Optimizacija distribucijske mreže primjenom matematičkih metoda

Maretić, Domagoj

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Transport and Traffic Sciences / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:119:128027

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-28**



Repository / Repozitorij:

Faculty of Transport and Traffic Sciences - Institutional Repository







SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET PROMETNIH ZNANOSTI

Domagoj Maretić

OPTIMIZACIJA DISTRIBUCIJSKE MREŽE PRIMJENOM MATEMATIČKIH METODA

DIPLOMSKI RAD

Zagreb, 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET PROMETNIH ZNANOSTI
POVJERENSTVO ZA DIPLOMSKI ISPIT

Zagreb, 24. travnja 2017.

Zavod: **Zavod za transportnu logistiku**
Predmet: **Distribucijska logistika I**

DIPLOMSKI ZADATAK br. 4261

Pristupnik: **Domagoj Maretić (0135228577)**
Studij: Inteligentni transportni sustavi i logistika
Smjer: Logistika

Zadatak: **Optimizacija distribucijske mreže primjenom matematičkih metoda**

Opis zadatka:

U radu je potrebno analizirati rute te lokacije koje je potrebno opskrbiti. U radu će se prikazati matematičke metode korištene u svrhu optimizacije distribucijske mreže, odnosno prikazati će se metode za izračun optimalne rute kretanja dostavnih vozila. Potrebno je implementacijom matematičkih metoda odrediti redoslijed opskrbe lokacija kako bi troškovi bili što niži.

Zadatak uručen pristupniku: 28. travnja 2017.

Mentor: Predsjednik povjerenstva za diplomski ispit:

dr. sc. Tomislav Rožić

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET PROMETNIH ZNANOSTI

DIPLOMSKI RAD

OPTIMIZACIJA DISTRIBUCIJSKE MREŽE PRIMJENOM MATEMATIČKIH METODA

DISTRIBUTION NETWORK OPTIMIZATION BY APPLICATION OF MATHEMATICAL METHODS

Mentor: dr.sc. Tomislav Rožić

Student: Domagoj Maretić

JMBAG: 0135228577

Zagreb, svibanj 2018.

SAŽETAK

Tvrtke robu mogu distribuirati vlastitim voznim parkom ili preko vanjskog pružatelja logističkih usluga, odabir prije svega ovisi o mogućnostima i visini troškova. Cilj je da proizvod bude dostupan kupcu u pravo vrijeme, na pravom mjestu uz što niže troškove. U svrhu optimizacije distribucijske mreže provedeno je istraživanje i analiza postojeće distribucijske mreže na primjeru distribucijske tvrtke Quehenberger Hrvatska d.o.o. U ovom radu opisat će se i prikazati princip izračuna nekoliko matematičkih metoda koje služe za projektiranje ruta na postojećoj distribucijskoj mreži. Uz projektiranje ruta, navedene metode mogu služiti i u svrhu optimizacije na način da se već postojeće rute određene iskustveno, projektiraju pomoću matematičkih metoda te uz usporedbu i analizu rezultata ponude optimalno rješenje, odnosno mogućnost najkraćeg puta.

Ključne riječi: Distribucijska mreža, optimizacija, matematičke metode, rute.

SUMMARY

Companies can distribute their goods by their own fleet or through an external logistic service provider and the choice depends primarily on the possibilities and the amount of costs. Objective is to make the product available to the customer at the right time, in the right place with the lowest possible costs. For the purpose of optimizing the distribution network, research and analysis of the currently distribution network was conducted on the example of the distribution company operating in the territory of the Republic of Croatia. This paper describes and presents calculation of several mathematical methods which are used for routes design on the existing distribution network. Along with route projecting, mathematical methods can serve as an optimization, along with current routes that are set by experience, and projected with methods, comparation and analysis that offer optimal solution, nevertheless the possibility of the shortest path.

Key words: Distribution network, optimization, mathematical methods, routes.

Sadržaj

1. UVOD 1

2. OPĆENITO O DISTRIBUCIJI 4

3. PROBLEMATIKA ISTRAŽIVANJA 10

3.1. Općeniti prikaz planiranja ruta kretanja vozila 13

3.2. Planiranje ruta kretanja vozila na primjeru tvrtke Quehenberger Hrvatska d.o.o 15

4. PROJEKTIRANJE RUTA NA DISTRIBUCIJSKOJ MREŽI 17

4.1. Clark-Wright-ov algoritam ušteda 17

4.2. Clark-Wright-ov algoritam ušteda – metoda s indikatorom *T* 24

4.3. Metoda grananja i ograničavanja 31

4.4. Metoda najbližeg susjeda 41

4.5. Christofides-ov algoritam 46

5. ANALIZA I PROJEKTIRANJE RUTA 48

5.1. Rute na području Sjeverne Hrvatske 48

5.1.1. Ruta HR-43627 48

5.1.2. Ruta HR-43689 69

5.1.3. Ruta HR-43753 74

5.1.4. Ruta HR-43472 80

5.1.5. Ruta HR-43882 85

5.1.6. Ruta HR-43881 91

5.2. Rute na području Slavonije 98

5.2.1. Ruta HR-43344 99

5.2.2. Ruta HR-43827 104

5.2.3. Ruta HR-43761 111

5.2.4. Ruta HR-43365 118

5.1.5. Ruta HR-43443 130

5.2.6. Ruta HR-43960 138

6. REZULTAT ISTRAŽIVANJA 147
8. ZAKLJUČAK 157
LITERATURA 159
POPIS KRATICA 160
POPIS SLIKA 161
POPIS TABLICA 163
POPIS GRAFIKONA 165

1. UVOD

Distribucija predstavlja treću fazu opskrbnog lanca, a uključuje veleprodajne i maloprodajne trgovce, logističke operatere, prijevoznike i druge subjekte koji zajednički tvore distribucijsku mrežu. Za percepciju potrošača o proizvodu ili usluzi, distribucija je najvažnija faza opskrbnog lanca jer predstavlja vezu prema kupcima, preko koje oni doživljavaju funkcioniranje opskrbnog lanca u cjelini. Transport ili prijevoz u troškovima distribucije sudjeluje između 55 i 60%, a povezuje mjesta isporuke i distribucijsku mrežu. Dostupnost proizvoda kupcima, odnosno korisnicima u znatnoj mjeri ovisi o učinkovitosti prijevoznog procesa. Transport je onaj dio opskrbnog lanca koji je najčešće pružan od strane vanjskog pružatelja logističkih usluga.

Korištene matematičke metode opisane u radu temelje se na problemu trgovačkog putnika, odnosno krajnji cilj metodama je krenuti iz izvorišta, obići svaku lokaciju samo jednom te se vratiti u izvorište uz što kraću udaljenost puta. Metode koje će se koristiti pri projektiranju ruta, odnosno optimizaciji distribucijske mreže su: *Clark-Wright-ov algoritam „ušteda“, metoda s indikatorom T, metoda grananja i ograničavanja, metoda najbližeg susjeda* i *Christofides-ov algoritam*. Kao osnovne metode optimizacije distribucijske mreže koristit će se *Clark-Wright-ov algoritam „ušteda“, metoda s indikatorom T*, a za usporedbu dobivenih rezultata sljedeće metode: *metoda grananja i ograničavanja, metoda najbližeg susjeda* i *Christofides-ov algoritam.* Metode će biti detaljno opisane i njihov postupak izračuna prikazan na primjerima.

Kroz rad će biti prikazana analiza distribucije, odnosno ruta logističke tvrtke Quehenberger Hrvatska d.o.o., koja djeluje na području Republike Hrvatske, uz mogućnost optimizacije, što doprinosi smanjenju troškova. Iz baze podataka navedene tvrtke izdvojeno je dvanaest ruta detaljnije opisanih u poglavlju pet. Šest ih pripada području Sjeverne Hrvatske, a ostalih šest ruta nalazi se na području Slavonije. Proces optimizacije odvija se na način da se za postojeće narudžbe za koje nisu evidentirani podaci o redoslijedu obilaska lokacija, odnosno nije zabilježena ruta opskrbe, projektiraju nove rute pomoću matematičkih metoda. Za svaku narudžbu projektirat će se ruta prema svakoj od navedenih metoda te će se nakon završetka projektiranja usporedit dobiveni rezultati. Obzirom da sve metode ne nude jednako rješenje, usporedbom rezultata dobit će se optimalno, najbolje rješenje, koje će se koristiti u izračunu troškova distribucije.

Vrste teretnih vozila koja distribuiraju robu podijeljene su na pet tipova ovisno o veličini, nosivosti i volumenu. Tvrtka vozila u najmu plaća prema prijeđenoj udaljenosti, odnosno prijeđenim kilometrima, stoga se izračunom najkraćeg puta, smanjuje trošak distribucije. U radu će biti prikazana usporedba troškova nakon projektiranih ruta za područje Sjeverne Hrvatske gdje je trošak distribucije definiran prema prijeđenim kilometrima i za područje Slavonije, gdje je trošak distribucije definiran prema paletnom mjestu. Kao rezultat usporedbe projektiranja ruta odredit će se isplativost pojedinog sustava naplate za navedena područja. Prikazat će se rezultati optimizacije i prijedlog rješenja u slučaju većih troškova distribucije nego su to bili prije izračuna.

Rad je koncipiran u sedam poglavlja. U drugom poglavlju definira se pojam i svrha distribucije te dva osnovna oblika distribucije, neposredna (direktna) i posredna (indirektna) distribucija te odnos njihovih troškova. Pojašnjen je pojam transporta, troškovi i kriteriji prilikom odluke o korištenju vlastitog transporta ili transporta od strane vanjskog pružatelja logističkih usluga.

Sadržaj trećeg poglavlja sastoji se od prikaza tipova i opisa vozila koja distribuiraju robu, zatim opis i podjela područja i ruta distribucije koja su predmet ovog rada. Općeniti prikaz planiranja ruta, kao i ciljevi i problemi prilikom planiranja, također su dio ovog poglavlja. U poglavlju problematike istraživanja dani su prijedlog i način optimizacije, odnosno izračun troškova distribucije.

Detaljan opis matematičkih metoda nalazi se u poglavlju četiri. Kao temelj, opisan je problem trgovačkog putnika, zatim opći *Clark-Wright-ov algoritam ušteda* te *Clark-Wright-ov algoritam ušteda kod metode s indikatorom T, metoda grananja i ograničavanja, heuristika najbližeg susjeda i Christofides-ov algoritam* u računskom i grafičkom obliku. Svaka metoda je teorijski opisana, prikazani su koraci inicijalizacije algoritama, odnosno metoda i postupak izračuna svake od metoda prikazan je na primjerima.

U petom poglavlju prikazani su izračuni projektiranja ruta matematičkim metodama na primjeru distribucijske mreže tvrtke Quehenberger Hrvatska d.o.o.

U šestom poglavlju prikazani su i uspoređeni rezultati projektiranja ruta i izračun troškova distribucije. Uspoređena su rješenja izračuna ruta i odabrano je optimalno rješenje koje se koristi kod izračuna ukupnog troška. Prikazani su rezultati za područje Sjeverne

Hrvatske i za područje Slavonije te je odabrano najbolje rješenje za pojedino područje koje bi bilo isplativo prilikom distribucije.

Posljednje poglavlje je osvrt na sva navedena poglavlja te zaključak o procesu optimizacije i dobivenim rezultatima.

2. OPĆENITO O DISTRIBUCIJI

Distribucija je faza u opskrbnom lancu koja slijedi proizvodnju dobara od trenutka njihove komercijalizacije do isporuke kupcima, odnosno krajnjim potrošačima. Distribucija također podrazumijeva djelotvoran prijenos dobara (roba ili usluga) od mjesta proizvodnje do mjesta potrošnje uz minimalne troškove i odgovarajuću razinu zadovoljenja zahtjeva kupaca.

Osnovna svrha distribucije kao djelatnosti je omogućiti visoku razinu dostupnosti proizvoda ili usluga potrošačima, u odgovarajućoj količini i asortimanu, u odgovarajućem vremenu i rokovima te na odgovarajućem mjestu [1].

Distribucija omogućava stavljanje robe na raspolaganje potrošačima na način i prema uvjetima koji najbolje odgovaraju njihovim zahtjevima. Temeljni i elementarni zadaci distribucije su: omogućiti brze, sigurne i racionalne tokove roba od proizvodnje do potrošnje na način da se prostorno i vremenski usklađuju proizvodnja i potrošnja, da se povećava sposobnost robe za promet i omogući neprekidno kolanje robe, zatim da je proizvodnja usmjerena prema potrebama potrošnje, da se djeluje na plasman novih proizvoda te da distribucija utječe na promjenu potrošačkih navika i kultura i da se štite interesi potrošača [2].

Obzirom na način (tehnologiju) postoje dva osnovna oblika distribucije [1]:

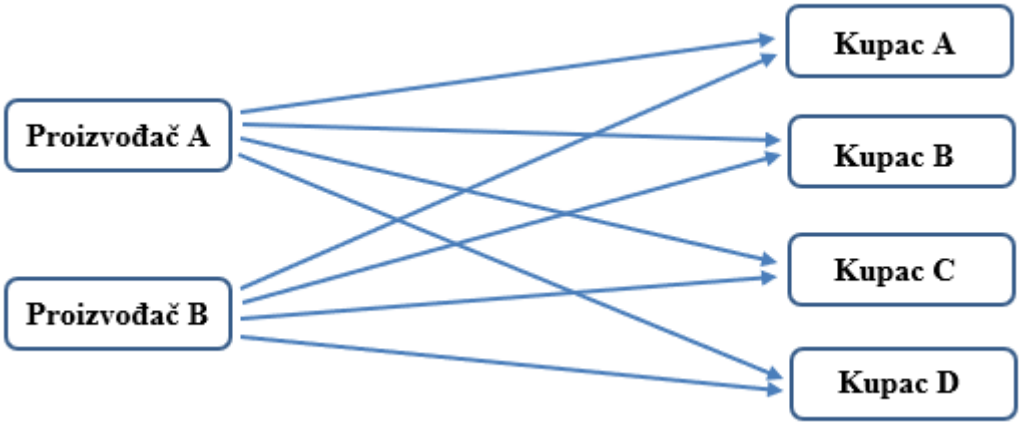
Neposredna distribucija – distribucija bez posrednika, odnosno direktna ili ambulantna dostava robe. Karakteristična je za proizvodnu potrošnju, dok se roba konačne potrošnje kreće kroz dvije ili više faza distribucije, odnosno više posrednika. Neposredna distribucija predstavlja najjednostavniji oblik distribucije jer u navedenom obliku izravno kontaktiraju proizvođač i potrošač kao što je prikazano na slici 1.

Prednosti neposredne distribucije su:

- ukupne zalihe,
- broj dostava,
- broj dokumenata,
- rok isporuke,
- logistički troškovi,
- niži troškovi skladištenja.

Nedostaci neposredne distribucije:

- dostupnost robe na polici,
- kontrola/upravljivost



Slika 1. Prikaz neposredne (direktne) distribucije, [1]

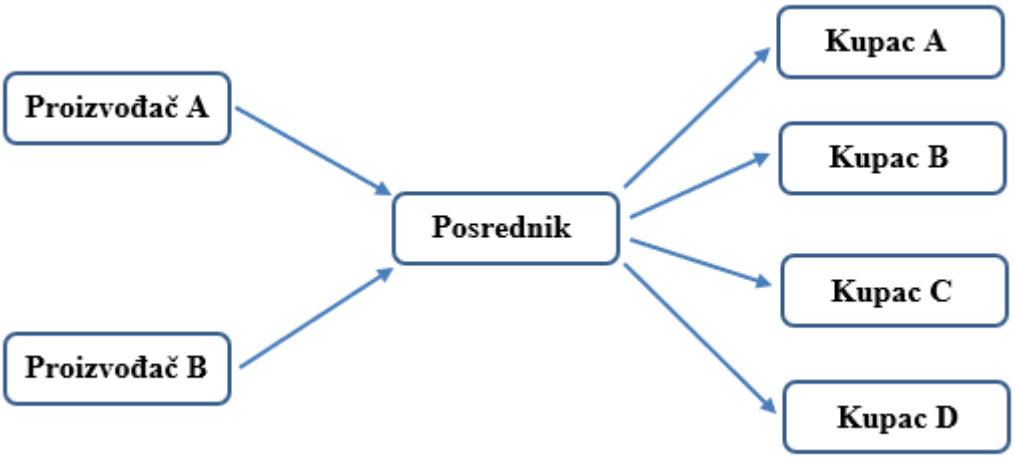
Posredna distribucija – Oblik distribucije koji se sastoji od kanala distribucije ili marketinških kanala čiji je zajednički cilj olakšati prijenos robe i vlasništva od proizvođača do kupca (slika 2). Prednosti i nedostaci kod posredne distribucije suprotni su od prednosti i nedostataka kod neposredne distribucije.

Prednosti posredne distribucije su:

- dostupnost robe na polici
- kontrola/upravljivost

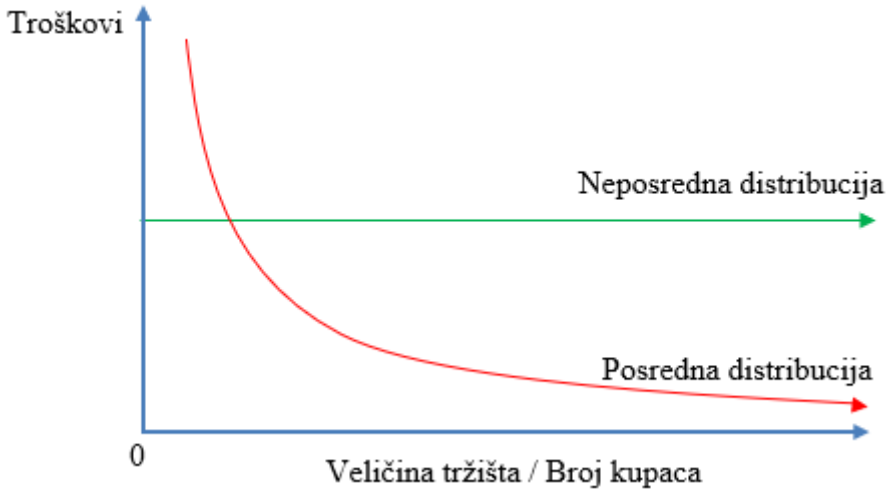
Nedostaci posredne distribucije su:

- ukupne zalihe,
- broj dostava,
- broj dokumenata,
- rok isporuke,
- logistički troškovi.



Slika 2. Prikaz posredne (indirektne) distribucije, [1]

Grafikon 1. prikazuje prosječno ponašanje troškova kod direktne odnosno neposredne distribucije i kod distribucije s posrednicima, tj. posredne distribucije. Na malim tržištima kod posredne distribucije troškovi su vrlo visoki, s povećanjem tržišta, broja kupaca, troškovi se naglo smanjuju. Troškovi kod neposredne distribucije uvijek su konstantni neovisno o veličini tržišta, odnosno broju kupaca.



Grafikon 1. Odnos troškova neposredne i posredne distribucije, [3]

Distribucijska mreža može biti organizirana i upravljana od strane pojedine tvrtke koja obavlja centralnu distribuciju, ali isto tako tvrtka sve potrebne resurse može unajmiti od vanjskog pružatelja logističkih usluga[1].

[1] Pojam poznatiji kao *outsourcing*

Transport predstavlja vezu između proizvodnje i opskrbe tržišta, odnosno pojedinih karika u opskrbnom lancu. Transport omogućuje opskrbu proizvođača sirovinama, poluproizvodima i reprodukcijskim materijalima, a zatim i prijevoz gotovih proizvoda prema mjestima potrošnje [4].

Transportna funkcija uključuje sljedeće elemente: ukrcaj tereta, prijevoz i iskrcaj. Transport se koncipira i ovisno o vrijednosnoj gustoći proizvoda, pri čemu vrijedi načelo da transport roba niske vrijednosti gustoće ne smije imati visoku vrijednost, odnosno cijenu [4].

Pitanje izbora vlastitog ili vanjskog (tuđeg) transporta strategijsko je i dugoročno. Kod odlučivanja o vlastitom ili vanjskom transportu u obzir treba uzeti [4].:

- troškove investicije u vlastiti vozni park,
- tekuće troškove,
- ostala davanja.

Prosudba se kod investicijskih ulaganja daje na temelju investicijskog računa, analize korisnost/vrijednost i načelnih razmatranja odluke *proizvesti ili nabaviti*. Prilikom izračuna potrebno je obuhvatiti troškove uređenja garaža, mjesta zaustavljanja i vlastitih uređaja za točenje goriva i slično [4].

Tekući troškovi odnose se na sljedeće:

- pogonski materijal,
- gorivo, mazivo,
- troškove čuvanja,
- troškove održavanja,
- poreze na vozila,
- troškove osoblja,
- otpise vozila i građevinskih objekata,
- otpise potrošenih dijelova, odnosno drugačije obuhvaćanje troškova dijelova,
- kamate,
- troškove rizika,
- udio troškova uprave i rukovođenja.

