s obzirom da se radi o analizi krila bez trupa zrakoplova, iako se jasno vidi da se maksimalan uzgon postiže na polovici oba krila gdje je predviđen spoj krilo-trup.

Za istu brzinu opstrujavanja eliptično krilo postiže zadani koeficijent uzgona pri napadnom kutu od  $4.720^\circ$  dok je kod krila Z taj kut nešto veći,  $5.610^\circ$ . Krilo Z također ima i veću finesu, to jest veći omjer uzgona i otpora. Finesa je naručito bitna kod jedrilica koje gube minimalno visine za veći prevaljeni horizontalni put što je njen iznos veći.

Grafičke analize također su pokazale da je krivulja zvonolike raspodjele uzgona (plava), pri konstantnom uzgonu strmija od krivulje koju predstavlja eliptično krilo (žuta) kod odnosa koeficijenata uzgona i otpora (finesa krila). Kod odnosa koeficijenta uzgona i napadnog kuta ponovno se vidi strmiji rast krivulje koja pretpostavlja zvonoliku raspodjelu. Plava linija na tom grafu počinje ispod žute, a kasnije ju siječe i nastavlja rasti udaljavajući se. To je posljedica uvijanja krila Z koje pri malim napadnim kutevima generira manje uzgona zbog manjeg prosječnog napadnog kuta duž raspona. Povećanjem apsolutnog napadnog kuta aeroprofilu prema vrhovima krila imaju manji napadni kut od onih pri korijenu krila što dolazi do izražaja pri prvoj pojavi odvajanja graničnog sloja. Odvajanje će prvo nastupiti pri korijenu zbog većih napadnih kuteva aeroprofila koji se tamo nalaze, dok će aeroprofilu od polovice prema vrhu krila nesmetano održavati krilo u zraku. Eliptično krilo ne dijeli takve karakteristike zbog nedostatka vanjskog vitoperenja.

Kod unutarnjeg vitoperenja slučaj bi bio obratan. Pri malim napadnim kutevima vrhovi krila bi generirali veći uzgon od onih u korijenu, ali bi slom uzgona zbog velikih napadnih kuteva nastupio prvo na vrhovima šireći se dalje prema korijenu. Takav raspored i smjer sloma uzgona duž krila nije poželjan zbog upravljačkih površina koje se nalaze na vrhovima krila.

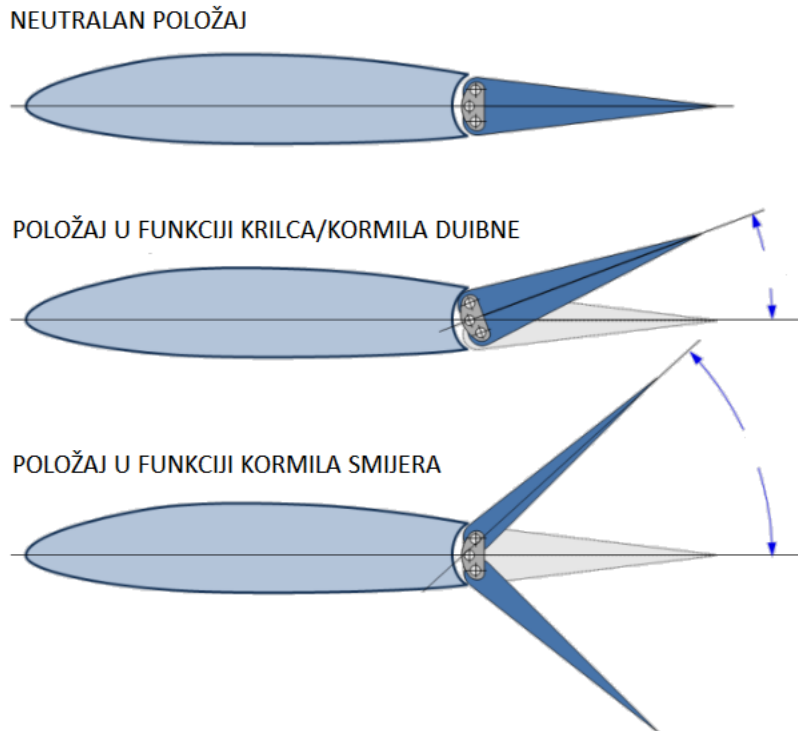
## 8. Zvonolika raspodjela uzgona u praksi