Davanja se u prvom redu odnose na licencije, takse za korištenje cesta, takse pri prijelazu granica, itd.

Navedene troškove trebalo bi dobiti temeljem izračuna troškova prema vrstama i mjestima i dodijeliti ih pojedinim nositeljima troškova. Izračun se treba izvesti tako da se može usporediti s kalkulacijskom jedinicom prijevoznika, logističkog operatera. Prilikom usporedbe troškova vlastitog i vanjskog transporta treba uzeti u obzir da li uključeni prijevoznik izvodi samo transportne usluge ili i druge logističke usluge [4].

Ostali kriteriji prilikom odlučivanja za vlastiti ili za vanjski transport koje treba uzeti u obzir su [4]:

- *know-how*,
- ovisnost,
- uspješnost vlastitog voznog parka,
- porezne olakšice i subvencije.

Dakle, potrebno je razmotriti posjeduju li postojeći suradnici tražena znanja i mogućnosti za provođenje transporta u potpunosti. Jednako tako, potrebno je istražiti u kolikoj bi mjeri tvrtka bila ovisna o ostalima i kakve bi negativne posljedice mogle nastupiti. Također potrebno je istražiti s kakvim bi stupnjem djelovanja oglašavanja mogao polaziti vlastiti vozni park, ovisno o tome kakav je marketing. Porezne olakšice i subvencije potrebno je uzeti u obzir ukoliko se već nisu razmatrale prilikom rasprave o troškovima, ukoliko se upotrebljavaju određena transportna sredstva, odnosno ako se određenim rutama daje prednost i slično [4].

Kod odluka vezanih uz transport robe, razlikuju se: Izbor transportnih sredstava i planiranje ruta.

Izbor transportnog sredstva utječe na cijenu robe, točnost isporuke i na stanje robe pri njezinom dospijeću. Obzirom na navedene faktore, izbor transportnog sredstva utječe i na zadovoljstvo kupca, potrošača te mu treba dati veliko značenje.

Kod izbora transportnog sredstva u obzir treba uzeti sljedeće kriterije [4]:

- pravne,
- infrastrukturne,
- troškovne,
- učinkovitosti.

Kod pravnih kriterija valja uzeti u obzir i zakonsku regulativu pojedinog prometnog sustava, zabrane vožnje u određeno vrijeme, zakonske propise o prijevozu opasnih i štetnih tvari, mogućnost utjecaja države na oblikovanje tarifa i sl. [4].

Pri izboru transportnih sredstava bitna je i infrastruktura i njezini čimbenici, npr.: cestovna i željeznička mreža, položaj i lokacija, industrijska politika, stavovi stanovništva, itd.

Kod kriterija troškova potrebno je u obzir uzeti troškove prijevoza tereta, dodatne transportne troškove (takse za korištenje cesta, lučke pristojbe, pristojbe za korištenje prostora, carine), troškove rukovanja, konvencionalne kazne kod ne pridržavanja rokova nabave, troškove radi nastalog gubitka na imidžu i sl.

Kod kriterija učinkovitosti bitni su: tehnička pogodnost transportnog sredstva, pouzdanost, vrijeme transporta, učestalost transporta, fleksibilnost, itd. [4].

3. PROBLEMATIKA ISTRAŽIVANJA

Prijevoz u tvrtki Quehenberger Hrvatska d.o.o. odvija se u službi vanjskog pružatelja usluga, odnosno kao *outsourcing* ili 3PL[2]. Tvrtka je u kontaktu s većim brojem prijevoznika te ih odabire ovisno o visini cijene prijevoza. U nastavku se nalaze tipovi vozila koji se koriste prilikom distribucije ovisno o količini i vrsti tereta. Detaljnije će se objasniti načini prijevoza, tj. prevozi li se roba na paleti ili kao koleto. Koleto je jedinica tereta, odnosno komadni teret, sanduk, paket, paleta i sl. Prilikom izračuna, teret manje mase može se, ali i ne mora prevoziti na paleti, prikazuje se kao koleto te se stoga može uštedjeti prostor u vozilu na način da se veća količina manje mase složi na jednu paletu. Cijena najma svakog vozila je cijena koju tvrtka Quehenberger Hrvatska d.o.o. plaća prijevoznicima. Prikazana je nosivost vozila, broj Euro-paleta (EUP, dimenzija 1200 x 800 mm, nosivosti 1500 kg) koje vozilo može prevoziti, dimenzije teretnog prostora vozila i cijena najma vozila po prevezenom kilometru. Vozila će biti označena oznakama „tip 1“, „tip 2“, „tip 3“, itd. prema veličini, radi lakšeg izračuna u nastavku:

tip 1: Kombi vozilo → 1,5 tona nosivosti → 6 EUP

Dimenzije: 4000 x 2000 x 1900 → V = 17 m^3

Cijena prijevoza: 2,5 kn/km,



Slika 3. Kombi vozilo, [5]

[2] 3PL operater, eng. *Third Party Logistic Operator*, Vanjski pružatelj logističkih usluga

tip 2: Dostavno vozilo → 3,5 tona nosivosti → 14 EUP

Dimenzije: 6000 x 2480 x 2400 → V = 40 m^3

Cijena prijevoza: 4 kn/km,



Slika 4. Dostavno vozilo (3,5 tona), [5]

tip 3: Dostavno vozilo → 5 tona nosivosti → 16 EUP

Dimenzije: 7100 x 2400 x 2400 → V = 40 m^3

Cijena prijevoza: 4 kn/km,



Slika 5. Dostavno vozilo (5 tona), [5]

tip 4: Dostavno vozilo → 7 tona nosivosti → 18 EUP

Dimenzije: 7460 x 2480 x 2300 → V = 44 m^3

Cijena prijevoza: 5 kn/km,



Slika 6. Dostavno vozilo (7 tona), [5]

Tip 5: Dostavno vozilo → 12 tona nosivosti → 22 EUP

Dimenzije: 8800 x 2500 x 2600 → V = 60 m^3

Cijena prijevoza: 6 kn/km



Slika 7. Dostavno vozilo (12 tona), [5]

Radi jednostavnijeg prikaza i razumijevanja cjelokupnog procesa optimizacije, obuhvaćeno područje podijeljeno je na dva dijela prema području distribucije, Sjevernu Hrvatsku i Slavoniju. Početna, a ujedno i završna točka svake rute je skladišni centar u gradu Zagrebu. Iz skladišnog centra u Zagrebu započinje proces distribucije prema gradovima i mjestima u pojedinoj regiji. Odabrani broj ruta za koje će se vršiti distribucija, odnosno rute za odabir najkraćeg puta te redoslijed obilaska mjesta i gradova kako bi se dobilo konačno rješenje, jednak je i za Sjevernu Hrvatsku i za Slavoniju radi jednostavnijeg i preciznijeg prikaza rješenja.

3.1. Općeniti prikaz planiranja ruta kretanja vozila

Za tvrtke koje proizvode šalju na veći broj skladišta ili većem broju kupaca, potrebno je planirati rute kretanja vozila. Kod planiranja ruta koristi se termin „problem trgovačkog putnika“ (*traveling salesman problem*) i radi se o simultanom planiranju velikog broja ruta. Ujedno, „problem rasporeda vozila“ (*vehicle scheduling problem*) predstavlja jedinstveno planiranje prijevoznih ruta.

Standardni problem planiranja ruta može se prikazati na sljedeći način:

Iz jednog se distribucijskog centra unutar određenog planskog vremenskog razdoblja roba dostavlja određenim čvorištima (potrošačima, kupcima u velikim gradovima ili većem broju kupaca). Potreba čvorišta može se pokriti jednom pošiljkom. Plan ruta potrebno je spojiti kao jednu količinu ruta, koju uvijek svladava jedno vozilo, polazeći od distribucijskog centra i završavajući u distribucijskom centru. Pri tome se svakom potrošaču, odnosno kupcu dostavlja jednom rutom, a teret svake rute mora biti jednak ili manji od kapaciteta jednog vozila [1].

Planiranje ruta slijedi ove ciljeve [1]:

- minimiziranje transportnih putova,
- minimiziranje vremena transporta,
- minimiziranje proporcionalnih troškova,
- minimiziranje broja vozila.

Osnovni problem planiranja ruta sastoji se od dva dijela, no između ostalog javljaju se i ostali problemi koji otežavaju planiranje.

Problemi se dijele na temeljne i dodatne probleme. Dijelovi osnovnog, temeljnog problema odnose se na [1];

- dodjeljivanje kupaca za pojedine rute,
- utvrđivanje redoslijeda kupaca unutar rute.

Dodatni problemi koji otežavaju planiranje ruta [1]:

- ograničeni kapaciteti (dimenzije težine i volumena, jedinica količine narudžbi i kapaciteta vozila se razlikuju te svaka za sebe može djelovati ograničavajuće, a i trajanje pojedine rute može biti vremenski ograničeno temeljem zakonskih propisa),
- različit vozni park (u temeljnom procesu polazi se od neograničenog broja jednakih vozila),
- vremenski okvir kupaca (prilikom isporuke često treba paziti na kratko vrijeme prihvata robe kod kupca, stoga je potrebno uzeti u obzir najranije i najkasnije vrijeme do kada pošiljka treba stići do kupca),
- okviri za vozila (pojedina vozila na raspolaganju mogu biti u različitom vremenu),
- višestruko uvođenje vozila po danu (pojedino vozilo može dnevno izvršiti više ruta).

Planiranje ruta može se provoditi za dvije različite situacije:

- za dnevne rute,
- za standardne rute.

Prilikom planiranja dnevnih ruta, postoje narudžbe za jedan dan, koje se planiranjem prethodne večeri ili početkom idućeg dana mogu uključiti u izvršenje ruta. Planiranje standardnih ruta može se provesti u većim razmacima. Temelj su tipični programi narudžbi. Navedeni postupci imaju smisla kod ruta koje ostaju relativno iste, s malim kolebanjima programa narudžbi [1].

Generalni problem planiranja ruta uvjetuje velike napore u planiranju ruta i izračunima istih. Stoga se praksa zadovoljava i približnim rješenjima. Prošireni postupci su:

- postupci najboljeg sljedbenika,
- sukcesivno uključivanje stanica,
- *Saving* – postupci (najbolje djelomične rute).

Informacijska tehnologija bitno je doprinijela usavršavanju, ali i proširenju matematičkih postupaka planiranja ruta. U praksi se nude brojni softverski programi za planiranje ruta kao što su npr.: *OptiMap, WINQSB, Route planner-Michelin, TomTom My drive, MapQuest* i mnogi drugi. Djelomični problemi oblikovanja ruta rješavaju se sukcesivno ili simulacijom (npr. *Saving* postupci) [1].

3.2. Planiranje ruta kretanja vozila na primjeru tvrtke Quehenberger Hrvatska d.o.o

Planiranje ruta tvrtke Quehenberger Hrvatska d.o.o. odvija se na temelju iskustva disponenta za planiranje. Disponent u obzir uzima čimbenike kao što su: trošak prijevoza, vrijeme dostave i kapacitet vozila. Također potrebno je uzeti u obzir i prijevoznika koji obavlja distribuciju na željenom području. Uz pomoć programa za odabir najkraćeg puta, *Optimap* te *Google* karata, disponent odredi redoslijed obilaska dostavnih mjesta i put kojim prijevoznik obavlja distribuciju. Naplata distribucije može biti ili prema paleti u dotovaru, odnosno prema paletnom mjestu ili prema prijeđenim kilometrima u najmu vozila. Obzirom da se sadržaj ovog rada odnosi na matematičke metode za izračun i odabir najkraćeg puta, koristit će se financijski prikaz naplate prijevoza tvrtke Quehenberger Hrvatska d.o.o., a to je naplata prema prijeđenim kilometrima, odnosno prema cijenama ranije navedenim za svaki tip vozila i prema paletnim mjestima.

Prijedlog za optimizaciju distribucijske mreže je taj da se pomoću matematičkih metoda, odnosno algoritama za projektiranje ruta i dobivanja najkraćeg puta smanje troškovi distribucije. Obzirom da se trošak prijevoza zasniva na prijeđenim kilometrima, određivanjem najkraćeg puta pomoću navedenih metoda smanjila bi se udaljenost u odnosu na postojeću te bi se na jednak način smanjili troškovi transporta ovisno o prijeđenim kilometrima.

U teoriji postoji poprilično veliki broj metoda i algoritama za izračun najkraćeg puta i za usmjeravanje (rutiranje) ili projektiranje ruta vozila. U ovom radu koristit će se sljedeće odabrane metode: *Clark-Wright-ov algoritam ušteda, metoda s indikatorom T* kao osnovne metode, te *metoda grananja i ograničavanja, metoda najbližeg susjeda* i *Christofides-ov algoritam* za usporedbu dobivenih rezultata dobivenih osnovnim metodama. Najkraći put za dvanaest odabranih ruta izračunat će se prema navedenim metodama te će se usporediti dobiveni rezultati, kako bi se odredilo najbolje rješenje i metoda ili metode koje daju najbolje rješenje. Optimizacija će se odvijati na način da se za početak izdvoji jedna od ruta, a zatim

prikažu sve međusobne udaljenosti između čvorova unutar rute. Prema međusobnim udaljenostima izračunava se najkraći put na različiti način ovisno o metodi. Nakon usporedbe rezultata, odabire se najmanja udaljenost. Iz podataka o narudžbi, osim dostavnih lokacija, vidljiva je količina tereta u količinskom obliku i kao masa tereta te potrebno vrijeme dostave. Prema podacima o masi i količini tereta, odabire se jedan od navedenih tipova vozila za transport ovisno o masenom i volumenskom udjelu tereta. Nakon odabranog tipa vozila, prema dobivenoj udaljenosti najkraćeg puta i cijeni najma prema prijeđenom kilometru za vozilo dobije se trošak prijevoza za jednu rutu. Osim izračuna troška prema prijeđenom kilometru, odnosno trošak najma vozila, izradit će se kalkulacija troškova prema paletnom mjestu, jer cijena prijevoza jedne palete u navedenoj tvrtki iznosi 180 kn. Nakon navedenog izračuna, usporediti će se troškovi najma vozila i troškovi prema paletnom mjestu te će se odabrati bolje rješenje za određenu rutu, odnosno regiju.

4. PROJEKTIRANJE RUTA NA DISTRIBUCIJSKOJ MREŽI

U nastavku će se opisati matematičke metode koje će se koristiti prilikom projektiranja ruta, odnosno optimizacije distribucijske mreže. Na primjerima će biti prikazan postupak izračuna najkraćeg puta za metode: *Clark-Wright-ov algoritam ušteda, metoda s indikatorom T, metoda grananja i ograničavanja, metoda najbližeg susjeda* i *Christofides-ov algoritam*.

4.1. Clark-Wright-ov algoritam ušteda

Dantzig i Ramser razvili su i predložili matematičku interpretaciju i algoritam za rješavanje problema usmjeravanja vozila (eng. *Vehicle Routing Problem* - VRP). Kasnije su, točnije 1964., Clark i Wright predložili poboljšanje Dantzig-Ramserove metode pomoću konstrukcije ruta, koristeći heuristička rješenja koja koriste „pohlepne[3]“ algoritme. Model Clark i Wright-a koristi se i danas zbog svoje jednostavnosti i univerzalnosti.

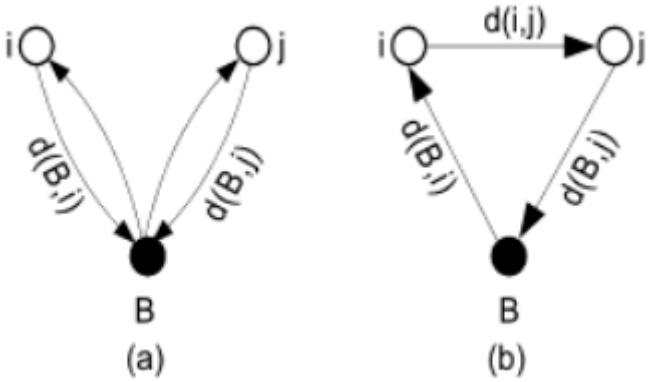
Osnovna ideja *Clark-Wright-ovog algoritma* (1964.) izložena je prilikom razmatranja problema trgovačkog putnika. Ovaj algoritam je jedan od najčešće primjenjivanih heurističkih pristupa rješavanja zadataka problema usmjeravanja vozila, u literaturi poznato kao VRP. Algoritam polazi od početnog rješenja u kojem se nalazi *n*-1 ruta koje se formiraju na način da se po jedno vozilo upućuje iz baze, odnosno skladišta do jednog potrošača te se vraća u skladište, početnu točku. Zatim se interaktivno, iz koraka u korak spajaju po dvije putanja koje donose najveću uštedu, a da pritom zadovoljavaju ograničenja zadataka algoritma [6].

Clark-Wright-ova metoda razvijena je za problem usmjeravanja vozila s ograničenim kapacitetom u literaturi poznato kao CVRP (eng. *Capacitated Vehicle Routing Problem*), Problem usmjeravanja vozila s ograničenjima kapaciteta. Algoritam započinje od rješenja gdje svaka ruta ima jedno skladište i jednog korisnika. Cilj svake pojedine iteracije algoritma jest sjedinjavanje dviju ruta prema kriteriju maksimalne uštede, odnosno kriterij gdje se odabiru uštede udaljenosti dobivene pomoću formule (4), rangirane od najveće prema najmanjoj. Redoslijedom se odabiru dobivene uštede uz zadovoljenje određenih uvjeta prilikom projektiranja ruta. Kasnije u radu, detaljnije je objašnjen način izračuna i odabira ušteda.

[3] Pohlepni (*greedy*) algoritmi generiraju rješenje promatranog problema u proceduri „*korak po korak*“. Pohlepni ili proždrljivi algoritmi u svakom koraku biraju odgovarajuću promjenljivu vrijednost tako da maksimalno moguće u okviru tog koraka povećaju, odnosno smanje trenutnu vrijednost definirane kriterijske funkcije.

Algoritam se izvršava u vremenu složenosti $O(n^2 log(n))$, ali kompleksnost algoritma može se reducirati koristeći prikladne podatkovne strukture. Algoritam implicitno ne uvažava fiksne troškove vozila i veličinu flote. Uključenje troškova vozila moguće je dodavanjem konstante na svaku cijenu luka, odnosno rute kretanja vozila. Unatoč povećanju troška može se postići rješenje i s fiksnim brojem vozila [7].

Čvor B na slici označava polazni čvor te čvor u koji se vozilo ili drugi entitet vraća.



Slika 8. Izračunavanje ušteda, [6]

Na slici 8. (a), prikazana je prva moguća strategija kretanja vozila. Vozilo kreće iz baze (čvor *B*) te posjećuje čvor *i*, vraća se u bazu, posjećuje čvor *j* i ponovno se vraća u bazu. U ovom slučaju ukupna udaljenost uz pretpostavku ($d(i, j) = d(j, i)$ za $\forall(i, j)$), jednaka je formuli (1) [6]:

$$2d\,(B,i) + 2d\,(B,j) \tag{1}$$

Gdje je: d = udaljenost

B = početni i završni čvor (baza)

i = prvi čvor u grani

j = drugi čvor u grani

Slika 8. (b) prikazuje poboljšanu strategiju kretanja vozila. U slučaju strategije kretanja prikazane na slici 8. (b), ukupna udaljenost jednaka je formuli (2) [6]:

$$d(B,i) + d(i,j) + d(B,j) \tag{2}$$

Ušteda $s(i, j)$ koju vozilo ostvaruje kada čvorove i i j spoji u jednu rutu, slika 8. (b) jednaka je formuli (3) [6]:

$$S(i,j) = 2d(B,i) + 2d(B,j) \; - \; (2d(B,i) + d(i,j) + d(B,j)) \tag{3}$$

Odnosno, kada se formula (3) uredi, dobije se (4):

$$S(i,j) = d(B,i) \; + \; d(B,j) \; - \; d(i,j) \tag{4}$$

Veća vrijednost uštede *s(i,j),* pokazatelj je da je čvorove *i* i *j* najbolje spojiti u jednu rutu.

Postupak izvršavanja *Clark-Wright-ovog algoritma* u ovom slučaju podijeljen je na dva glavna koraka koji se dijele na dodatan broj koraka. Algoritam započinje konstrukcijom i određivanjem svih međusobnih udaljenosti između lokacija, zatim izračun ušteda prema formuli (4), nakon toga sortiranje ušteda od najveća prema najmanjoj [8]:

1. Inicijalizacija:

1. Konstruirati elementarne rute (0; *i*;0) ∀ *i* = 1, … , *n* i odrediti dužinu svih ruta (5)

$$F \; = \sum_{i \in c} d_{0i} \; + \; d_{i0} \tag{5}$$

2. Izračunati uštede *Sij*, ∀(*i*, *j*) ∈ *L* prema formuli (6):

$$Sij \; = \; d_{i0} \; + \; d_{0j} \; - \; d_{ij}, \forall (i,j) \; \in \; L \tag{6}$$

3. Sortirati uštede od najveće prema najmanjoj.

Nakon izvršenih radnji, započinje konstrukcija ruta uz zadovoljenje određenih uvjeta koji su navedeni u nastavku:

2. Za svaki element sortirane liste ušteda *Sij*:

1. Odrediti:
   - da li su *i* i *j* u različitim rutama prvi ili posljednji čvorovi,
   - da li je zbroj kapaciteta te dvije rute manji od kapaciteta vozila.

2. Ukoliko su uvjeti zadovoljeni, sljedeći korak je:
   - povezati te dvije rute
   - smanjiti ukupnu dužinu ruta za *Sij*, tj. $F \leftarrow F - Sij$,
   - izračunati kapacitet nove rute kao zbroj kapaciteta ruta od kojih je ruta formirana,
   - eliminirati grane starih ruta

Clark-Wright-ov algoritam „ušteda“ za projektiranje ruta transportnih sredstava može se prikazati i na sljedeći način [6]:

Korak 1: Izračunati uštede $s(i, j) = d(B, i) + d(B, j) - d(i, j)$ za svaki par (i, j) čvorova koje je potrebno opslužiti.

Korak 2: Izvršiti rangiranje svih ušteda te ih poredati po veličini. Izraditi listu ušteda koja započinje najvećom uštedom

Korak 3: Pri razmatranju uštede $s(i, j)$ odgovarajuću granu (i, j) uključiti u djelomičnu rutu, ukoliko se pri tome ne krše postojeća operativna ograničenja i ukoliko:
(a) Čvor *i* i čvor *j* već nisu uključeni u neku postojeću djelomičnu rutu,
(b) Je jedan od čvorova *i* ili *j* već uključen u neku postojeću djelomičnu rutu i ukoliko taj čvor nije unutarnji čvor u ruti,
(c) Su oba čvora *i* i *j* uključeni u dvije različite djelomične rute i niti jedan od navedenih čvora nije unutarnji čvor u tim rutama u kojem je slučaju moguće spojiti djelomične rute u jednu rutu.

Korak 4: Kada je lista ušteda realizirana do kraja, potrebno je završiti s algoritmom.

Također postoje sekvencijalna i simultana metoda *Clark-Wright-ovog algoritma „ušteda“*. Prilikom korištenja sekvencijalne metode projektiranja ruta transportnih sredstava, rute se projektiraju na principu sekvence – jedna po jedna. Točnije, za početak se projektira početna, odnosno prva ruta, zatim se iz liste ušteda odabire najveća postojeća ušteda te se u potpunosti projektira druga ruta, nakon toga ponovni povratak u listu ušteda te ponavljanje prethodnog koraka. Kod verzije simultanog projektiranja istovremeno se vrši projektiranje svih ruta. Pri nailasku na par čvorova koji nije bio uključen niti u jednu postojeću rutu kod simultanog pristupa, vrši se „otvaranje“ nove rute (Kod sekvencijalnog pristupa ovakav par čvorova se „preskače“ te ostavlja za daljnja razmatranja, obzirom da se kod sekvencijalnog pristupa prolaskom kroz listu ušteda vodi računa o samo jednoj ruti). U slučaju simultanog pristupa, jednim prolaskom kroz listu ušteda izvršava se projektiranje svih ruta transportnih sredstava [6].

Primjer 1.:

Zadana je matrica međusobnih udaljenosti među gradovima. Potrebno je izračunati najkraći put između gradova, tako da svaka lokacija bude posjećena samo jednom te da početna točka, odnosno čvor ujedno bude i završna točka.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	35	68	49	44	34	68	38
x_1	35	∞	20	14	36	23	17	26
x_2	68	20	∞	7	33	18	29	32
x_3	49	14	7	∞	21	8	42	37
x_4	44	36	33	21	∞	13	26	54
x_5	34	23	18	8	13	∞	9	41
x_6	68	17	29	42	26	9	∞	14
x_7	38	26	32	37	54	41	14	∞

U prvom koraku potrebno je izračunati uštede $S(i, j)$ pomoću formule (4). Ušteda za prvu relaciju, od čvora x_1 do čvora x_2 računa se na način da se udaljenost od čvora x_1 do čvora x_2 iznosa 20 km oduzme od zbroja dviju udaljenosti, udaljenosti od početnog čvora x_0 do čvora x_1 koja iznosi 35 km i udaljenosti od početnog čvora x_0 do čvora x_2 duljine 68 km. Nakon izračuna, vrijednost uštede iznosi 83 km. Na jednak se način izračunavaju uštede za preostale kombinacije čvorova:

$S_{12} = d(0,1) + d(0,2) – d(1,2) = 35 + 68 – 20 = 83$ km

$S_{13} = 35 + 49 – 14 = 70$ km

$S_{14} = 35 + 44 – 36 = 43$ km

$S_{15} = 35 + 34 – 23 = 46$ km

$S_{16} = 35 + 68 – 17 = 86$ km

$S_{17} = 35 + 38 – 26 = 47$ km

$S_{23} = 68 + 49 – 7 = 110$ km

$S_{24} = 68 + 44 – 33 = 79$ km

$S_{25} = 68 + 34 – 18 = 84$ km

S_{26} = 68 + 68 – 29 = 107 km

S_{27} = 68 + 38 – 32 = 74 km

S_{34} = 49 + 44 – 21 = 72 km

S_{35} = 49 + 34 – 8 = 75 km

S_{36} = 49 + 68 – 42 = 75 km

S_{37} = 49 + 38 – 37 = 50 km

S_{45} = 44 + 34 – 13 = 65 km

S_{46} = 44 + 68 – 26 = 86 km

S_{47} = 44 + 38 – 54 = 28 km

S_{56} = 34 + 68 – 9 = 93 km

S_{57} = 34 + 38 – 41 = 31 km

S_{67} = 68 + 38 – 14 = 92 km.

U drugom koraku potrebno je izvršiti rangiranje svih ušteda te ih poredati prema veličini, odnosno izraditi listu ušteda koja započinje najvećom uštedom. U tablici 1. nalaze se rangirane uštede, dobivene pomoću formule (4). Tablica je podijeljena na tri stupca, a svaki od stupaca podijeljen je na dva dijela. U lijevom dijelu svakog stupca nalaze se grane, odnosno relacije između čvorova, dok se u desnom dijelu nalaze vrijednosti istih.

Tablica 1. Lista rangiranih ušteda prema veličini

Grana ***(i,j)***	**Ušteda** ***s(i,j)***	**Grana** ***(i,j)***	**Ušteda** ***s(i,j)***	**Grana** ***(i,j)***	**Ušteda** ***s(i,j)***
(2,3)	110	**(1,2)**	83	**(4,5)**	65
(2,6)	107	**(2,4)**	79	**(3,7)**	50
(5,6)	93	**(3,5)**	75	**(1,7)**	47
(6,7)	92	**(3,6)**	75	**(1,5)**	46
(1,6)	86	**(2,7)**	74	**(1,4)**	43
(4,6)	86	**(3,4)**	72	**(4,7)**	28
(2,5)	84	**(1,3)**	70	**(5,7)**	31

Nakon što su uštede izračunate i rangirane kao u tablici 1., započinje sljedeći korak, odnosno projektiranje rute.

U trećem koraku započinje izrada rute prema rangiranim uštedama, uz zadovoljavanje navedenih ograničenja:

- Prema rangiranju, čvorovi najveće uštede predstavljaju i početak rute:

(2,3) => **0** ↔ **2** ↔ **3** ↔ **0**

- Sljedeća ušteda po veličini sadrži čvorove **2** i **6**, obzirom da čvor **2** u ruti već postoji, a nije unutarnja točka, čvor **6** može se uvrstiti u rutu povezan s čvorom **2** kako je i navedeno u uštedi:

(2,6) => **0** ↔ **6** ↔ **2** ↔ **3** ↔ **0**

- Prema redoslijedu, sljedeća ušteda je **(5,6)**. U ruti se nalazi čvor **6** koji je poveznica kod uštede **(5,6)**, čvor **6** nije unutarnja točka u ruti te su ograničenja zadovoljena i ušteda se može uvrstiti u rutu, odnosno čvor **5** može se nadovezati na čvor **6**:

(5,6) => **0** ↔ **5** ↔ **6** ↔ **2** ↔ **3** ↔ **0**

- Uštede **(6,7)**, **(1,6)**, **(4,6)** se ne upotrebljavaju pri projektiranju rute jer njihov zajednički čvor je čvor **6**, koji je ujedno i unutarnja točka djelomične rute i direktna poveznica čvorova nije moguća. Da bi povezivanje čvorova bilo moguće, jedan od čvorova u uštedi mora biti vanjski čvor u ruti, u ovom slučaju to su čvorovi **3** i **5**. Korištenje uštede **(2,5)** također nije moguće jer se oba čvora već nalaze u djelomičnoj ruti.
- Kod ušteda **(1,2), (2,4)** i **(2,7)** zajednički čvor **2** je unutarnja točka u djelomičnoj ruti, stoga se i te uštede preskaču jer direktno povezivanje nije moguće, a svi čvorovi kod ušteda **(3,5) i (3,6)** već se nalaze u ruti.
- Sljedeća moguća ušteda za uvrštavanje u rutu je ušteda **(3,4)** jer se čvor **3** nalazi u ruti i nije unutarnja točka, već vanjska, stoga je moguće direktno povezati čvor **4** s čvorom **3**:

(3,4) => **0** ↔ **5** ↔ **6** ↔ **2** ↔ **3** ↔ **4** ↔ **0**

- Zajednički čvor kod ušteda **(1,3)** i **(3,7)** je čvor **3**, međutim on je unutarnja točka u djelomičnoj ruti te se ne može upotrijebiti u projektiranju rute, dok su oba čvora kod

uštede **(4,5)** već uključeni u rutu. Obzirom da kod uštede **(1,7)** niti jedan čvor nije uključen u djelomičnu rutu, izrađuje se nova djelomična ruta koja glasi:

(1,7) => 0 ↔ 1 ↔ 7 ↔ 0

- Postoje dvije djelomične rute koje je potrebno spojiti u jednu cjelokupnu rutu:

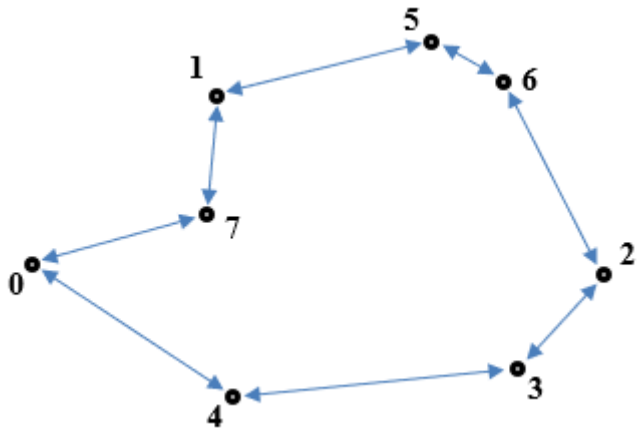
0 ↔ 5 ↔ 6 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 0

0 ↔ 1 ↔ 7 ↔ 0

- Ušteda **(1,5)** povezati će navedene dvije rute u jednu jedinstvenu rutu, jer čvor **1** i čvor **5** su vanjske točke u djelomičnim rutama, stoga su ograničenja zadovoljena i direktna veza među čvorovima je moguća:

(1,5) => 0 ↔ 7 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 6 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 0

Lista ušteda realizirana je do kraja, obzirom da je ruta kompletirana, ostale uštede se ne uzimaju u obzir pri projektiranju te algoritam završava. Na slici 9., nalazi se grafički prikaz rješenja rute iz primjera 1.



Slika 9. Rješenje Clark-Wright-ovog algoritma

4.2. Clark-Wright-ov algoritam ušteda – metoda s indikatorom *T*

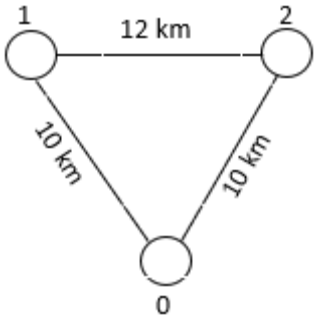
Clark–Wright-ov algoritam koristi se kod problema sa serijom ponavljanja, sve dok se ne dobije prihvatljivo rješenje. Praktična upotreba ovog algoritma ne mora nužno biti optimalna, ali lakoća upotrebe algoritma na probleme usmjeravanja vozila čini ga iznimno korisnim alatom. Logika samog algoritma, koja uključuje koncept uštede, služi kao baza za

sofisticiranije tehnike koje koriste mnogi komercijalni softveri. *Clark–Wright-ov algoritam* i koncept uštede omogućuje uštede koje mogu biti realizirane stvaranjem parova kod dostave u sustavu koji se sastoji od centralnog skladišta koje opslužuje vanjske centre u bilo kojem obliku [9].

Jednostavan primjer upotrebe algoritma *Clark-Wright-ovog algoritma ušteda – metode s indikatorom T* nalazi se u nastavku [9]:

Primjer 2.

Centralno skladište (0) nalazi se 10 kilometara udaljeno od dva dostavna mjesta (1,2), dok je međusobna udaljenost između dostavnih mjesta 12 kilometara.



Slika 10. Metoda s indikatorom T, primjer 1.

U ovom primjeru *Clark-Wright-ov algoritam* prvo prati troškove vožnje od centralnog skladišta do jednog dostavnog mjesta i povratak do centralnog skladišta, zatim do drugog dostavnog mjesta pa ponovno povratak do centralnog skladišta. Stoga je trošak jednak zbroju troškova za svaki kilometar od početne točke, centralnog skladišta do jednog dostavnog mjesta ($0 \rightarrow 1$) i povratak u centralno skladište ($2C_{01}$) te vožnja od centralnog skladišta do drugog dostavnog mjesta ($0 \rightarrow 2$) i povratak u skladište ($2C_{02}$). Formula (7) prikazuje ukupni trošak:

$$Ukupni\ trošak = 2C_{01} + 2C_{02} \tag{7}$$

Ukupni trošak dostave prema formuli (7) iznosio bi: 2 x 10 (km) + 2 x 10 (km) = 40 km

Clark-Wright algoritam nadalje uzima u obzir uštede koje se mogu ostvariti na putu od centralnog skladišta do jednog dostavnog mjesta i povratak do skladišta te od skladišta do drugog dostavnog mjesta i ponovni povratak do skladišta. Navedena ruta omogućuje uštedu troškova jedne dostave do prvog dostavnog mjesta i povratak do skladišta i ponovno do drugog

dostavnog mjesta i povratak do skladišta, ali dodaje troškove dostave od prvog do drugog dostavnog mjesta. Koncept izračuna ušteda jednak je kao i kod osnovnog *Clark-Wright-ovog algoritma*. Ukupna ušteda S_{ij} dobivena povezivanjem bilo koje dvije lokacije prikazana je u formuli (8):

$$S_{ij} = C_{0i} + C_{0j} - C_{ij} \tag{8}$$

Ušteda na ovom primjeru prema formuli (8) iznosi:

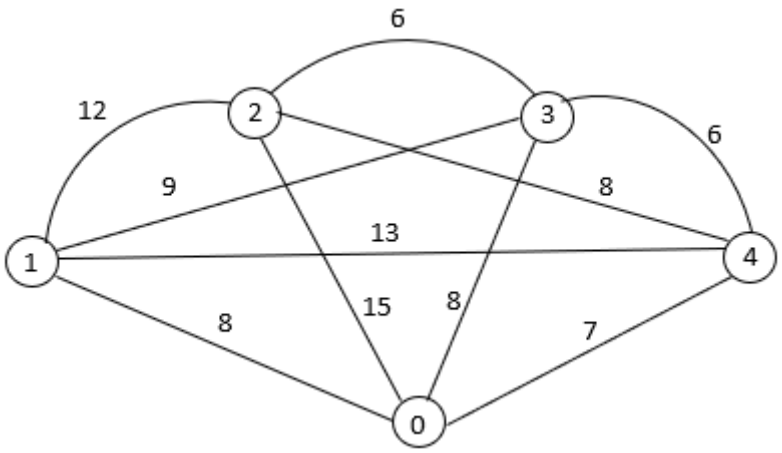
$$S_{12} = C_{01} + C_{02} - C_{12}$$

$$S_{12} = 10 + 10 - 12 = 8$$

Povezivanje dvaju dostavnih mjesta u jednu rutu dobiva se ušteda od 8 km.

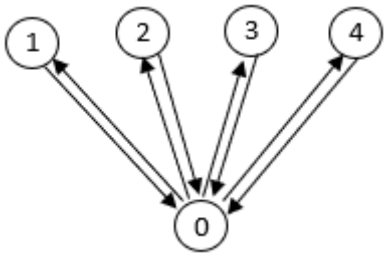
Primjer 3. :

Na slici 11. nalazi se distribucijska mreža s prikazanim vrijednostima međusobnih udaljenosti između čvorova. Potrebno je odrediti najkraći put uz uvjet da se krene iz čvora 0, da se svaki čvor posjeti samo jednom te da završetak rute bude ponovno u čvoru 0 [9].



Slika 11. Metoda s indikatorom T, primjer 2., [9]

Za početak potrebno je izraditi polu-matricu udaljenosti. Dovoljno je izraditi polu-matricu, a ne cjelokupnu matricu, jer je graf simetričan, odnosno jednaka je udaljenost u oba smjera putovanja.



	1	2	3	4
0	8	15	8	7
1		12	9	13
2			6	8
3				6

Slika 12. Distribucijska mreža 1., [9]

U sljedećem koraku potrebno je izračunati uštede za svaki vanjski par lokacija te izraditi novu polu-matricu ušteda. Uštede se računaju prema formuli (8).

$$S_{12} = 8 + 15 - 15 = 11$$

Na jednak način računaju se i ostale vrijednosti ušteda.

	1	2	3	4
0	...	...	...	...
1		11	7	2
2			17	14
3				9

Nakon izračuna ušteda, u polu-matricu potrebno je unijeti vrijednosti *T* u odgovarajuće rubrike, odnosno u područja polazišta. Kalkulacije uštede za povezivanje svakog para temelji se na mogućnosti uštede uzimajući u obzir trošak kružne dostave vozila do svakog para. Indikator *T* pokazati će jesu li dvije lokacije npr. *i* i *j* ili 0 (početna točka) i *j* direktno povezane. Indikator *T* može imati jednu od tri vrijednosti:

a) $T = 2$ – kada vozilo ide iz početne točke do jedne lokacije i povratak do početne točke. $T_{0j} = 2$ i samo u prvom retku matrice. Vrijednost indikatora *T* unosi se u matricu i zaokružuje kako bi se razlikovala od ukupne uštede. $T = 2$ označava kružnu, dvosmjernu dostavu, odnosno dostavu s povratkom.
b) $T = 1$ – kada vozilo ide direktno do lokacije *i* i *j*. To se prikazuje kao $T_{ij} = 1$ i može se uvesti na bilo koje mjesto u matrici. $T = 1$ označava jednosmjernu dostavu.

c) $T = 0$ – kada vozilo ne ide direktno do lokacija i i j. Prikazuje se kao $T_{ij} = 0$. $T = 0$ pokazuje da niti jedno putovanje nije učinjeno između parova lokacije.

	1	2	3	4
0	(2)	(2)	(2)	(2)
1	11	7	2	
2	17	14		
3	9			

Prema slici 12.:

Prva ruta: 0 – 1 – 0

Druga ruta: 0 – 2 -0

Treća ruta: 0 – 3 – 0

Četvrta ruta: 0 – 4 – 0

Sljedeći korak je odrediti najveću vrijednost uštede u matrici. Ako se maksimalna ušteda prikazuje u ćeliji i i j u matrici, tada lokacije i i j mogu biti povezane ukoliko su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

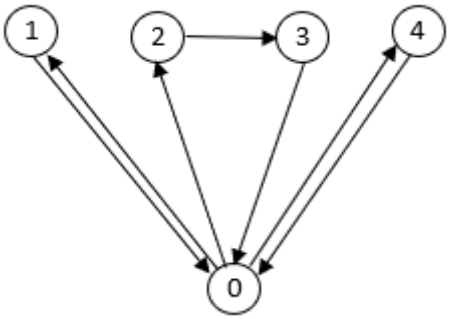
- T_{0i} i $T_{0j} > 0$
- Lokacije i i j nisu već na istoj ruti

	1	2	3	4
0	T_{01}	T_{02}	T_{03}	T_{04}
1	11	7	2	
2	17	14		
3	9			

Primjerice odabire se ušteda iznosa 17 iz polu-matrice udaljenosti, a ona obuhvaća čvorove 2 i 3. Prvi uvjet govori da se ušteda može koristiti ukoliko su T_{02} i T_{03} veći od nule, a

drugi uvjet označava da barem se barem jedan od čvorova 2 ili 3 ne nalazi u već postojećoj djelomičnoj ruti. U nastavku je dano detaljnije pojašnjenje.