Unatoč svim rezultatima i analizama zvonolika raspodjela uzgona još nije prihvaćena kao optimalno rješenje kod izrade letjelica danas. Za postizanje takve vrste uzgona potrebna su uvijena, to jest vitoperena krila prema vanka čije vitoperenje od korijena prema vrhu nije linearno. Krila moraju biti dizajnirana na takav način da vertikalno strujanje po izlasku krila mijenja svoj smjer s dolje na prema gore, na otprilike 60 do 80% udaljenosti od dužne osi zrakoplova prema vrhovima krila. Potrebno je postići takvo nelinearno uvijanje da se, 10 do 35% ukupnog uvijanja događa do pola, a ostatak od polovice udaljenosti središnjice zrakoplova prema vrhovima krila. Takva neravnomjerna raspodjela vitoperenja duž raspona predstavlja jako kompleksan zadatak pri konstruiranju letjelice.

Idealno konstrukcijsko rješenje za postizanje zvonolike raspodjele uzgona su leteća krila. Braća Horten bili su prvi koji su u tom smjeru napravili velik iskorak polovicom dvadesetog stoljeća.

Leteća krila su zrakoplovi bez repnih površina čiji je trup „stopljen“ s osnovnom konstrukcijom to jest krilom, samim time konstrukcija je jednostavnija i trošak izrade je manji. Prednost letećeg krila nad konvencionalnim zrakoplovom jasna je na prvi pogled kada se u obzir uzme da trup i repna struktura zrakoplova čine 30 - 50% ukupnog otpora. Uz zvonoliku raspodjelu uzgona koja osigurava i manji inducirani otpor, leteća krila imaju sve pedispozicije za postizanje najboljih rezultata u zračnom prijevozu danas sa stajališta efikasnosti to jest ekonomičnosti. *Proverse yaw* kao specifičnost zvonolike raspodjele eliminirao bi potrebu za kormilom smjera te prirodno koordinirao zaokrete, a instalacija motora s elisom je jednostavnija zbog njihovog smještanja otraga.

No leteća krila imaju i svoje nedostatke, najprimjetniji je problem direkcionalne stabilnosti. Zrakoplovi bez repa problem direkcionalne stabilnosti rješavaju podijeljenim, tzv. školjkastim krilcima (eng. clamshell aileron) koja su za vrijeme leta otklonjena na obje strane istovremeno, a služe i kao kormila dubine. To pridodaje na kompleksnosti letjelice jer takvi uređaji nisu uobičajeni kao upravljačke površine, jedan primjer takvog zrakoplova je američki bombarder *B-2 Spirit*. U slučaju otkaza jednog od motora asimetričnu vučnu silu je teže kompenzirati, a slijetanje i uzlijetanje u uvijetima bočnog vjetra je otežano. Oba slučaja su posljedica manje direkcionalne stabilnosti i upravljivosti, to jest nedostatka vertikalnog stabilizatora. Alternativna metoda je instalacija okomitih terminezona na vrhovima krila ali oni povećavaju otpor. Integriranje putničke kabine u samu konstrukciju letjelice predstavlja poseban izazov zbog problema tlačenja kabine na većim visinama. Opterećenje na konstrukciju je veće zbog nepravilnog oblika kabine za koju je najpogodniji cjevasti oblik znajući da je radijalno opterećenje duplo manje od aksijalnog.



*Slika 22 Školjkasta krilca*

Izvor: [booksite.elsevier.com/9780123973085/content/APP-C5-DESIGN\\_OF\\_UNUSUAL\\_CONFIGURATIONS.pdf](https://booksite.elsevier.com/9780123973085/content/APP-C5-DESIGN_OF_UNUSUAL_CONFIGURATIONS.pdf), 3.9.2018.

Zvonolika raspodjela uzgona nakon svega najveću primjenu nalazi kod modela i sportskih jedrilica. Te letjelice su znatno manje i samim time konstrukcijski manje zahtjevne. Natjecateljskim jedrilicama zvonolika raspodjela omogućuje manji otpor za jednak raspon, a raspon je jedna od karakteristika koja određuje kategoriju jedrilice u natjecanju. Osim što definira natjecateljsku kategoriju olakšava i zadaće skladištenja ili prijevoza takvih letjelica koje se prevoze u zatvorenim prikolicama. Takvim zrakoplovima moment savijanja u korijenu nije posebno značajan s obzirom da se radi o relativno malim i jako lakim letjelicama čvrste konstrukcije. Isto vrijedi i za bespilotne letjelice koje su sve raširenije danas. Njihove mogućnosti brzo su prepoznale vojske širom svijeta koje ih danas maksimalno iskorištavaju te se konstantno razvijaju.