U navedenom primjeru ćelija (2,3) ima najveću vrijednost uštede (17). T_{02} i T_{03} su veći od nule, a lokacije 2 i 3 nisu na istoj ruti. Obzirom da su uvjeti zadovoljeni, u ćeliji (2,3) označi se vrijednost $T_{23} = 1$, što označuje jednosmjernu rutu između lokacija 2 i 3. Ovom radnjom omogućena je jednosmjerna ruta između lokacija 2 i 3, a onemogućena jednosmjerna ruta od lokacije 2 do početne točke (0) te jednosmjerna ruta od početne točke (0) do lokacije 3. Stoga je potrebno smanjiti vrijednost $T = 2$ u ćelijama (0, 2) i (0,3) na $T = 1$. Sljedeća matrica prikazuje izvedene izračune te nove vrijednosti T za novo ponavljanje, a grafički prikaz prikazuje 3 nove jednosmjerne rute.



	1	2	3	4
0	(2)	(1)	(1)	(2)
1	11	7	2	
2		(1) 17	14	
3			9	

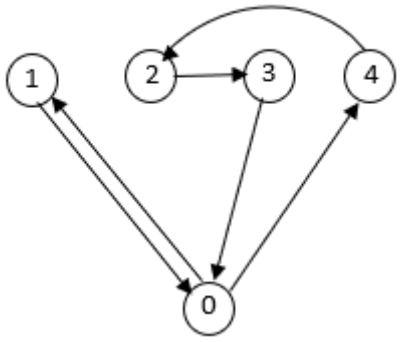
Slika 13. Ruta 0-2-3-0, [9]

Prva ruta: 0 – 1 – 0

Druga ruta: 0 – 2 – 3 – 0

Treća ruta: 0 – 4 - 0

U sljedećem koraku potrebno je uvrstiti sljedeću najveću vrijednost uštede, a da su pritom zadovoljena ograničenja. Ćelija (2,4) sadrži najveću vrijednost uštede (14) koja nije iskorištena u izračunu. T_{02} i T_{04} su veći od nule i lokacije 2 i 4 nisu na istoj ruti. Ove dvije lokacije mogu se povezati. $T_{24} = 1$ upiše se u ćeliju (2,4) te se vrijednost indikatora T, smanji u ćelijama (0,2) i (0,4) na jedno putovanje kao u prethodnom koraku.



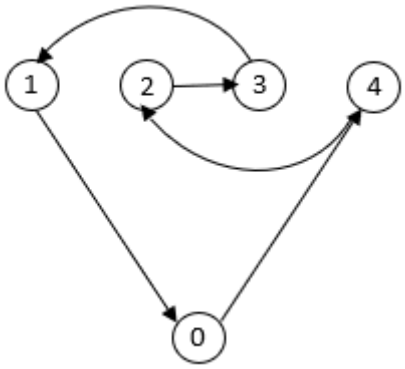
	1	2	3	4
0	(2)	(0)	(1)	(1)
1	11	7	2	
2		(1) 17	(1) 14	
3			9	

Slika 14. Ruta 0-4-2-3-0, [9]

Prva ruta: 0 – 1 – 0

Druga ruta: 0 – 4 – 2 – 3 – 0

U ćeliji (1,2) sljedeća je najveća vrijednost uštede, međutim u tom slučaju T_{01} je veći od nule, ali T_{02} nije, stoga bi ovo povezivanje narušilo poštivanje ograničenja. Sljedeća najveća ušteda je u ćeliji (3,4), T_{03} i T_{04} su veći od nule, ali lokacije 3 i 4 već se nalaze na istoj ruti, što narušava ograničenja. Zatim se odabere ušteda (7) u ćeliji (1,3), T_{01} i T_{03} su veći od nule, a lokacije 1 i 3 ne nalaze se na istoj ruti i ne postoje druga ograničenja, zato se ove dvije lokacije mogu povezati. U ćeliju (1,3) unese se $T = 1$ i smanji se vrijednost T u ćelijama (0,1) i (0,3) za jedan kao u prethodnom koraku, što rezultira smanjenjem jednog putovanja od skladišta do lokacije 1 i jedno putovanje od lokacije 3 do centralnog skladišta. Obzirom da je graf simetričan, nije bitno u kojem je smjeru ruta usmjerena.



	1	2	3	4
0	(1)	(0)	(0)	(1)
1	11	(1) 7	2	
2		(1) 17	(1) 14	
3			9	

Slika 15. Kompletirana ruta, [9]

Ruta: 0 – 4 – 2 – 3 – 1 – 0

Za usporedbu rezultata u svrhu optimizacije distribucijske mreže na unaprijed definiranim rutama kretanja vozila korištenjem *Clark-Wright-ovog algoritma*, uzeti će se u obzir i druge matematičke metode koje nude optimizaciju distribucijske mreže, odnosno *metode grananja i ograničavanja, metoda najbližeg susjeda* i *Christofides-ov algoritam*.

4.3. Metoda grananja i ograničavanja

Euler je prvi počeo razmatrati matematičke probleme slične problemu trgovačkog putnika, a zanimalo ga je kako skakač na šahovskoj ploči može posjetiti svih 64 mjesta, tako da svako mjesto prođe samo jednom. Irski matematičar Sir William Rowan Hamilton i britanski matematičar Thomas Penyngton Kirkman su početkom 20. stoljeća razmatrali probleme koji se svode na problem trgovačkog putnika. Opća forma trgovačkog putnika pojavljuje se 30-ih godina 20. stoljeća, a pojam „trgovački putnik“ prvi je put upotrijebljen 1932. godine od strane Karla Mengera [10].

Dantzig, Fulkerson i Johnson su 1954. godine riješili problem trgovačkog putnika koji je sadržavao 49 gradova. D. Applegate, R. Bixby, V. Chvátal, W. Cook i K. Helsgaun su 2004. godine uspjeli riješiti problem trgovačkog putnika s 24978 gradova. Slika 16. prikazuje problem trgovačkog putnika koji ima za cilj obići svih 24978 gradova [6].

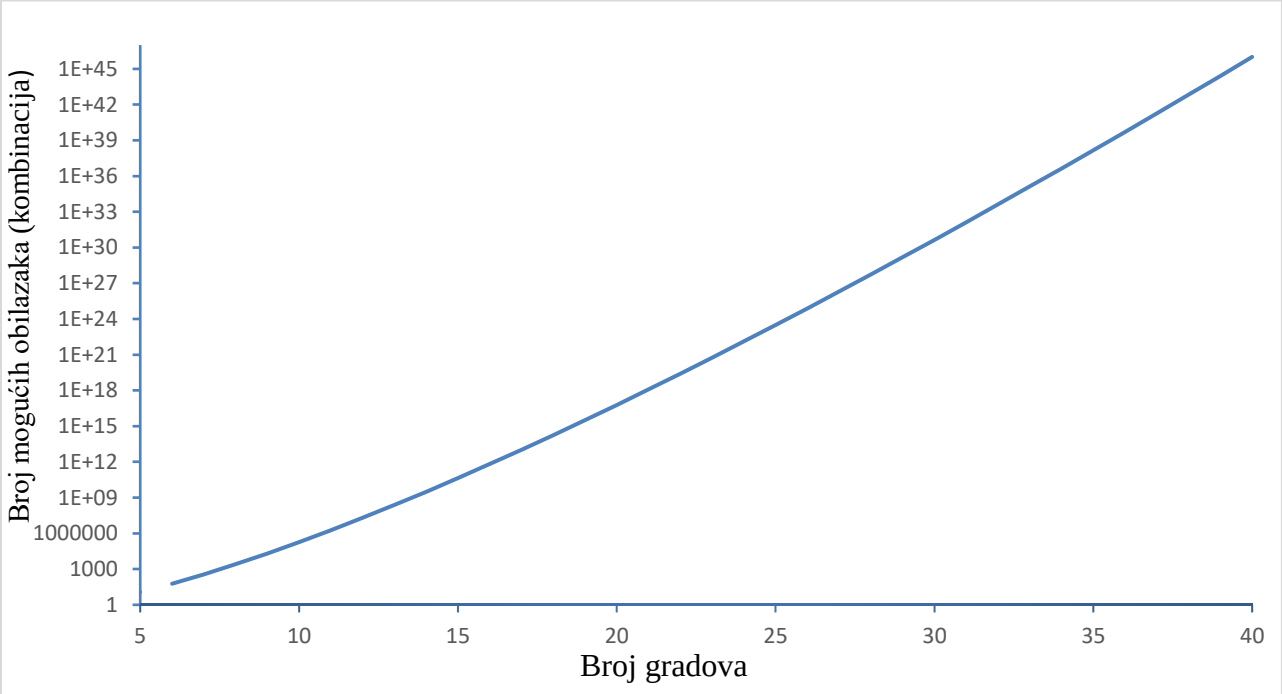


Slika 16. Rješenje problema trgovačkog putnika s 24978 gradova, [11]

Hamiltonov ciklus je ciklus u neusmjerenom grafu koji prolazi kroz sve vrhove grafa isključivo jednom, osim vrha koji je početni te krajnji vrh ciklusa.

Hamiltonov graf je graf koji sadrži i Hamiltonov ciklus. Kada graf sadrži više Hamiltonovih ciklusa i ukoliko je cilj pronaći najkraći ciklus, tada se taj problem naziva problemom trgovačkog putnika. Da bi graf imao rješenje problema trgovačkog putnika, mora sadržavati barem jedan Hamiltonov ciklus, odnosno mora biti Hamiltonov graf.

Problem trgovačkog putnika temelji se na principu tako da postoje unaprijed definirani gradovi te međusobne udaljenosti između njih. Trgovački putnik ima za cilj obići odnosno posjetiti svaki grad samo jednom te se vratiti u grad iz kojeg je krenuo. Rješenje koje daje postupak računanja problema trgovačkog putnika je redoslijed obilaska gradova, a da ukupna duljina puta bude minimalna. Problem trgovačkog putnika ima faktorijelnu složenost $O(n!)$. U potpunim grafovima s N vrhova, broj Hamiltonovih ciklusa u usmjerenim grafovima je $(N\text{-}1)$, a u neusmjerenim $N!/2N$, odnosno $((N\text{-}1)!)/2$, (obzirom da su po dvije rute identične, ali inverzne) te broj kombinacija raste eksponencijalno s brojem gradova. Izračun prema navedenim formulama za primjerice 11 gradova, postoji 1814400 mogućih kombinacija, odnosno redoslijeda obilazaka prikazan je grafikonom 2. [12].



Grafikon 2. Složenost problema trgovačkog putnika

Problem trgovačkog putnika (*Traveling Salesman Problem, TSP*) je problem diskretne i kombinatorne optimizacije. Problem kombinatorne optimizacije podrazumijeva nalaženje minimuma funkcije *f* na skupu *S*, tj.:

$$\min_{X \in S} f(x) \tag{9}$$

Gdje je S diskretan, konačan ili prebrojivo beskonačan skup. Skup S naziva se dopustivim skupom, funkcija *f* naziva se kriterijumskom funkcijom, a točke $X \in S$ nazivaju se dopustivim rješenjima. Pod optimalnim rješenjima podrazumijevaju se rješenja x^* za koja vrijedi:

$$f(x*) = \min_{X \in S} f(x) \tag{10}$$

U najvećem broju problema kombinatorne optimizacije u području prometa i transporta dopustivi skup *S* je konačan [6].

Problem trgovačkog putnika pripada skupini *NP*-teških problema u matematičkoj teoriji. Svojstvo *NP*-teških problema je da pronalazak egzaktnog rješenja problema traje iznimno dugo jer algoritmi rješavanja imaju veliku računalnu složenost. Složenost problema moguće je vidjeti kada se prebroje sva moguća rješenja problema trgovačkog putnika te kada se usporedi rast broja rješenja s brojem bridova grafa na kojem se rješava problem trgovačkog putnika [10].

Kao primjer pretpostavlja se da problem trgovačkog putnika sadrži 1, 2, 3, …, *N* gradova. Neka je c_{ij} udaljenost od grada *i* do grada *j*, a neka je $c_{i_1 i_2} = M$ izrazito veliki broj. $c_{i_1 i_2} = M$ osigurava da se u grad i_2 ne ide odmah nakon što se napusti grad i_1.

Neka je:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ ako osoba ide iz grada } i \text{ u grad } j \\ 0 \text{ u ostalim slučajevima} \end{cases}$$

Rješenje problema trgovačkog putnika može se naći rješavanjem sljedećeg modela cjelobrojnog linearnog programiranja [13]:

$$min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, (i = 1, \dots, n) \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, (j = 1, \dots, n) \tag{13}$$

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 \ (za\ i \neq j; i, j = 2,3, \dots, n) \tag{14}$$

$$x_{ij} = 0\ ili\ 1, u_i, u_j \geq 0 \tag{15}$$

Funkcija cilja (11) označuje ukupnu udaljenost između gradova uključenih u rutu. Ograničenje (12) osigurava da osoba ili entitet u svaki grad stigne samo jednom, dok ograničenje (13) osigurava da osoba svaki grad napusti samo jednom. Ograničenje (14) u modelu je ključno jer osigurava sljedeće [13]:

- Bilo koji skup x_{ij} koji sadrži podrutu biti će nemoguć (narušit će ograničenje (14)).
- Bilo koji skup x_{ij} koji formira rutu (uključujući sve gradove) bit će moguć (postojat će skup od u_j) koji zadovoljava ograničenje (14)).
- Na sljedećem primjeru bit će prikazano da će bilo koji skup od x_{ij} koji sadrži podrutu narušiti ograničenje (14). Pretpostavka je da svaka osoba ili entitet treba obići 5 gradova, odnosno lokacija, a da postoji $x_{14} = x_{31} = x_{52} = x_{25} = x_{43} = 1$. Navedena ruta sadrži dvije podrute 1-4-3-1 i 2-5-2. U sljedećem koraku potrebno je odabrati podrutu koja ne sadrži grad 1 (2-5-2) te se podruta uvrsti u formulu ograničenja (4) koja odgovaraju pravcima u toj podruti. Dobiveno rješenje je: $u_2 - u_5 + 5x_{25} \leq 4$, i $u_5 - u_2 + 5x_{52} \leq 4$. Zbrajanjem tih ograničenja dobiveni rezultat glasi: $5(x_{25} + x_{52}) \leq 8$. Rezultat isključuje mogućnost da je $x_{25} + x_{52} = 1$.

- Sljedeći korak prikazuje da za bilo koji skup od x_{ij} koji ne sadrži podrutu postoje vrijednosti za u_j koje će zadovoljiti ograničenja u formuli (14).
- Pretpostavka je da je grad 1 prvi koji će biti posjećen. Neka je t_i = pozicija u ruti gdje je grad *i* posjećen.
- Stavljajući $u_i = t_i$ biti će zadovoljena sva ograničenja iz formule (14)
- Razmatra se ruta 1-4-3-2-5-1. Potrebno je dokazati da će s odabirom $u_1 = 1$ $u_2 = 4$ $u_3 = 3$ $u_4 = 2$ $u_5 = 5$ za u_i sva ograničenja u formuli (14) biti zadovoljena.
- Za početak razmatra se bilo koje ograničenje koje odgovara pravcu koji ima
- $x_{ij} = 1$. Primjerice ograničenje koje odgovara x_{43} je i $u_4 - u_3 + 5x_{43} \leq 4$. Obzirom da grad 3 slijedi grad 4, $u_4 - u_3 = -1$. Stoga se ograničenje za x_{43} u formuli (14) reducira na $-1 + 5 \leq 4$, što je istinito.
- Nakon toga razmatra se ograničenje koje odgovara onom x_{ij} za koji je $x_{ij} = 0$. Za x_{23} dobije se ograničenje $u_2 - u_3 + 5x_{23} \leq 4$. Dobiven rezultat reducira se na
- $u_2 - u_3 \leq 4$. Pošto je $u_2 \leq 5$, a $u_3 > 1$, $u_2 - u_3$ ne može nadmašiti 4 – 3.
- Ovo je pokazatelj da formulacija definirana modelom (11) do (15) eliminira iz razmatranja sve nizove od *N* gradova koji počinju u gradu 1 i uključuju podrutu. Također je dokazano da navedena formulacija ne eliminira iz razmatranja bilo koji niz od *N* gradova koji počinju u gradu 1, a ne uključuju podrutu.
- Model (11) do (15) može se riješiti primjenom metode grananja i ograničavanja za rješavanje cjelobrojnih linearnih programa s 0-1 varijablama.

Algoritam grananja i ograničavanja (eng: *BnB-Branch & Bound*) opći je algoritam za pronalazak optimalnih rješenja mnogih općenitih optimizacijskih problema. Sastoji se od brojanja svih potencijalnih rješenja, pri čemu se veliki podskupovi loših rješenja odbacuju. Loša rješenja su ona rješenja koja su unutar nekog intervala, odnosno između predefinirane gornje i donje granice. Redoslijed obilaska gradova od strane trgovačkog putnika prvo se rekurzivno grana na dva dijela te tako nastaje struktura stabla. Nakon toga računaju se gornja i donja granica za svaki dobiveni podskup. Ukoliko je donja granica određenog vrha bolja od gornje granice nekog drugog vrha, taj drugi vrh se odbacuje iz pretrage. Rekurzija[4] se zaustavlja onog

[4] U matematici i računarstvu, rekurzija specificira (ili konstruira) klasu objekata ili metoda (ili objekata iz određene klase) definiranjem nekoliko jednostavnih osnovnih slučajeva ili metoda (često samo jednu), i potom definiranjem pravila za razbijanje složenih slučajeva u jednostavnije.

trena kada se skup reducira na jedan element ili kad njegova gornja granica postane jednaka njegovoj donjoj granici [14].

Problem trgovačkog putnika prikazan u matričnom prikazu [14]:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	∞	12	8	10	6
x_2	12	∞	12	5	7
x_3	8	12	∞	8	10
x_4	10	5	8	∞	4
x_5	6	7	10	4	∞

Korak 1: Za početak potrebno je ispisati minimalne vrijednosti iz svakog retka, odnosno, traži se minimalni element u svakom retku (u_i).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	min
x_1	∞	12	8	10	6	6
x_2	12	∞	12	5	7	5
x_3	8	12	∞	8	10	8
x_4	10	5	8	∞	4	4
x_5	6	7	10	4	∞	4
Σ						27

Zatim se oduzimaju sve vrijednosti pojedinog retka s minimalnom vrijednošću istog tog retka. U navedenom matričnom prikazu, prvi redak se oduzima sa 6, drugi redak sa 5, treći redak sa 8 te četvrti i peti redak sa 4. Dobiveni rezultat prikazan je sljedećom matricom:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	∞	6	2	4	0
x_2	7	∞	7	0	2
x_3	0	4	∞	0	2
x_4	6	1	4	∞	0
x_5	2	3	6	0	∞

Korak 2: Izdvojiti minimalni element iz svakog stupca (v_j).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Σ
x_1	∞	6	2	4	0	
x_2	7	∞	7	0	2	
x_3	0	4	∞	0	2	
x_4	6	1	4	∞	0	
x_5	2	3	6	0	∞	
min	0	1	2	0	0	3

Oduzimaju se vrijednosti stupaca s minimalnim vrijednostima stupaca. Prvi, četvrti i peti stupac ostat će nepromijenjeni jer se oduzimaju s nulom, dok se drugi stupac oduzima s jedan, a treći s dva. Dobivena je prva reducirana matrica koja ima barem jednu nulu u svakom retku i svakom stupcu.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	∞	5	0	4	0
x_2	7	∞	5	0	2
x_3	0	3	∞	0	2
x_4	6	0	2	∞	0
x_5	2	2	4	0	∞

Polja koja sadrže nulu su kandidati za uspostavljanje direktne veze među gradovima, odnosno lokacijama.

Korak 3: Donja granica na duljini svih kružnih puteva računa se prema formuli 16:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j \tag{16}$$

Gdje je: u_i = zbroj minimalnih vrijednosti elemenata iz svakog retka

v_j = zbroj minimalnih vrijednosti elemenata iz svakog stupca

Prema formuli (16), donja granica na ovom primjeru iznosi:

$$\text{D. G.} = 27 + 3 = 30$$

Korak 4: Za svako polje s nulom računa se kazna za nekorištenje predložene veze među gradovima na način: kazna na polju (i, j) = minimalan element u retku i + minimalan element u retku j ne uključujući polje (i, j). Primjerice kazna za prvu nulu u retku x_1 i stupcu x_3 računa se tako da se zbroji minimalna vrijednost iz retka koja iznosi 0 s minimalnom vrijednošću stupca koja iznosi 2, stoga je vrijednost kazne 2. Na jednak način izračunava se vrijednost kazne za sljedeću po redu nulu, a to je nula u retku x_1 i stupcu x_5, minimalna vrijednost u retku je 0 te se zbraja s minimalnom vrijednošću iz stupca koja iznosi također 0, vrijednost kazne za navedenu nulu iznosi 0. Po istom principu izračunavaju se kazne za sve preostale nule.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	∞	5	$0^{(0+2)}$	4	$0^{(0+0)}$
x_2	7	∞	5	$0^{(2+0)}$	2
x_3	$0^{(0+2)}$	3	∞	$0^{(0+0)}$	2
x_4	6	$0^{(0+2)}$	2	∞	$0^{(0+0)}$
x_5	2	2	4	$0^{(2+0)}$	∞

Nakon što su izračunate sve kazne za nekorištenje predložene veze među gradovima, odabire se kazna koja ima najveću vrijednost u odnosu na druge. U ovom primjeru postoji čak pet kazni koje sadrže najveću vrijednost koja iznosi dva. Odabire se kazna koja je prva po redu, a to je kazna u redu x_1 i stupcu x_3, na taj način dobivena je prva relacija: $1 \rightarrow 3$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
~~x_1~~	~~∞~~	~~5~~	~~$0^{(2)}$~~	~~4~~	~~$0^{(0)}$~~
x_2	7	∞	5	$0^{(2)}$	2
x_3	$0^{(2)}$	3	∞	$0^{(0)}$	2
x_4	6	$0^{(2)}$	2	∞	$0^{(0)}$
x_5	2	2	4	$0^{(2)}$	∞

Nakon odabira prve relacija, nastaje nova reducirana matrica bez retka x_1 i stupca x_3.

	x_1	x_2	x_4	x_5
x_2	7	∞	0	2
x_3	∞	3	0	2
x_4	6	0	∞	0
x_5	2	2	0	∞

Obzirom da reducirana matrica sadrži stupac (x_1) u kojem se ne nalazi barem jedna nula, potrebno je oduzeti sve elemente stupca x_1 s minimalnom vrijednošću istog stupca koja iznosi 2.

	x_1	x_2	x_4	x_5
x_2	7	∞	0	2
x_3	∞	3	0	2
x_4	6	0	∞	0
x_5	2	2	0	∞
min	2	0	0	0

Nakon operacije oduzimanja, dobivena je nova reducirana matrica u kojoj svi retci i svi stupci sadrže barem jednu nulu.

	x_1	x_2	x_4	x_5
x_2	5	∞	0	2
x_3	∞	3	0	2
x_4	4	0	∞	0
x_5	0	2	0	∞

Sljedeći korak je izračun kazni po jednakom principu kao kod prethodnog izračuna kazni. U retku x_5 minimalan element je 0, a minimalna vrijednost u stupcu x_1 iznosi 4 te zbroj ta dva elementa predstavlja najvišu vrijednost kazne u matrici, stoga je sljedeća relacija: $5 \rightarrow 1$.

	x_1	x_2	x_4	x_5
x_2	5	∞	$0^{(2)}$	2
x_3	∞	3	$0^{(2)}$	2
x_4	4	$0^{(2)}$	∞	$0^{(2)}$
x_5	$0^{(4)}$	2	$0^{(0)}$	∞

Obzirom da se barem jedna nula nalazi u svakom retku i svakom stupcu, nije potrebno oduzimati minimalne elemente stupaca ili redaka s ostalim elementima.

	x_2	x_4	x_5
x_2	∞	0	2
x_3	3	0	2
x_4	0	∞	0

Minimalan element u retku x_4 je 0, dok minimalna vrijednost u stupcu x_2 iznosi 3, prema tome zbroj navedenih vrijednosti iznosi 3 i predstavlja maksimalnu vrijednost kazne, što označava novu relaciju: $4 \rightarrow 2$.

	x_2	x_4	x_5
x_2	∞	$0^{(2)}$	2
x_3	3	$0^{(2)}$	2
x_4	$0^{(3)}$	∞	$0^{(2)}$

U novoj reduciranoj matrici redak x_2 ne sadrži nulu, stoga je potrebno oduzeti minimalni element s ostalim elementima, što u ovom slučaju znači da se redak x_2 oduzima s elementom 2, te se dobije nula na poziciji x_2 i x_5.

	x_4	x_5
x_2	∞	2
x_3	0	2

Vrijednost kazni za obje nule iznosi 2, jer je maksimalni element jednak za obje nule. Za odabir relacije uzimaju se obje kazne, stoga posljednje dvije relacije glase: $2 \rightarrow 5$ i $3 \rightarrow 4$.

	x_4	x_5
x_2	∞	$\boxed{0^{(2)}}$
x_3	$\boxed{0^{(2)}}$	2

Nakon što su izračunate sve relacije, njihovim spajanjem dobivena je konačna ruta:

$4 \rightarrow 2$

$1 \rightarrow 3$

$5 \rightarrow 1$

$2 \rightarrow 5 \Rightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 1$

$3 \rightarrow 4 \Rightarrow 1 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 1$

4.4. Metoda najbližeg susjeda

Metoda najbližeg susjeda ili *heuristika najbližeg susjeda* (eng. *Nearest Neighbour Heuristic* - NNH) je jedan od prvih algoritama za rješavanje problema trgovačkog putnika. Često se upotrebljava kao inicijalno rješenje za testiranje popravljajućih heuristika. Navedena metoda je brza, međutim rješenja su uvijek daleko od optimalnih. Algoritam najbližeg susjeda temelji se na pohlepnom dodavanju najbližeg vrha već dodanim vrhovima u ruti. Metoda najbližeg susjeda zasniva se na ideji pretraživanja događaja koji je najbliži trenutnom događaju. Algoritam se može opisati u tri koraka [10]:

Korak 1: Odabrati vrh 0 za početni vrh,

Korak 2: Iz skupa nedodanih vrhova, odabrati onaj koji je najbliži posljednjem dodanom vrhu i uključiti ga u rutu,

Korak 3: Ponavljati korak 2 sve dok svi vrhovi ne budu uključeni u rutu te tada spojiti početni i posljednji vrh.

Vremenska složenost algoritma najbližeg susjeda algoritma za problem koji uključuje n gradova je $O(n^2)$. Modificirana primjena navedenog algoritma je razmatranje svih n vrhova kao početne točke, čime kompleksnost raste na $O(n^3)$, međutim dobiveno rješenje je bolje i preciznije [10].

Primjer 3.:

Zadana je matrica udaljenosti između gradova, odnosno različitih lokacija. Potrebno je izračunati minimalan put između lokacija pomoću metode najbližeg susjeda.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	35	68	49	44	34	68	38
x_1	35	∞	20	14	36	23	17	26
x_2	68	20	∞	7	33	18	29	32
x_3	49	14	7	∞	21	8	42	37
x_4	44	36	33	21	∞	13	26	54
x_5	34	23	18	8	13	∞	9	41
x_6	68	17	29	42	26	9	∞	14
x_7	38	26	32	37	54	41	14	∞

Postupak izračuna započinje na način da se odabere čvor, lokacije koja predstavlja početnu točku rute. Ruta započinje iz čvora x_0 te se odabire najmanja udaljenost prema jednom od čvorova (lokacija), u ovom primjeru minimalna udaljenost iznosi 34 km, a nalazi se između čvora x_0 i x_5. Odabrana udaljenost je vrijednost početne relacije rute.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	35	68	49	44	34	68	38
x_1	35	∞	20	14	36	23	17	26
x_2	68	20	∞	7	33	18	29	32
x_3	49	14	7	∞	21	8	42	37
x_4	44	36	33	21	∞	13	26	54
x_5	34	23	18	8	13	∞	9	41
x_6	68	17	29	42	26	9	∞	14
x_7	38	26	32	37	54	41	14	∞

$0 \rightarrow 5$

Nakon toga, iz čvora x_5 pretraga po stupcima za najmanju udaljenost prema prvoj mogućoj lokaciji. Rezultat pretrage je stupac, odnosno čvor x_3.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	35	68	49	44	34	68	38
x_1	35	∞	20	14	36	23	17	26
x_2	68	20	∞	7	33	18	29	32
x_3	49	14	7	∞	21	8	42	37
x_4	44	36	33	21	∞	13	26	54
x_5	34	23	18	8	13	∞	9	41
x_6	68	17	29	42	26	9	∞	14
x_7	38	26	32	37	54	41	14	∞

$0 \rightarrow 5 \rightarrow 3$

Na isti način potrebno je odabrati sljedeću minimalnu udaljenosti iz čvora x_3. Minimalni element u retku x_3 je 7, odnosno čvor x_2.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	35	68	49	44	34	68	38
x_1	35	∞	20	14	36	23	17	26
x_2	68	20	∞	7	33	18	29	32
x_3	49	14	7	∞	21	8	42	37
x_4	44	36	33	21	∞	13	26	54
x_5	34	23	18	8	13	∞	9	41
x_6	68	17	29	42	26	9	∞	14
x_7	38	26	32	37	54	41	14	∞

$0 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 2$

Iz čvora x_2 odabire se minimalna vrijednost koja nije u već odabranom stupcu, odnosno da ne bi nastala pod-ruta (*subtour*), biraju se vrijednosti slobodnih čvorova, u ovom slučaju to je vrijednost 20 iz čvora x_1:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	35	68	49	44	34	68	38
x_1	35	∞	20	14	36	23	17	26
x_2	68	20	∞	7	33	18	29	32
x_3	49	14	7	∞	21	8	42	37
x_4	44	36	33	21	∞	13	26	54
x_5	34	23	18	8	13	∞	9	41
x_6	68	17	29	42	26	9	∞	14
x_7	38	26	32	37	54	41	14	∞

$0 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

Ruta je usmjerena od čvora x_1 prema čvoru x_6 jer minimalna udaljenost iznosi 17:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	35	68	49	44	34	68	38
x_1	35	∞	20	14	36	23	17	26
x_2	68	20	∞	7	33	18	29	32
x_3	49	14	7	∞	21	8	42	37
x_4	44	36	33	21	∞	13	26	54
x_5	34	23	18	8	13	∞	9	41
x_6	68	17	29	42	26	9	∞	14
x_7	38	26	32	37	54	41	14	∞

$0 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 6$

Obzirom da je x_6 posljednji odabrani čvor u ruti, odabire se dopuštena minimalna vrijednost prema prvom sljedećem čvoru, vrijednosti 14, prema čvoru x_7:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	35	68	49	44	34	68	38
x_1	35	∞	20	14	36	23	17	26
x_2	68	20	∞	7	33	18	29	32
x_3	49	14	7	∞	21	8	42	37
x_4	44	36	33	21	∞	13	26	54
x_5	34	23	18	8	13	∞	9	41
x_6	68	17	29	42	26	9	∞	14
x_7	38	26	32	37	54	41	14	∞

$$0 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 6 \rightarrow 7$$

Preostala su posljednja dva čvora za kompletnost rute. Potrebno je odabrati minimalnu udaljenost iz čvora x_7 prema pretposljednjem čvoru. Minimalna vrijednost je 38, usmjerena prema čvoru x_0. Međutim, odabere li se ta vrijednost, nastala bi pod-ruta (*subtour*) odnosno, svi čvorovi ne bi bili uključeni u rutu, jer je x_0 polazni čvor, on ujedno mora predstavljati i završni čvor, dok su između svi preostali čvorovi u ruti. Stoga je potrebno odabrati vrijednost 54, prema čvoru x_4 iako udaljenost nije minimalna, cilj je dobiti Hamiltonov ciklus, da početna točka bude ujedno i završna točka.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	35	68	49	44	34	68	38
x_1	35	∞	20	14	36	23	17	26
x_2	68	20	∞	7	33	18	29	32
x_3	49	14	7	∞	21	8	42	37
x_4	44	36	33	21	∞	13	26	54
x_5	34	23	18	8	13	∞	9	41
x_6	68	17	29	42	26	9	∞	14
x_7	38	26	32	37	54	41	14	∞

$$0 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 4$$

Posljednji korak u algoritmu prikazuje povezivanje posljednjeg odabranog čvora u ruti x_4 te polaznog čvora u ovom slučaju to je čvor x_0. Iako vrijednost 44 nije minimalna, prema pravilima i ograničenjima to je jedina moguća kombinacija.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	35	68	49	44	(34)	68	38
x_1	35	∞	20	14	36	23	(17)	26
x_2	68	(20)	∞	7	33	18	29	32
x_3	49	14	(7)	∞	21	8	42	37
x_4	(44)	36	33	21	∞	13	26	54
x_5	34	23	18	(8)	13	∞	9	41
x_6	68	17	29	42	26	9	∞	(14)
x_7	38	26	32	37	(54)	41	14	∞

Ruta je kompletirana u potpunosti te glasi: $0 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 0$

4.5. Christofides-ov algoritam

Aproksimacijske metode daju u polinomijalnom[5] vremenu približno tzv. sub-optimalno rješenje uz jamstvo da je to rješenje približno „blizu“ optimalnom. Međusobna razlika aproksimacijskih algoritama je po obliku „jamstva dobrote“ za rješenja koja daju. Stoga se dijele na apsolutno aproksimacijske, relativno aproksimacijske i aproksimacijske sheme. Najpoznatiji aproksimacijski algoritam, ujedno i algoritam koji je upotrebljavan u radu radi izračuna je *Christofidesov algoritam* koji se i najčešće koristi za konstrukciju rješenja te daje rješenja koja odstupaju približno 10% od optimalnog rješenja. *Christofidesov* algoritam je heuristički algoritam kojem je funkcija rješavanje problema trgovačkog putnika u potpunom grafu s trokutnom nejednakosti. Trokutna nejednakost se u problemu trgovačkog putnika može pokazati u slučaju: za bilo koja tri vrha(i, j i k) vrijedi da je udaljenost:

$$c_{ij} \leq c_{ik} + c_{jk} \tag{17}$$

[5] U teoriji kompleksnosti, polinomijalno vrijeme odnosi se na vrijeme izračunavanja problema, gdje vrijeme, $m(n)$, nije veće od polinomijalne funkcije veličine problema n

Christofidesov algoritam temelji se na određivanju minimalnog razapinjućeg stabla te formiranjem Eulerovog grafa sparivanjem neparnih vrhova tog stabla minimalne ukupne težine. Minimalno razapinjuće stablo je razapinjuće stablo u težinskom grafu takvo da je težina razapinjućeg stabla minimalna, odnosno stablo koje se dobije iz grafa *G* uklanjanjem određenog broja grana iz grafa, a da graf ostaje povezan naziva se razapinjuće stablo, dok je Eulerov graf onaj graf kod kojeg postoji Eulerov ciklus. Svaki povezani graf ima razapinjuće stablo kao podgraf. Rješenje, odnosno ruta trgovačkog putnika algoritmom *Christofidesa* dobije se transformiranjem Eulerovog ciklusa korištenjem prečaca. Eulerov ciklus u neusmjerenom grafu je ciklus koji koristi svaki brid grafa isključivo jednom. Stoga *Christofidesov algoritam* još koristi naziv i *heuristika savršenog sparivanja*. Algoritam radi na način da se na zadanom grafu koji opisuje problem pronađe minimalno razapinjuće stablo te zatim iz navedenog stabla pronađu vrhovi koji su neparnog stupnja. Stupanj vrha određen je brojem bridova sa kojima je incidentan. Nakon toga nad tim vrhovima pronađe se minimalno savršeno uparivanje koje je jedan od najtežih kombinatornih problema koji se mogu riješiti u polinomnom vremenu. Algoritam se sastoji od sljedećih koraka [10, 15]:

Korak 1: Pronaći najkraće pripadajuće stablo koje spaja n čvorova te ga označiti sa A

Korak 2: Neka je *k* od *n* čvorova stabla A neparnog stupnja (*k* je uvijek paran broj). Izvršiti sparivanje po dva čvora od svih *k* čvorova tako da ukupna duljina ovih grana koje spajaju ove čvorove bude najmanja. Određeni *k* čvorovi s odgovarajućim granama dobivenim sparivanjem čine mrežu *B* te nacrtati mrežu *C* koja predstavlja uniju mreže *A* i mreže *B*.

Korak 3: Mreža *C* ne sadrži čvorove neparnog stupnja. Nacrtati Eulerovu stazu u mreži *C*. Navedena Eulerova staza je približno rješenje za problem trgovačkog putnika.

Korak 4: Provjeriti koji su sve čvorovi posjećeni više od jednog puta te poboljšati rutu trgovačkog putnika dobivenu nakon trećeg koraka uzimanjem u obzir nejednakosti:

$$d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) \tag{18}$$

5. ANALIZA I PROJEKTIRANJE RUTA

U ovom poglavlju izvest će se analiza, proračuni i projektiranje ruta za distribucijsku mrežu distribucijske tvrtke Quehenberger Hrvatska d.o.o. U proces optimizacije uključeno je dvanaest ruta, a područje distribucije podijeljeno je na dva dijela, Prvi dio ruta vezan je za područje Sjeverne Hrvatske, dok se ostalih šest ruta odnosi na distribuciju na području Slavonije. Da bi se cijeli proces optimizirao, odnosno da bi se došlo do rješenja najkraćeg puta i ujedno smanjenja transportnih troškova, potrebno je projektirati i izračunati rute pomoću matematičkih metoda, a koristiti će se pet metoda, opisanih u poglavlju 4. Dobivena rješenja predstavljat će najkraći put za svaku od navedenih ruta prema pojedinoj metodi. Nakon svih izračuna, rezultati će se usporediti i odabrat će se najbolje rješenje za sljedeći korak optimizacije.

5.1. Rute na području Sjeverne Hrvatske

Pomoću navedenih matematičkih metoda za rute na području Sjeverne Hrvatske računat će se najkraći put u cilju smanjenja troškova distribucije, a ujedno će biti prikazano rješenje projektiranja svake od ruta na području Sjeverne Hrvatske. Za svaku rutu bit će prikazani podaci o narudžbi koji će služiti pri projektiranju.

5.1.1. Ruta HR-43627

U prvoj ruti Sjeverne Hrvatske, HR-43627 detaljno će biti prikazan postupak izračuna najkraćeg puta po svim matematičkim metodama. U tablici 2. prikazani su podaci koji služe za izračun najkraćeg puta. U tablici se nalazi polazna točka, odnosno Zagreb, te lokacije koje je potrebno opskrbiti robom. Također prikazana je i količina pakiranja i masa tereta koja utječe na odabir prijevoznog sredstva koje će obavljati distribuciju.

Tablica 2. Podaci o ruti HR-43627

Redni broj	Vrijeme dostave	Skladišni centar	Odredište	Količina Pakiranja	Bruto masa (kg)	Šifra rute
1.	10.3.2017 0:00	Zagreb	Kapela	2	1245	HR-43627
2.	10.3.2017 0:00	Zagreb	Pitomača	1	100	HR-43627
3.	10.3.2017 0:00	Zagreb	Drnje	1	75	HR-43627
4.	10.3.2017 0:00	Zagreb	Donji Kraljevec	1	212	HR-43627
5.	10.3.2017 0:00	Zagreb	Ludbreg	1	250	HR-43627
6.	10.3.2017 0:00	Zagreb	Koprivnica	1	142	HR-43627
7.	10.3.2017 0:00	Zagreb	Križevci	1	779	HR-43627

Prema tablici 2. u matrici su prikazane međusobne udaljenosti između navedenih čvorova, odnosno lokacija, koje će se koristiti pri izračunu ušteda, ali i općenito za projektiranje ruta.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	84	122	112	110	94	116	62
x_1	84	∞	42	36	64	47	26	32
x_2	122	42	∞	46	79	64	43	71
x_3	112	36	46	∞	35	30	10	43
x_4	110	64	79	35	∞	21	37	56
x_5	94	47	64	30	21	∞	20	35
x_6	116	26	43	10	37	20	∞	33
x_7	62	32	71	43	56	35	33	∞

Clark – Wright-ov algoritam „ušteda“

Za početak potrebno je iz matrice udaljenosti izračunati uštede za svaki par čvorova međusobno. Uštede se izračunavaju prema formuli (4), a rješenje svakog pojedinačnog izračuna prikazuje vrijednost uštede između dva odabrana vrha. U nastavku je prikazan postupak izračuna:

Uštede se izračunavaju prema formuli (4):

$$S(i, j) = d(0,i) + d(0, j) – d(i, j)$$

$S_{12} = d(0,1) + d(0,2) – d(1,2) = 84 + 122 – 42 = 164$

$S_{13} = 84 + 112 – 36 = 160$

$S_{14} = 84 + 110 – 64 = 130$

$S_{15} = 84 + 94 – 47 = 131$

$S_{16} = 84 + 116 – 26 = 174$

$S_{17} = 84 + 62 – 32 = 114$

$S_{23} = 122 + 112 – 46 = 188$

$S_{24} = 122 + 110 – 79 = 153$

$S_{25} = 122 + 94 – 64 = 152$

$S_{26} = 122 + 116 – 43 = 195$

$S_{27} = 122 + 62 – 71 = 113$

$S_{34} = 112 + 110 – 35 = 187$

$S_{35} = 112 + 94 – 30 = 176$

$S_{36} = 112 + 116 – 10 = 218$

$S_{37} = 112 + 62 – 43 = 131$

$S_{45} = 110 + 94 – 21 = 183$

$S_{46} = 110 + 116 – 37 = 189$

$S_{47} = 110 + 62 – 56 = 116$

$S_{56} = 94 + 116 – 20 = 190$

$S_{57} = 94 + 62 – 35 = 121$

$S_{67} = 116 + 62 – 33 = 145$

U tablici 3. prikazane su vrijednosti ušteda za svaku granu između vrhova prema redoslijedu vrhova dobivene pomoću formule (4).