## 9. Zaključak

Nakon navedenih istraživanja i analiza, može se zaključiti da eliptična raspodjela nije uvijek optimalan izbor pri dizajniranju krila s obzirom na oblik uzgona koje će ono dati, kako se to dugo niz godina smatralo. Eliptična raspodjela uzgona predstavlja puno jednostavnije rješenje prilikom konstrukcije koje daje jako dobre rezultate što se u praksi pokazalo kao pouzdana i dokazana metoda.

Kada je riječ o zvonolikoj raspodjeli uzgona, rezultati i karakteristike koje se njom ostvaruju nisu niti malo inferiorni prema eliptičnoj za koju se dugo smatralo da je najbolja. Zvonolikom raspodjelom uzgona može se postići najveća efikasnost pri jednakoj količini strukture krila, prirodno koordinira zaokret zbog prisustva efekta *proverse yaw* te omogućuje zadržavanje jednake mase krila uz povećanje raspona i smanjenje otpora. Posebno je zanimljiva pojava induciranog potiska koji se javlja kod krila s zvonolikom raspodjelom uzgona. Prisustvo tog fenomena povećava efikasnost krila i daje minimalan inducirani otpor što na poslijetku pozitivno utječe i na potrošnju goriva pa samim time njegov dolet i istrajnost. Zvonolika raspodjela uzgona bi također mogla biti odgovor na pitanje kako ptice lete bez vertikalnog stabilizatora i kako se koriste kratkim vrhovima krila bez izazivanja sloma uzgona. Krilo takvih karakteristika koje proizvodi zvonoliku raspodjelu uzgona jest kompleksnije za proizvesti ali bi taj izazov u budućnosti trebao biti savladan korištenjem novih tehnologija u proizvodnji letjelica.

Zbog ne tako malo nedostataka što se tiče zadovoljavanja kriterija komercijalnog zrakoplovstva zvonolika raspodjela još neko vrijeme neće naći svoje mjesto u zračnom prijevozu. Ipak uspjesi vojnog zrakoplovstva ne otpisuju mogućnost njenog korištenja u budućnosti, treba imati na umu da je velik dio napretka u tehnologiji došao upravo iz vojnog sektora. Globalni pozicijski sustav, mlazni motor i internet samo su neki izuma vojske koje je civilni svijet preuzeo. Danas su navedeni izumi prihvaćeni kao standardni, kao nešto što je normalno, uobičajeno kao pojava u svijetu koji nas okružuje. Leteća krila i zvonolika raspodjela uzgona će možda biti dio tog svijeta u budućnosti ali jedno je sigurno, a to je da navedeni projekt zahtjeva još mnogo rada i istraživanja da se dokaže. Kada je neki fenomen dugo prisutan u društvu on ulijeva povjerenje korisnicima pa se tako i u zrakoplovstvu sve orijentira prema pouzdanosti. Do tada zvonolika raspodjela uzgona ostaje na korištenje sportsko-rekreativnim pilotima i sličnim zrakoplovnim entuzijastima.

## Literatura

1. Rendulić, Z. *Aerodinamika i mehanika leta*, Jet Manga d.o.o., Tuhelj 2006.
2. Kesić, P. *Osnove aerodinamike*, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2003.
3. NASA. Preuzeto sa: [ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20160003578.pdf](https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20160003578.pdf) [Pristupljeno: kolovoz 2018.]
4. Aerocrafty. Preuzeto sa: [aerocraftyblogspot.com/2013/06/bell-shaped-lift-distribution.html](http://aerocraftyblogspot.com/2013/06/bell-shaped-lift-distribution.html) [Pristupljeno: kolovoz 2018.]
5. Anderson, John D. (2001), *Fundamental of aerodynamics*, McGraw-Hill, Boston. ISBN 0-07-237335-0. p360
6. Houghton, E. L.; Carpenter, P.W. (2003). Butterworth Heinmann, ed. *Aerodynamics for Engineering Students (5th ed.)*. ISBN 0-7506-5111-3
7. Desktop Aeronautics. Preuzeto sa: [docs.desktop.aero/appliedaero/wingdesign/GeomnLDistn.html](https://docs.desktop.aero/appliedaero/wingdesign/GeomnLDistn.html), Kroo, I. *Applied Aerodynamics: A Digital Textbook*, [Pristupljeno: kolovoz 2018.]
8. International Journal of Engineering Trends and Technology. Preuzeto sa: [ijettjournal.org/2018/volume-59/number-4/IJETT-V59P233.pdf](http://ijettjournal.org/2018/volume-59/number-4/IJETT-V59P233.pdf) [Pristupljeno: kolovoz 2018.]
9. RC Soaring Digest. Preuzeto sa: [rcsoaringdigest.com/OTW/on-the-wing4/162-HCP2.pdf](http://rcsoaringdigest.com/OTW/on-the-wing4/162-HCP2.pdf) [Pristupljeno: rujan 2018.]
10. NASA. Preuzeto sa: [ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20160010122.pdf](https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20160010122.pdf) [Pristupljeno: rujan 2018]
11. Aerostories. Preuzeto sa: [aerostories.free.fr/constructeurs/horten/page2.html](http://aerostories.free.fr/constructeurs/horten/page2.html) [Pristupljeno: rujan 2018.]
12. General Aviation Aircraft Design: Applied Methods and Procedures. Preuzeto sa: [booksite.elsevier.com/9780123973085/content/APP-C5-DESIGN\\_OF\\_UNUSUAL\\_CONFIGURATIONS.pdf](http://booksite.elsevier.com/9780123973085/content/APP-C5-DESIGN_OF_UNUSUAL_CONFIGURATIONS.pdf) [Pristupljeno: rujan 2018.]