Tablica 3. Uštede za rutu HR-43627 prema redoslijedu vrhova

Grana (*i,j*)	Ušteda *s*(*i,j*)	Grana (*i,j*)	Ušteda *s*(*i,j*)	Grana (*i,j*)	Ušteda *s*(*i,j*)
(1,2)	164	**(2,4)**	153	**(3,7)**	131
(1,3)	160	**(2,5)**	152	**(4,5)**	183
(1,4)	130	**(2,6)**	195	**(4,6)**	189
(1,5)	131	**(2,7)**	113	**(4,7)**	116
(1,6)	174	**(3,4)**	187	**(5,6)**	190
(1,7)	114	**(3,5)**	176	**(5,7)**	121
(2,3)	188	**(3,6)**	218	**(6,7)**	145

U sljedećem koraku potrebno je rangirati vrijednosti ušteda od najveće prema najmanjoj kako bi se mogao nastaviti postupak izvršavanja *Clark-Wright-ovog algoritma*, odnosno radi projektiranja ruta vozila. Tablica 4. prikazuje vrijednosti ušteda prema redoslijedu od najveće prema najmanjoj vrijednosti.

Tablica 4. Lista ušteda za rutu HR-43627 rangirana prema veličini

Grana (*i,j*)	Ušteda *s*(*i,j*)	Grana (*i,j*)	Ušteda *s*(*i,j*)	Grana (*i,j*)	Ušteda *s*(*i,j*)
(3,6)	218	**(3,5)**	176	**(1,5)**	131
(2,6)	195	**(1,6)**	174	**(3,7)**	131
(5,6)	190	**(1,2)**	164	**(1,4)**	130
(4,6)	189	**(1,3)**	160	**(5,7)**	121
(2,3)	188	**(2,4)**	153	**(4,7)**	116
(3,4)	187	**(2,5)**	152	**(1,7)**	114
(4,5)	183	**(6,7)**	145	**(2,7)**	113

U posljednjem koraku *Clark-Wright-ovog algoritma* izračunava se ruta prema rangiranim uštedama iz tablice 4. uz zadovoljavanje operativnih ograničenja odnosno uvjeta. U nastavku je prikazan postupak izračuna rute:

(3,6) => 0 ↔ 3 ↔ 6 ↔ 0,

(2,6) => 0 ↔ 3 ↔ 6 ↔ 2 ↔ 0,

(5,6) => Navedenu granu nije moguće koristiti jer čvor 6 kao poveznica je unutarnji čvor u ruti,

(4,6) => Jednaki slučaj kao kod prethodne uštede,

(2,3) => Povezivanje čvorova u ovom slučaju nije moguće, jer su oba čvora vanjski vrhovi te bi u slučaju povezivanja došlo do nastanka pod-rute, odnosno *subtour-a,*

(3,4) => 0 ↔ 4 ↔ 3 ↔ 6 ↔ 2 ↔ 0,

(4,5) => 0 ↔ 5 ↔ 4 ↔ 3 ↔ 6 ↔ 2 ↔ 0,

(3,5) => Oba čvora se već nalaze u djelomičnoj ruti,

(1,6) => Čvor 6 je unutarnji čvor u ruti, stoga ga nije moguće povezati s čvorom 1,

(1,2) => 0 ↔ 5 ↔ 4 ↔ 3 ↔ 6 ↔ 2 ↔ 1 ↔ 0,

(1,3), (2,4), (2,5) => Svi navedeni čvorovi nalaze se u ruti,

(6,7) => Čvor 6 je unutarnji čvor u ruti, uvjet nije zadovoljen,

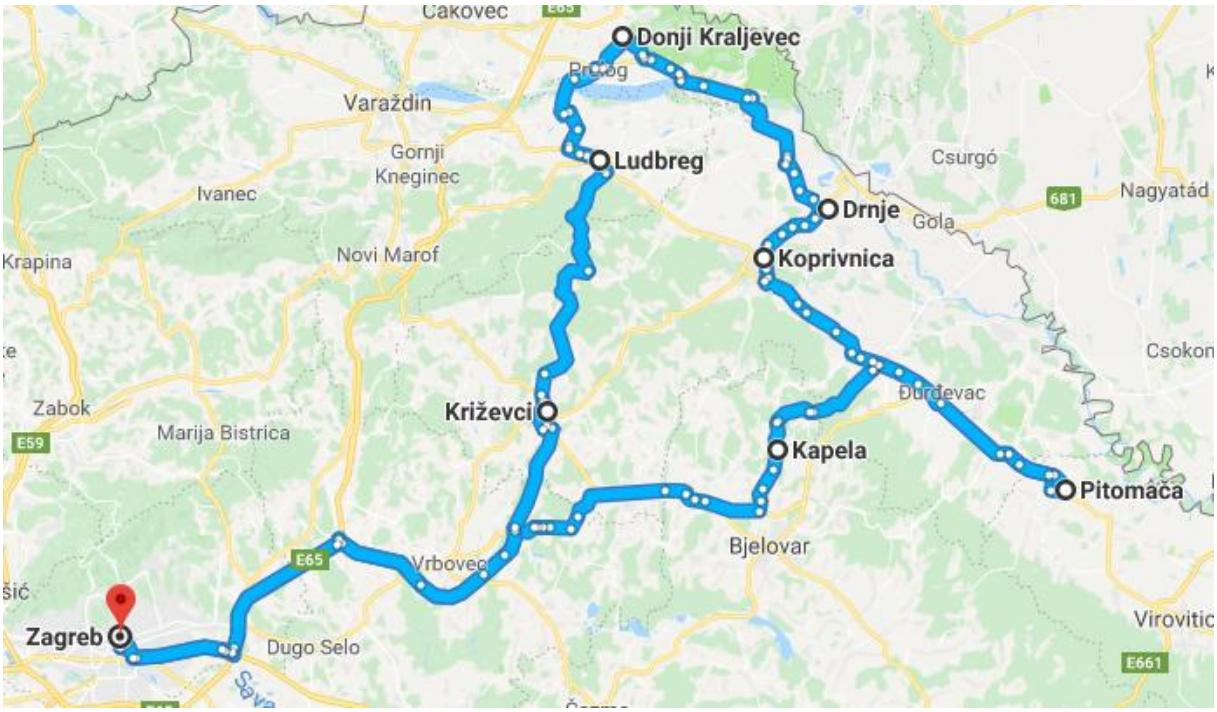
(1,5) => Oba čvora se nalaze u ruti,

(3,7) => Nemogućnost povezivanja jer je čvor 3 unutarnji čvor u ruti,

(1,4) => Čvorovi se već nalaze u ruti,

(5,7) => 0 ↔ 7 ↔ 5 ↔ 4 ↔ 3 ↔ 6 ↔ 2 ↔ 1 ↔ 0 = 332 km

Povezivanjem u rutu posljednjeg čvora, algoritam završava te se ostale grane, odnosno uštede ne uzimaju u obzir. Konačna ruta glasi: 0 ↔ 7 ↔ 5 ↔ 4 ↔ 3 ↔ 6 ↔ 2 ↔ 1 ↔ 0, a prikazana je na slici (17).



Slika 17. Ruta HR-43627 kao rješenje Clark-Wright-ovog algoritma ušteda

Metoda s indikatorom T

U nastavku je prikazana polu-matrica unutar koje se nalaze uštede prema čvorovima. Uštede se izračunavaju na jednak način kao i kod *Clark-Wright-ovog algoritma ušteda*, odnosno prema formuli (4).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
	x_1	164	160	130	131	174	114
		x_2	188	153	152	195	113
			x_3	187	176	218	131
				x_4	183	189	116
					x_5	190	121
						x_6	145

Najveća ušteda je ušteda između čvorova x_3 i x_6, stoga se mogućnost korištenja navedenih čvorova smanjuje za jedan. Postavlja se ruta $0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 0$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	**2**	**2**	**(1)**	**2**	**2**	**(1)**	**2**
	x_1	164	160	130	131	174	114
		x_2	188	153	152	195	113
			x_3	187	176	(1) 218	131
				x_4	183	189	116
					x_5	190	121
						x_6	145

$0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 0$

Sljedeća najveća ušteda iznosi 195 km i uključuje čvorove x_2 i x_6. Na jednak način oduzimaju se mogućnosti korištenja čvorova. Obzirom na oduzimanje mogućnosti korištenja, čvor x_6 iskorišten je maksimalno dva puta te sada ima funkciju unutarnjeg čvora u novo nastaloj ruti: $0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	**2**	**(1)**	**(1)**	**2**	**2**	**(0)**	**2**
	x_1	164	160	130	131	174	114
		x_2	188	153	152	(1) 195	113
			x_3	187	176	(1) 218	131
				x_4	183	189	116
					x_5	190	121
						x_6	145

$0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0$

Sljedeća maksimalna ušteda iznosi 190 km, a uključuje čvorove x_5 i x_6, međutim navedenu uštedu te sljedeću nakon nje najveću uštedu 189 km, čvorova x_4 i x_6, nije moguće koristiti jer čvor x_6 više nema mogućnost korištenja zbog lokacije unutarnjeg čvora u ruti. Kombinaciju čvorova x_2 i x_3 nije moguće koristiti jer čvorovi su vanjske točke jedne rute iako ušteda iznosi 188 km. Najveća ušteda koju je moguće koristiti je ušteda koja uključuje čvorove x_3 i x_4, a iznosi 187 km. Povezivanjem čvorova x_3 i x_4 nastaje ruta 0 ↔ 4 ↔ 3 ↔ 6 ↔ 2 ↔ 0.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	**2**	**(1)**	**(0)**	**(1)**	**2**	**(0)**	**2**
	x_1	164	160	130	131	174	114
		x_2	188	153	152	(1) 195	113
			x_3	(1) 187	176	(1) 218	131
				x_4	183	189	116
					x_5	190	121
						x_6	145

0 ↔ 4 ↔3 ↔ 6 ↔ 2 ↔ 0

Ušteda čvorova x_4 i x_5 iznosi 183 km, odnosno sljedeća najveća ušteda koju je moguće koristiti. Čvor x_5 nadovezuje se na čvor x_4, taj postupak čini čvor x_4 uz čvorove x_3, x_6 unutarnjim čvorovima, odnosno nije ih moguće koristiti pri daljnjim izračunima. Nova ruta glasi: 0 ↔ 5 ↔ 4 ↔ 3 ↔ 6 ↔ 2 ↔ 0.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	**2**	**(1)**	**(0)**	**(0)**	**(1)**	**(0)**	**2**
	x_1	164	160	130	131	174	114
		x_2	188	153	152	(1) 195	113
			x_3	(1) 187	176	(1) 218	131
				x_4	(1) 183	189	116
					x_5	190	121
						x_6	145

$0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0$

Uštede čvorova x_3 i x_5 te x_1 i x_6 nije moguće koristiti iako su vrijednosti ušteda veće od uštede čvorova x_1 i x_2 korištene u ovom koraku izračuna, iz razloga jer su čvor x_3 i čvor x_6 unutarnji čvorovi u ruti ili su oba čvora već uključena u rutu. Čvor x_1 nadovezuje se s rutom preko čvora x_2, jer ušteda čvorova x_1 i x_2 iznosi 164 km te je prema redoslijedu sljedeća najveća ušteda koja zadovoljava sve uvjete. Nakon izračuna, nadograđena ruta je: $0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	**(1)**	**(0)**	**(0)**	**(0)**	**(1)**	**(0)**	**2**
	x_1	(1) 164	160	130	131	174	114
		x_2	188	153	152	(1) 195	113
			x_3	(1) 187	176	(1) 218	131
				x_4	(1) 183	189	116
					x_5	190	121
						x_6	145

$0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 0$

Posljednji čvor koji je potrebno povezati s rutom je čvor x_7. Čvor je moguće povezati s čvorom x_5 ili s čvorom x_1 ovisno o veličini uštede, stoga se sve ostale vrijednosti zanemaruju. Obzirom da je vrijednost uštede x_5 i x_7 veća od vrijednosti uštede x_1 i x_7, jedine dvije moguće kombinacije, čvor x_7 povezuje se s čvorom x_5, a ušteda iznosi 121 km. Posljednjim korakom, kompletirana je ruta koja glasi: 0 ↔ 7 ↔ 5 ↔ 4 ↔ 3 ↔ 6 ↔ 2 ↔ 1 ↔ 0.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	**(1)**	**(0)**	**(0)**	**(0)**	**(0)**	**(0)**	**(1)**
	x_1	(1) 164	160	130	131	174	114
		x_2	188	153	152	(1) 195	113
			x_3	(1) 187	176	(1) 218	131
				x_4	(1) 183	189	116
					x_5	190	(1) 121
						x_6	145

0 ↔ 7 ↔ 5 ↔ 4 ↔ 3 ↔ 6 ↔ 2 ↔ 1 ↔ 0 = 332 km

Metoda grananja i ograničavanja

Rješavanje problema trgovačkog putnika pomoću *metode grananja i ograničavanja* izvodi se na način kako je objašnjeno u poglavlju 4.3.1.

Matrični prikaz međusobnih udaljenosti između lokacija osnova je za izračun *metode grananja i ograničavanja*, a nalazi se u nastavku:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	84	122	112	110	94	116	62
x_1	84	∞	42	36	64	47	26	32
x_2	122	42	∞	46	79	64	43	71
x_3	112	36	46	∞	35	30	10	43
x_4	110	64	79	35	∞	21	37	56
x_5	94	47	64	30	21	∞	20	35
x_6	116	26	43	10	37	20	∞	33
x_7	62	32	71	43	56	35	33	∞

Vrijednosti iz svakog retka oduzimaju se s minimalnim vrijednostima pojedinih redaka; U prvom retku kod čvora x_0 minimalna udaljenost iznosi 62, stoga se ona oduzima od svih ostalih vrijednosti u tom retku, zatim u drugom retku, minimalna vrijednost kod čvora x_1 iznosi 26, pa se ta vrijednost oduzima od ostalih vrijednosti u istom retku. Isti princip vrijedi za sve ostale retke.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	22	60	50	48	32	54	0
x_1	58	∞	16	10	38	21	0	6
x_2	80	0	∞	4	37	22	1	29
x_3	102	26	36	∞	25	20	0	33
x_4	89	43	58	14	∞	0	16	35
x_5	74	27	44	10	1	∞	0	15
x_6	106	16	33	0	27	10	∞	23
x_7	30	0	39	11	24	3	1	∞

Nakon dobivene prve reducirane matrice, oduzimaju se sve vrijednosti stupaca s minimalnim vrijednostima svakog pojedinog stupca; u stupcu x_0 minimalna vrijednost iznosi 30, navedena vrijednost oduzima se od svih vrijednosti u prvom stupcu. U drugom stupcu, kod čvora x_1 minimalna vrijednost je 0, oduzimanjem nule od svih vrijednosti, rezultat ostaje nepromijenjen, treći stupac, x_2 ima minimalnu vrijednost u iznosu 16, ostale vrijednosti oduzimaju se s minimalnom vrijednošću. Istim principom rješavaju se preostali retci.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	22	44	50	47	32	54	0
x_1	28	∞	0	10	37	21	0	6
x_2	50	0	∞	4	36	22	1	29
x_3	72	26	20	∞	24	20	0	33
x_4	59	43	42	14	∞	0	16	35
x_5	44	27	28	10	0	∞	0	15
x_6	76	16	17	0	26	10	∞	23
x_7	0	0	23	11	23	3	1	∞

Nakon što svaki redak i svaki stupac sadrži barem po jednu nulu, sljedeći korak je izračun kazni za nekorištenje predložene veze među gradovima, tako da se zbrajaju minimalne vrijednosti iz stupca i retka gdje se nula nalazi te odabir najveće vrijednosti kazne koja ujedno znači i prva relacija u ruti. Primjerice, prva nula prema redoslijedu je nula u retku x_0 i stupcu x_7, kod navedene nule zbraja se minimalna vrijednost u stupcu x_0 i minimalna vrijednost u retku x_7, na primjeru to glasi: 22 + 6 = 28, nuli se dopiše navedena vrijednost kazne. Zatim sljedeća nula po redu jest nula u retku x_1 te stupcu x_2, minimalna vrijednost u retku x_1 iznosi 0, kada se zbroji sa 17, minimalnom vrijednošću u stupcu x_2, dobije se vrijednost kazne 17 koja se dopiše navedenoj nuli. Jednakim principom izračunavaju se preostale kazne za svaku nulu u reduciranoj matrici udaljenosti. Nakon izračuna svih kazni, postoje dvije kazne s vrijednošću 28, prema metodi sjeverno-zapadnog kuta odabire se kazna iz retka x_0 i stupca x_7;

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
~~x_0~~	~~∞~~	~~22~~	~~44~~	~~50~~	~~47~~	~~32~~	~~54~~	~~$0^{(28)}$~~
x_1	28	∞	$0^{(17)}$	10	37	21	$0^{(0)}$	6
x_2	50	$0^{(1)}$	∞	4	36	22	1	29
x_3	72	26	20	∞	24	20	$0^{(20)}$	33
x_4	59	43	42	14	∞	$0^{(17)}$	16	35
x_5	44	27	28	10	$0^{(23)}$	∞	$0^{(0)}$	15
x_6	76	16	17	$0^{(14)}$	26	10	∞	23
x_7	$0^{(28)}$	$0^{(0)}$	23	11	23	3	1	∞

Prva relacija u ruti je $0 \rightarrow 7$ te se ta dva čvora ukidaju u procesu daljnjeg izračuna rute, također potrebno je isključiti vrijednost u retku x_7 i stupcu x_0 da ne bi nastala pod-ruta (*subtour*) $0 \rightarrow 7 \rightarrow 0$.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	28	∞	0	10	37	21	0
x_2	50	0	∞	4	36	22	1
x_3	72	26	20	∞	24	20	0
x_4	59	43	42	14	∞	0	16
x_5	44	27	28	10	0	∞	0
x_6	76	16	17	0	26	10	∞
x_7	∞	0	23	11	23	3	1

Obzirom da svi retci i svi stupci ne sadrže nulu, potrebno je ponovno oduzeti retke s minimalnim vrijednosti redaka te stupce s minimalnim elementima stupaca kao što je prije navedeno;

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	∞	0	10	37	21	0
x_2	22	0	∞	4	36	22	1
x_3	44	26	20	∞	24	20	0
x_4	31	43	42	14	∞	0	16
x_5	16	27	28	10	0	∞	0
x_6	48	16	17	0	26	10	∞
x_7	∞	0	23	11	23	3	1

U sljedećoj matrici izračunate su kazne za nekorištenje predložene veze među gradovima i odabir nove relacije:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	$0^{(16)}$	∞	$0^{(17)}$	10	37	21	$0^{(0)}$
x_2	22	$0^{(1)}$	∞	4	36	22	1
x_3	44	26	20	∞	24	20	$0^{(20)}$
x_4	31	43	42	14	∞	$0^{(17)}$	16
~~x_5~~	~~16~~	~~27~~	~~28~~	~~10~~	$0^{(23)}$	~~∞~~	~~$0^{(0)}$~~
x_6	48	16	17	$0^{(14)}$	26	10	∞
x_7	∞	$0^{(1)}$	23	11	23	3	1

Dobivena relacija je 5 → 4, stoga je potrebno isključiti vrijednost u retku x_4 i stupcu x_5 da ne bi nastala pod-ruta 5 → 4 → 5.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6
x_1	0	∞	0	10	21	0
x_2	22	0	∞	4	22	1
x_3	44	26	20	∞	20	0
x_4	31	43	42	14	∞	16
x_6	48	16	17	0	10	∞
x_7	∞	0	23	11	3	1

U nastavku je prikazana matrica u kojoj su ponovno oduzimani retci i stupci od minimalnih elemenata te izračun kazni za nekorištenje predložene veze među gradovima i odabir relacije;

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6
~~x_1~~	~~$0^{(17)}$~~	~~∞~~	~~$0^{(17)}$~~	~~10~~	~~18~~	~~$0^{(0)}$~~
x_2	22	$0^{(1)}$	∞	4	19	1
x_3	44	26	20	∞	17	$0^{(17)}$
x_4	17	29	28	$0^{(2)}$	∞	2
x_6	48	16	17	$0^{(7)}$	7	∞
x_7	∞	$0^{(0)}$	23	11	$0^{(7)}$	1

Sljedeća dobivena relacija je 1 → 0. Zatim se izrađuje nova matrica te se ponavlja korak s oduzimanjem redaka i stupaca s minimalnim elementima i novi izračun kazni uz odabir nove relacije;

	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6
x_2	$0^{(1)}$	∞	4	19	1
x_3	26	3	∞	17	$0^{(4)}$
x_4	29	11	$0^{(2)}$	∞	2
x_6	16	$0^{(3)}$	$0^{(0)}$	7	∞
~~x_7~~	~~$0^{(0)}$~~	~~6~~	~~11~~	~~$0^{(7)}$~~	~~1~~

7 → 5 je još jedna u nizu dobivenih relacija u ruti. Obzirom da svi preostali retci i stupci sadrže nulu, potrebno je samo izračunati kazne za nekorištenje predložene veze među gradovima;

	x_1	x_2	x_3	x_6
x_2	$0^{(7)}$	∞	4	1
x_3	26	3	∞	$0^{(4)}$
x_4	29	11	$0^{(2)}$	2
x_6	16	$0^{(3)}$	$0^{(0)}$	∞

Rješenje reducirane matrice je relacija 2 → 1.Sljedeća matrica kao i prethodna sadrži nule u svakom retku i stupcu stoga nije potreban proračun oduzimanja redaka i stupaca s minimalnim elementima.

	x_2	x_3	x_6
x_3	3	∞	$0^{(5)}$
x_4	11	$0^{(2)}$	2
x_6	$0^{(3)}$	$0^{(0)}$	∞

Pretposljednja matrica dala je dodatno rješenje u ruti, relaciju 3 → 6. Posljednja matrica sadrži nule u svim retcima i stupcima jer je na mjestu retka x_6 i stupca x_3 isključena vrijednost radi stvaranja pod-rute, stoga posljednje dvije relacije su 4 → 3 i 6 → 2;

	x_2	x_3
x_4	11	$0^{(11)}$
x_6	$0^{(11)}$	∞

Rješenje, odnosno cjelokupna ruta glasi: 0 ↔ 7 ↔ 5 ↔ 4 ↔ 3 ↔ 6 ↔ 2 ↔ 1 ↔ 0 = 332 km

Metoda najbližeg susjeda

Obzirom da *heuristika najbližeg susjeda* nalaže odabir minimalnih udaljenosti tako se za početak odabire minimalna vrijednost u prvom retku x_0 koja iznosi 62 te predstavlja poveznicu između x_0 i x_7. Zatim se u retku x_7 traži minimalna udaljenost, ne uključujući vrhove x_0 radi pod-rute te x_7 jer je taj vrh već odabran. Minimalna vrijednost u retku x_7 iznosi 32 i povezuje čvor x_7 sa čvorom x_1. Ruta se nastavlja od čvora x_1 prema čvoru x_6 obzirom da minimalna udaljenost između ta dva čvora iznosi 26. Odabirom minimalne vrijednosti koja iznosi 10, nastaje nova grana u ruti, a povezuje čvorove x_6 i x_3. Minimalna vrijednost u retku x_3 iznosi 10, međutim povezuje čvor x_3 s čvorom x_6 koji se već nalazi u ruti, stoga takvo

povezivanje nije moguće. Udaljenost koja iznosi 30 te povezuje čvor x_3 s čvorom x_5 moguće je odabrati jer je sljedeća minimalna vrijednost koja zadovoljava ograničenja. Čvor x_5 povezan je s čvorom x_4 jer minimalna udaljenost u retku koju je moguće izabrati iznosi 21. Preostali čvorovi koje je potrebno povezati u rutu su x_0 i x_2, obzirom da čvor x_0 treba doći kao posljednji, odnosno završni čvor, sljedeći čvor koji se uključuje u rutu je čvor x_2, a udaljenost između x_4 i x_2 iznosi 79. Da bi se ruta kompletirala čvor x_2 povezuje se s čvorom x_0, a udaljenost iznosi 122. Udaljenost između pretposljednjeg i posljednjeg čvora ne mora biti minimalna jer se povezivanje vrši prema redoslijedu, polazni čvor je uvijek i posljednji, završni čvor, stoga i posljednja vrijednost, tj. udaljenost ne mora nužno biti minimalna kao što metoda najbližeg susjeda to nalaže, primjerice u ovom primjeru je maksimalna.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	84	122	112	110	94	116	62
x_1	84	∞	42	36	64	47	26	32
x_2	122	42	∞	46	79	64	43	71
x_3	112	36	46	∞	35	30	10	43
x_4	110	64	79	35	∞	21	37	56
x_5	94	47	64	30	21	∞	20	35
x_6	116	26	43	10	37	20	∞	33
x_7	62	32	71	43	56	35	33	∞

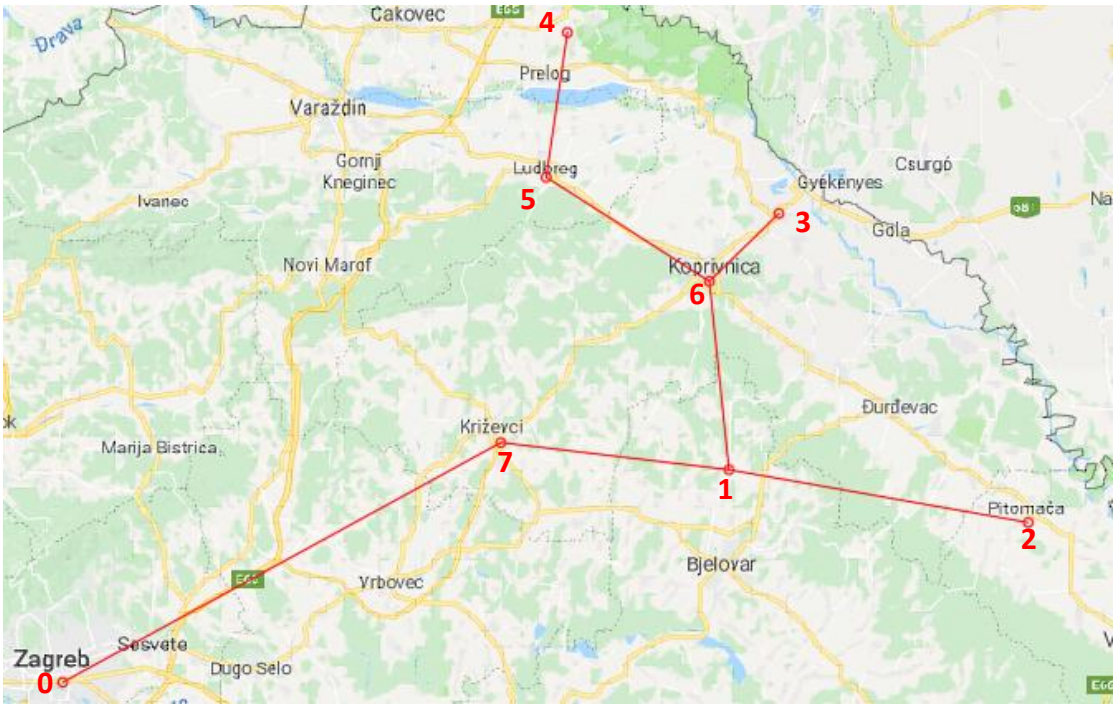
$0 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0 = 382$ km

Christofides-ov algoritam

U prvom koraku *Christofides-ovog algoritma* potrebno je pronaći minimalno razapinjuće stablo u grafu. Stablo se pronalazi na način da se prema matrici udaljenosti pronađe početna minimalna udaljenost između dva čvora, u ovom slučaju to je udaljenost između čvorova x_3 i x_6 koja iznosi 10 km. Zatim, potrebno je pronaći prvu sljedeću minimalnu udaljenost koja se nastavlja od povezanih čvorova, u ovom slučaju to su čvorovi x_3 i x_6. Sljedeća po veličini vrijednost (udaljenost) koja se nastavlja je udaljenost od čvora x_6 prema čvoru x_5 i iznosi 20 km. Jednakim načinom pronalazi se nova minimalna udaljenost koja je usmjerena od čvorova x_3, x_5, x_6, tražena udaljenost iznosi 21 km i nalazi se između čvorova x_5 i x_4. Od čvora x_6 prema čvoru x_1 nalazi se sljedeća tražena minimalna udaljenost i njen iznos je 26 km. Iako vrijednost sljedeće minimalne udaljenosti iznosi 30 km, nije je moguće koristiti

iz razloga jer bi njenim odabirom nastala pod-ruta, odnosno *subtour* jer se navedena udaljenost nalazi između čvorova x_3 i x_5 koji su već uključeni u stablo. Stoga, odabire se sljedeća minimalna udaljenost koja zadovoljava ranije navedeni uvjet, prema tom kriteriju to je udaljenost koja povezuje čvorove x_1 i x_7, a iznosi 32 km. Čvorovi koji još nisu uključeni u stablo su x_0 i x_2, obzirom da su udaljenosti u stupcu x_2, odnosno retku x_2 manje od onih u retku x_0, čvor x_2 se odabire kao sljedeći čvor za uključivanje u stablo te se prilikom pregleda vrijednosti u njegovom stupcu ili retku može prepoznati minimalna udaljenost koja iznosi 42 km, a povezuje čvor x_2 s čvorom x_1. Minimalna udaljenost od čvora x_0 poveznica je s čvorom x_7, prema tom kriteriju, to je posljednja grana u razapinjućem stablu te je izrada stabla završena. U nastavku je prikazana matrica s rješenjem odabira minimane udaljenosti te slika koja prikazuje na primjeru dobiveno razapinjujuće stablo.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	∞	84	122	112	110	94	116	(62)
x_1	84	∞	(42)	36	64	47	(26)	(32)
x_2	122	(42)	∞	46	79	64	43	71
x_3	112	36	46	∞	35	30	(10)	43
x_4	110	64	79	35	∞	(21)	37	56
x_5	94	47	64	30	(21)	∞	(20)	35
x_6	116	(26)	43	(10)	37	(20)	∞	33
x_7	(62)	(32)	71	43	56	35	33	∞



Slika 18. Razapinjuće stablo

Nakon što je u potpunosti izrađeno razapinjuće stablo (slika 18.), sljedeći korak je odabir i označavanje neparnih vrhova, odnosno vrhova s neparnim stupnjem. Neparnim vrhom smatra se vrh koji ima neparan zbroj ulaznih i izlaznih linija. Primjerice, stupci ili retci koji sadrže neparan broj odabranih minimalnih udaljenosti označavaju neparne vrhove. Prema ranije prikazanoj matrici udaljenosti, to su vrhovi: x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, što je vidljivo i na slici.

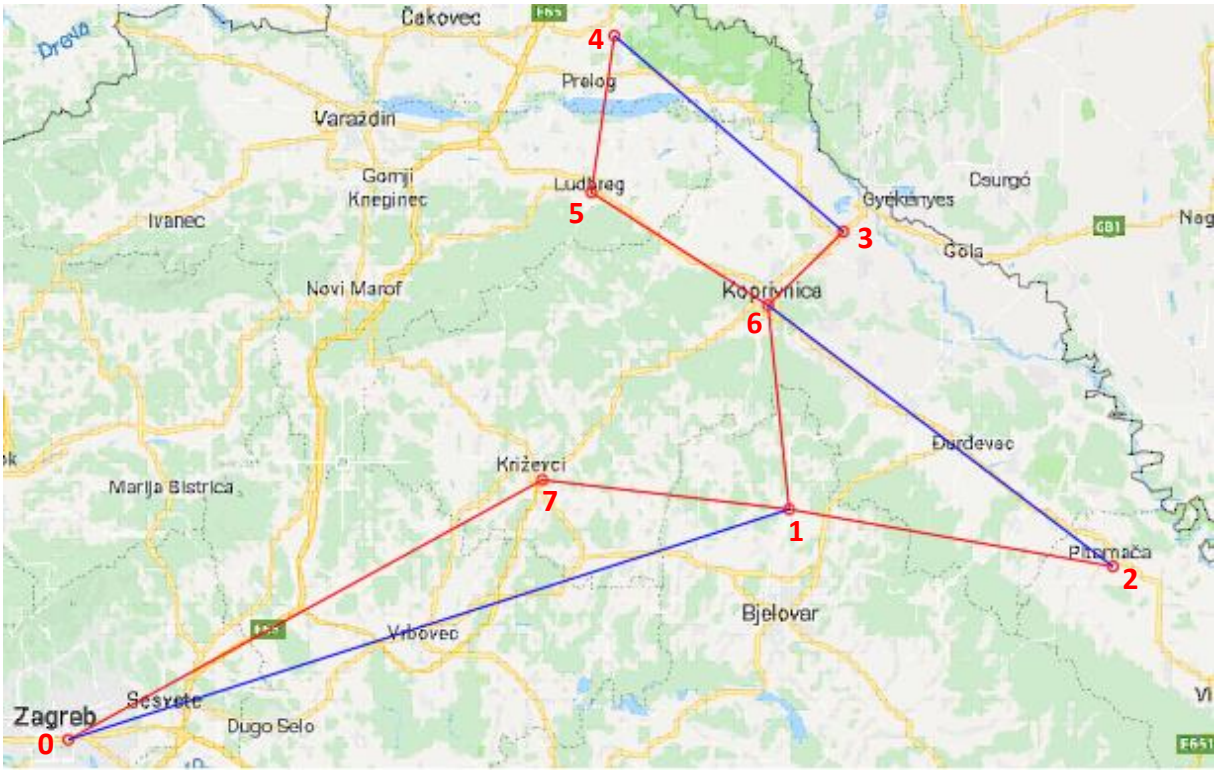
U nastavku je prikazana matrica udaljenosti koja uključuje samo neparne vrhove koji su ranije odabrani. Međusobno povezivanje neparnih vrhova odvija se na način tako da se raspišu sve kombinacije neparnih vrhova ne uključujući one koji su već međusobno direktno spojeni. Odabrane (zaokružene) udaljenosti u matrici označavaju minimalne udaljenosti između čvorova u razapinjućem stablu, odnosno udaljenosti koje ne mogu biti kombinirane prilikom sparivanja neparnih vrhova jer predstavljaju direktnu vezu između neparnih vrhova.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6
x_0	∞	84	122	112	110	116
x_1	84	∞	(42)	36	64	(26)
x_2	122	(42)	∞	46	79	43
x_3	112	36	46	∞	35	(10)
x_4	110	64	79	35	∞	37
x_6	116	(26)	43	(10)	37	∞

Moguće kombinacije sparivanja neparnih vrhova te zbroj međusobnih udaljenosti između svakog od njih, prikazane su u nastavku. Odabrana kombinacija veza između neparnih vrhova jest ona koja daje minimalan zbroj udaljenosti sve tri veze.

1. (0,1), (2,3), (4,6) = 84 + 46 + 37 = 167
2. (0,2), (1,3), (4,6) = 122 + 36 + 37 = 195
3. (0,1), (2,6), (3,4) = 84 + 43 + 35 = 162
4. (0,3), (1,4), (2,6) = 112 + 64 + 43 = 219
5. (0,4), (1,3), (2,6) = 110 + 36 + 43 = 189
6. (0,6), (1,3), (2,4) = 116 + 36 + 79 = 231

Kombinacija veza neparnih vrhova pod rednim brojem 3. daje najbolje rješenje, odnosno najmanji zbroj udaljenosti, stoga se u razapinjućem stablu povezuju vrhovi x_0 i x_1, x_2 i x_6 te x_3 i x_4. Grafički prikaz rješenja prikazan je na slici 19. Plavom bojom označene su odabrane veze između neparnih vrhova.

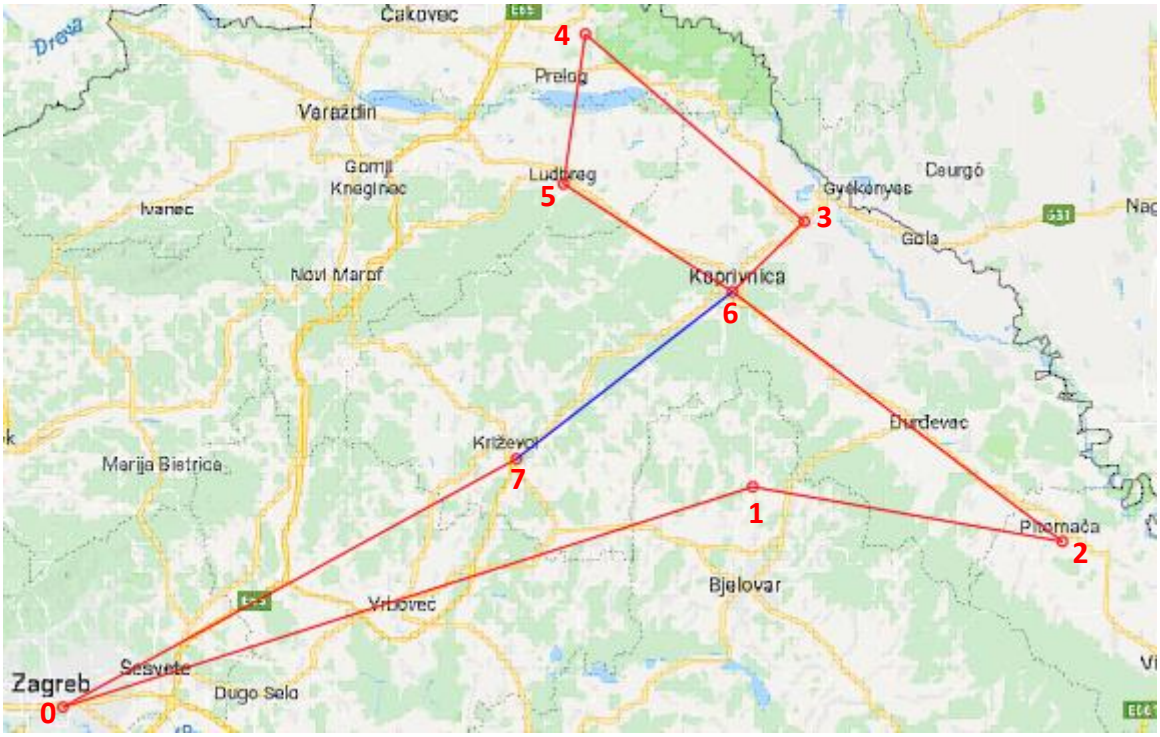


Slika 19. Sparivanje neparnih vrhova

Da bi se dobilo konačno rješenje, odnosno kompletirana ruta, potrebno je izvršiti posljednji korak *Christofides-ovog algoritma*. U posljednjem koraku ispisuju se kombinacije povezivanja vrhova kako bi se dobila jedinstvena ruta koja povezuje sve vrhove. Mogućnost spajanja imaju vrhovi koji sadrže četiri ili više ulaznih i izlaznih veza kao primjerice vrhovi x_1 i x_6 s ostalim vrhovima. Jedna od mogućih veza je veza između vrhova x_0 i x_2, njena udaljenost mora biti manja ili jednaka zbroju udaljenosti veza x_0 i x_1 te x_1 i x_2, ukoliko je uvjet zadovoljen, odabire se najveća razlika (ušteda) između svih kombinacija. Rješenje se dobije prema formuli (18). U nastavku je prikazan postupak te moguće kombinacije:

1. $(1,5) \leq (1,6) + (5,6) = 26 + 20 = 46 \rightarrow 47 \leq 46 \rightarrow$ UVJET NIJE ZADOVOLJEN!
2. $(0,2) \leq (0,1) + (1,2) = 84 + 42 = 126 \rightarrow 122 \leq 126 \rightarrow \Delta = (126 - 122) = 4$
3. $(6,7) \leq (1,6) + (1,7) = 26 + 32 = 58 \rightarrow 33 \leq 58 \rightarrow \Delta = 25$
4. $(2,3) \leq (2,6) + (3,6) = 43 + 10 = 53 \rightarrow 46 \leq 56 \rightarrow \Delta = 10$
5. $(1,3) \leq (1,6) + (3,6) = 26 + 10 = 36 \rightarrow 36 \leq 36 \rightarrow \Delta = 0$

Veza pod rednim broj 3. ima najveću vrijednost uštede, stoga se ona uzima kao prva veza spajanja vrhova. Na slici 20. prikazana je dodana veza (plavom bojom) između čvorova x_6 i x_7, a oduzete su veze između x_1 i x_6 te x_1 i x_7.