## Popis slika

Slika 1 Prikaz prestrujavanja zraka s donjake na gornjaku s prijeda, otraga i formiranje vrtloga iza krila ...	2
Slika 2 Nastajanje cirkulacije oko aeroprofila .....	4
Slika 3 Prikaz vertikalnih brzina oko aeroprofila .....	5
Slika 4 Geometrijski vitopereno krilo .....	7
Slika 5 Najčešći oblici krila .....	8
Slika 6 Osnovne geometrijske značajke krila .....	9
Slika 7 Utjecaj pojedinih geometrijskih rješenja krila na oblik raspodjele uzgona.....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
Slika 8 Utjecaj oblika krila na raspodjelu uzgona i inducirani otpor .....	11
Slika 9 Naprezanje uslijed savijanja .....	12
Slika 10 Eliptična raspodjela uzgona.....	14
Slika 11 Stvarna raspodjela uzgona uzduž krila uzevši u obzir i trup letjelice.....	15
Slika 12 Zvonolika raspodjela uzgona .....	17
Slika 13 Zvonolika i eliptična raspodjela po polurasponu .....	18
Slika 14 Inducirani otpor krila .....	19
Slika 15 Zamišljeno poravnanje krila uz jednake vrtložne karakteristike .....	20
Slika 16 Formiranje vrtloga kod zvonolike raspodjele uzgona.....	21
Slika 17 Raspodjela induciranog otpora pri različitim raspodjelama uzgona .....	23
Slika 18 3D prikaz eliptične raspodjele uzgona .....	25
Slika 19 3D prikaz zvonolike raspodjele uzgona.....	25
Slika 20 Prikaz oba krila otraga .....	26
Slika 21 Grafički prikaz rezultata dvaju krila .....	26
Slika 22 Školjkasta krilca .....	29

## Popis tablica

Tablica 1 Geometrijske karakteristike ispitivanih krila .....	24
Tablica 2 Usporedba rezultata ispitivanih krila .....	27





Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet prometnih znanosti  
10000 Zagreb  
Vukelićeva 4

## IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI I SUGLASNOST

Izjavljujem i svojim potpisom potvrđujem kako je ovaj \_\_\_\_\_ završni rad

isključivo rezultat mog vlastitog rada koji se temelji na mojim istraživanjima i oslanja se na objavljenu literaturu što pokazuju korištene bilješke i bibliografija.

Izjavljujem kako nijedan dio rada nije napisan na nedozvoljen način, niti je prepisan iz necitiranog rada, te nijedan dio rada ne krši bilo čija autorska prava.

Izjavljujem također, kako nijedan dio rada nije iskorišten za bilo koji drugi rad u bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili obrazovnoj ustanovi.

Svojim potpisom potvrđujem i dajem suglasnost za javnu objavu \_\_\_\_\_ završnog rada  
pod naslovom **Usporedba zvonolike i eliptične raspodjele uzgona na krilu**

na internetskim stranicama i repozitoriju Fakulteta prometnih znanosti, Digitalnom akademskom repozitoriju (DAR) pri Nacionalnoj i sveučilišnoj knjižnici u Zagrebu.

U Zagrebu, \_\_\_\_\_ 12.9.2018 \_\_\_\_\_

Student/ica:

  
\_\_\_\_\_  
(potpis)