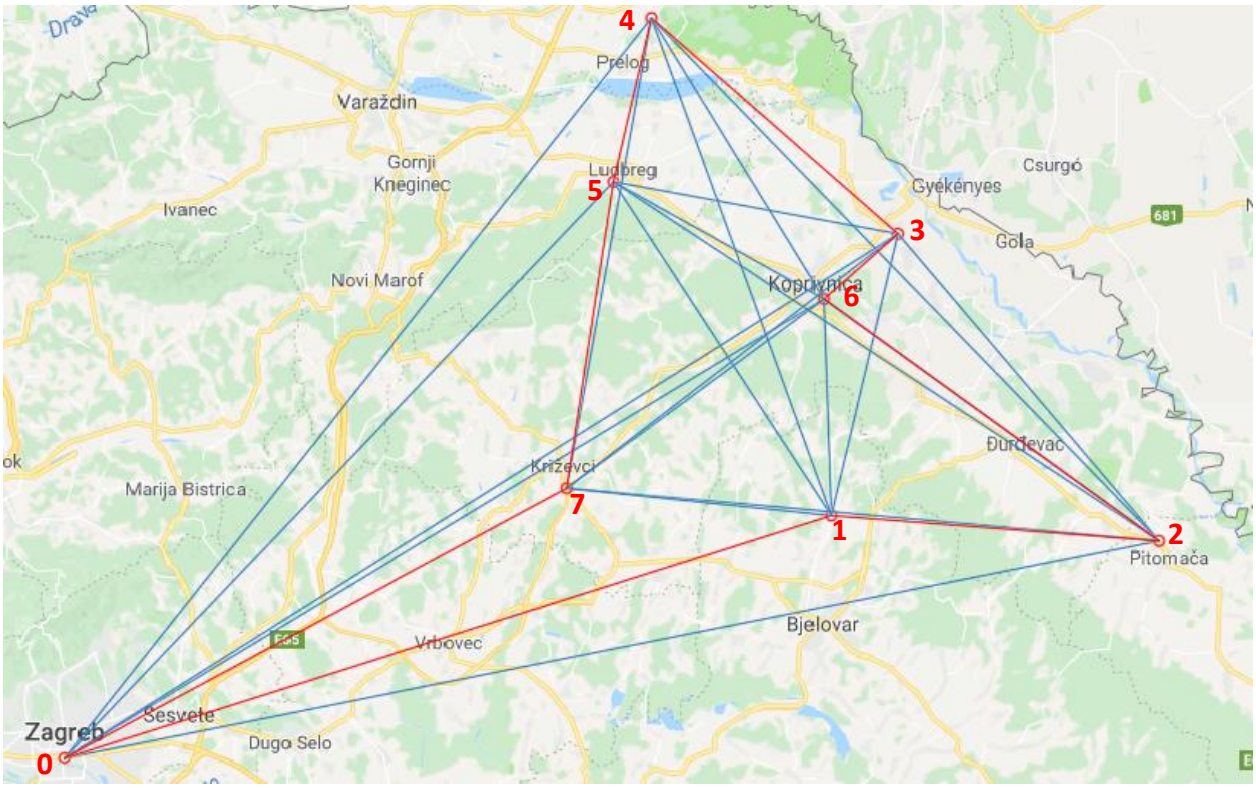
Slika 20. Kombinacija povezivanja vrhova

Postupak ponavljanja izračuna kombinacija spajanja odvija se sve dok se ne dobije Hamiltonov ciklus, odnosno ruta koja svim vrhovima prolazi samo jednom. U nastavku su prikazane nove kombinacije prema slici 20. te se ponovno traži najveća ušteda izračunatih kombinacija.

1. $(2,3) \leq (2,6) + (6,3) = 43 + 10 = 53 \rightarrow 46 \leq 53 \rightarrow \Delta = 8$
2. $(5,7) \leq (5,6) + (6,7) = 20 + 33 = 53 \rightarrow 35 \leq 53 \rightarrow \Delta = 18$

Veza između čvorova x_5 i x_7 pod rednim brojem 2. ima veću uštedu, vrijednosti 18, stoga se ta veza ucrtava u graf te se dobije konačno rješenje *Christofides-ovog algoritma*. Kompletirana ruta prikazana je na slici 21., crvenom bojom, dok su sve ostale međusobne udaljenosti između vrhova prikazane plavom bojom.

Konačna ruta glasi: 0 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 6 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 5 ↔ 7 ↔ 0 = 332 km.



Slika 21. Ruta HR-43627 kao rješenje Christofides-ovog algoritma

5.1.2. Ruta HR-43689

Tablica 5. prikazuje podatke o ruti HR-43689, početna i završna točka je skladišni centar u gradu Zagrebu, a potrebno je opskrbiti šest lokacija, s količinom tereta prikazanom u tablici. Za preostale rute, uključujući i ovu, kod svakog izračuna metoda, biti će prikazan samo početak izračuna te rješenje, odnosno kraj. Postupci izračuna su jednaki kao i kod rute HR-43627 gdje su detaljno obrazloženi.

Tablica 5. Podaci o ruti HR-43689

Redni broj	**Vrijeme dostave**	**Skladišni centar**	**Odredište**	**Količina pakiranja**	**Bruto masa (kg)**	**Šifra rute**
1.	13.3.2017 0:00	Zagreb	Ivanec	5	50	HR-43689
2.	13.3.2017 0:00	Zagreb	Vidovec	2	20	HR-43689
3.	13.3.2017 0:00	Zagreb	Čakovec	3	405	HR-43689
4.	13.3.2017 0:00	Zagreb	Gola	1	96	HR-43689
5.	13.3.2017 0:00	Zagreb	Varaždin	3	405	HR-43689
6.	13.3.2017 0:00	Zagreb	Koprivnica	3	405	HR-43689

U nastavku se nalazi matrica međusobnih udaljenosti između lokacija dobivena iz tablice 5.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	∞	80	83	103	130	88	98
x_1	80	∞	14	42	89	22	67
x_2	83	14	∞	24	78	9	58
x_3	103	42	24	∞	63	17	52
x_4	130	89	78	63	∞	71	26
x_5	88	22	9	17	71	∞	60
x_6	98	67	58	52	26	60	∞

U tablici 6. nalaze se uštede rangirane od najveće prema najmanjoj izračunate prema formuli (4), za potrebe izračuna najkraćeg puta *Clark-Wright-ovog algoritma*.

Tablica 6. Uštede za rutu HR-43689 rangirane prema veličini

Grana (*i,j*)	Ušteda *s*(*i,j*)	Grana (*i,j*)	Ušteda *s*(*i,j*)	Grana (*i,j*)	Ušteda *s*(*i,j*)
(4,6)	202	**(4,5)**	147	**(1,6)**	111
(3,5)	174	**(1,5)**	146		
(3,4)	170	**(1,3)**	141		
(2,5)	162	**(5,6)**	136		
(2,3)	162	**(2,4)**	135		
(1,2)	149	**(2,6)**	123		
(3,6)	149	**(6,7)**	145		

Clark-Wright-ov algoritam ušteda

Prema uštedama u tablici 6. izračunava se *Clark-Wright algoritam*:

(4,6) => 0 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 0

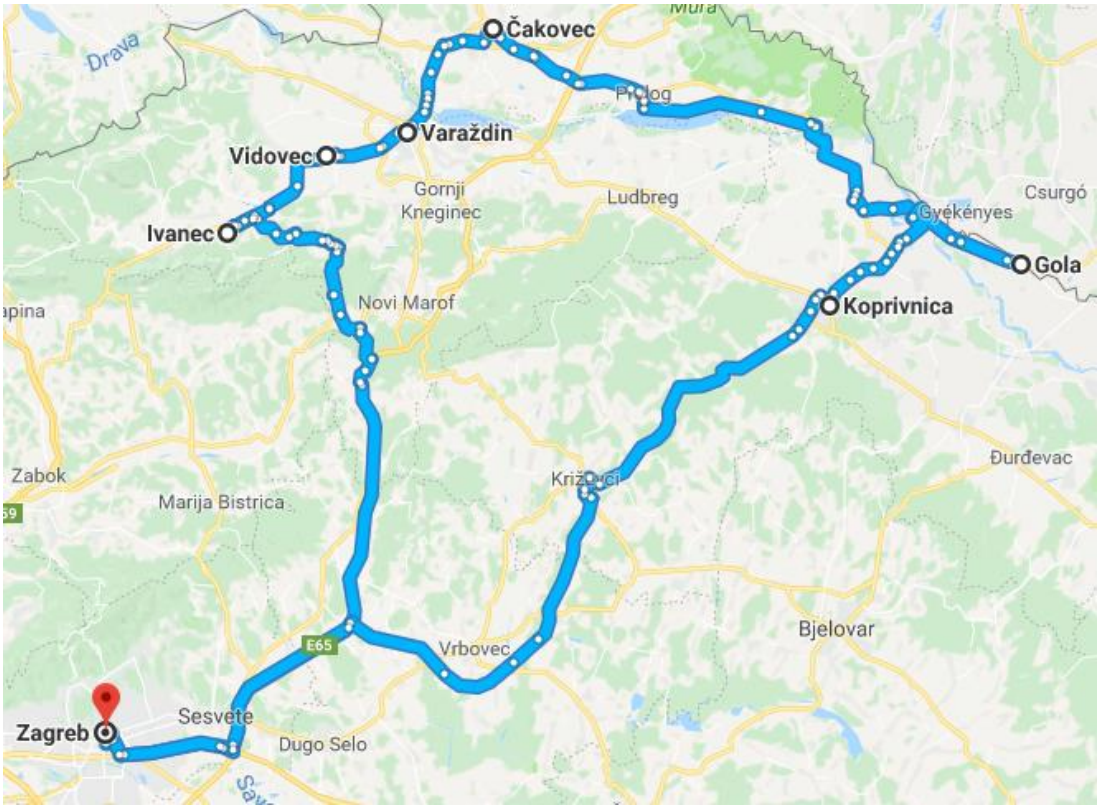
(3,5) => 0 ↔ 3 ↔ 5 ↔ 0

(3,4) => 0 ↔ 5 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 0

(2,5) => 0 ↔ 2 ↔ 5 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 0

(1,2) => 0 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 5 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 0 = 307 km

Na slici (22) prikazano je rješenje izračuna *Clark-Wright-ovog algoritma* za rutu HR-43689. Prikazana je ruta neovisno u kojem smjeru usmjerena, koja obilazi čvorove redoslijedom dobivenim izračunom spomenutog algoritma.



Slika 22. Ruta HR-43689 kao rješenje CW-ovog algoritma

Metoda s indikatorom T

Prema polu-matrici ušteda izračunava se najkraći put pomoću *metode s indikatorom T*. Uštede su izračunate pomoću formule (4).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
	x_1	149	141	121	146	111
		x_2	162	135	162	123
			x_3	170	174	149
				x_4	147	202
					x_5	136

Sljedeća polu-matrica prikazuje konačno rješenje *metode s indikatorom T* prema postupku iz poglavlja 4.2.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	**(1)**	**(0)**	**(0)**	**(0)**	**(0)**	**(1)**
x_1		(1) 149	141	121	146	111
		x_2	162	135	(1) 162	123
			x_3	(1) 170	(1) 174	149
				x_4	147	(1) 202
					x_5	136

$4 \rightarrow 6$

$3 \rightarrow 5$

$3 \rightarrow 4 \Rightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6$

$2 \rightarrow 5 \Rightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6$

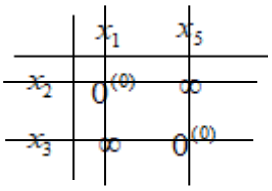
$1 \rightarrow 2 \Rightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6$

$0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 0 = 307$ km.

Metoda grananja i ograničavanja

Na jednak način kao u prethodnom primjeru rješava se *metoda grananja i ograničavanja* pomoću izračuna kazni za nepoštivanje predložene veze među gradovima i odabira pojedinih relacija.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	∞	80	83	103	130	88	98
x_1	80	∞	14	42	89	22	67
x_2	83	14	∞	24	78	9	58
x_3	103	42	24	∞	63	17	52
x_4	130	89	78	63	∞	71	26
x_5	88	22	9	17	71	∞	60
x_6	98	67	58	52	26	60	∞



6 → 4

0 → 6 => 0 ↔ 6 ↔ 4

4 → 3 => 0 ↔ 6 ↔ 4 ↔ 3

1 → 0

5 → 2

2 → 1 => 5 ↔ 2 ↔ 1 ↔ 0

3 → 5 => 0 ↔ 6 ↔ 4 ↔ 3 ↔ 5 ↔ 2 ↔ 1 ↔ 0 = 307 km.

Metoda najbližeg susjeda

Odabirom minimalnih udaljenost u matrici udaljenosti rješava se *metoda najbližeg susjeda* postupkom objašnjenom u poglavlju 4.4.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	∞	80	83	103	130	88	98
x_1	80	∞	14	42	89	22	67
x_2	83	14	∞	24	78	9	58
x_3	103	42	24	∞	63	17	52
x_4	130	89	78	63	∞	71	26
x_5	88	22	9	17	71	∞	60
x_6	98	67	58	52	26	60	∞

0 →1

1 → 2 => 0 ↔ 1 ↔ 2

2 → 5 => 0 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 5

5 → 3 => 0 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 5 ↔ 3

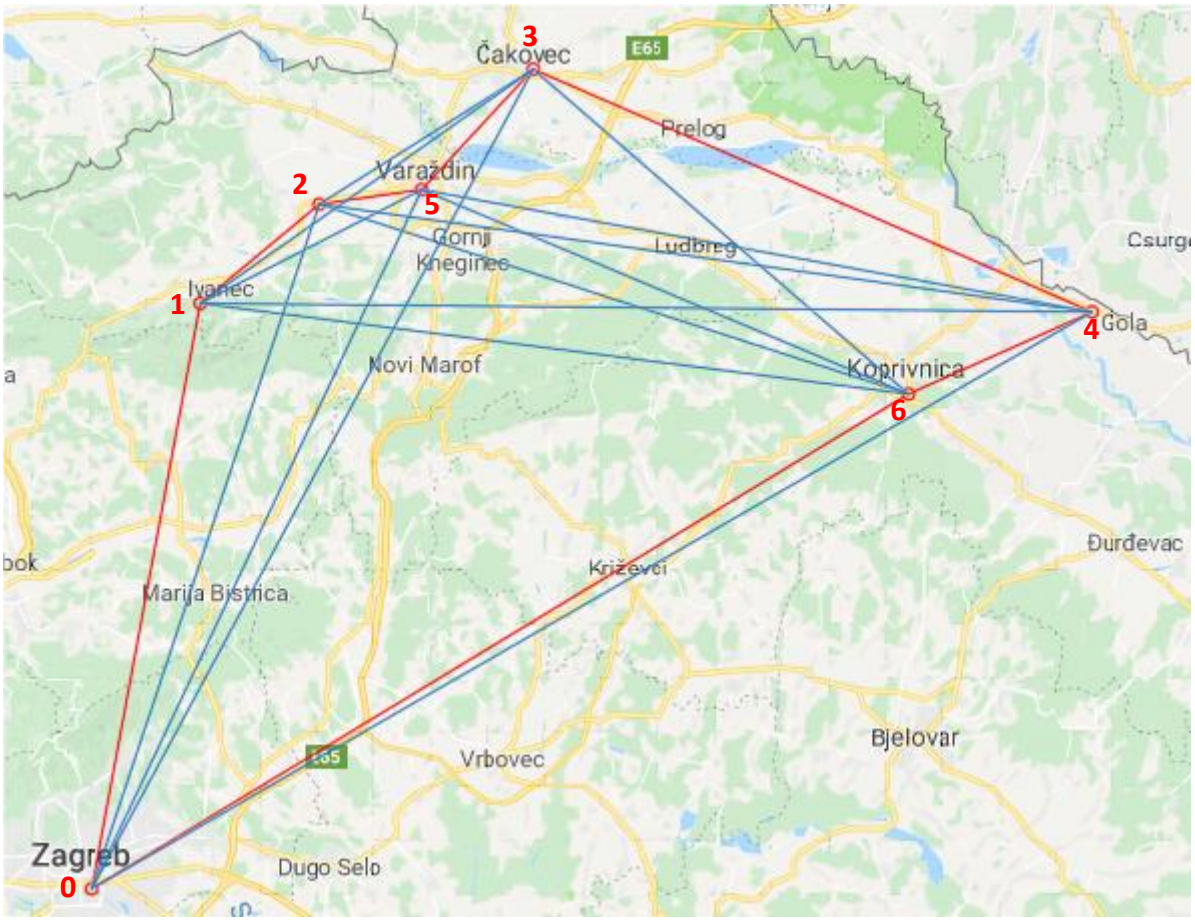
3 → 6 => 0 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 5 ↔ 3 ↔ 6

$6 \rightarrow 4 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4$

$4 \rightarrow 0 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0 = 328$ km.

Christofides-ov algoritam

Slika (23.) prikazuje rješenje *Christofides-ovog algoritma*, izvedeno na način kao u prethodnom primjeru prilikom izračuna najkraćeg puta. Crvene linije označuju konačnu rutu prema izračunu *Christofides-ovog algoritma*, plave linije označavaju međusobne udaljenosti između vrhova. Dobivena ruta: $0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 0 = 307$ km.



Slika 23. Ruta HR-43689 kao rješenje Christofides-ovog algoritma

5.1.3. Ruta HR-43753

Tablica 7. prikazuje osnovne podatke o ruti HR-43753, potrebne za izračun najkraćeg puta pomoću matematičkih metoda.

Tablica 7. Podaci o ruti HR-43753

Redni broj	**Vrijeme dostave**	**Skladišni centar**	**Odredište**	**Količina pakiranja**	**Bruto masa (kg)**	**Šifra rute**
1.	14.3.2017 0:00	Zagreb	Križevci 1	12	120	HR-43753
2.	14.3.2017 0:00	Zagreb	Čakovec	1	264	HR-43753
3.	14.3.2017 0:00	Zagreb	Križevci 2	1	10	HR-43753
4.	14.3.2017 0:00	Zagreb	Nedelišće	2	200	HR-43753
5.	14.3.2017 0:00	Zagreb	Prelog	1	16	HR-43753
6.	14.3.2017 0:00	Zagreb	Peteranec	1	143	HR-43753

Matrični prikaz međusobnih udaljenosti između lokacija iz tablice 7., nalazi se u nastavku, a koristi se pri izračunu najkraćeg puta.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	∞	66	103	65	96	103	103
x_1	66	∞	68	1	62	52	39
x_2	103	68	∞	66	6	16	53
x_3	65	1	66	∞	61	51	39
x_4	96	62	6	61	∞	21	58
x_5	103	52	16	51	21	∞	37
x_6	103	39	53	39	58	37	∞

Tablica 8. prikazuje listu rangiranih ušteda dobivenih iz matrice udaljenosti korištenjem formule (4) za izračun najkraćeg puta pomoću metode *Clark-Wright-ovog algoritma*.

Tablica 8. Uštede za rutu HR-43753 rangirane prema veličini

Grana (*i,j*)	Ušteda *s(i,j)*	Grana (*i,j*)	Ušteda *s(i,j)*	Grana (*i,j*)	Ušteda *s(i,j)*
(2,4)	193	**(1,3)**	130	**(3,4)**	100
(2,5)	190	**(3,6)**	129		
(4,5)	178	**(1,5)**	117		
(5,6)	169	**(3,5)**	117		
(2,6)	153	**(2,3)**	102		
(4,6)	142	**(1,2)**	101		
(1,6)	130	**(1,4)**	100		

Clark-Wright-ov algoritam ušteda

(2,4) => 0 ↔ 2 ↔ 4 ↔ 0

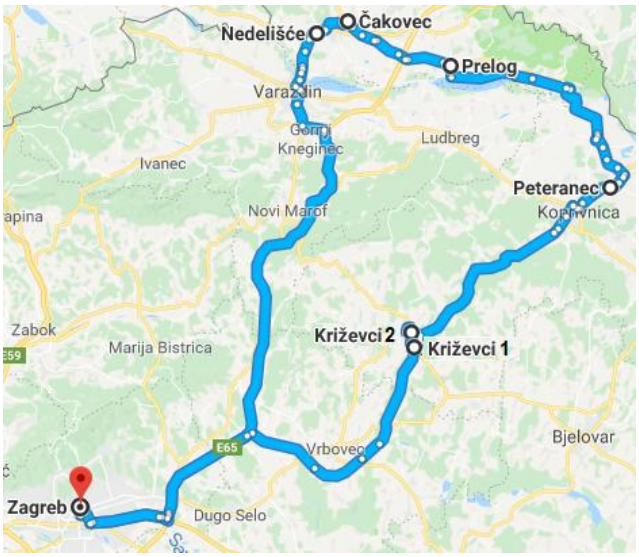
(2,5) => 0 ↔ 5 ↔ 2 ↔ 4 ↔ 0

(5,6) => 0 ↔ 6 ↔ 5 ↔ 2 ↔ 4 ↔ 0

(1,6) => 0 ↔ 1 ↔ 6 ↔ 5 ↔ 2 ↔ 4 ↔ 0

(1,3) => 0 ↔ 3 ↔ 1 ↔ 6 ↔ 5 ↔ 2 ↔ 4 ↔ 0 = 260 km

Slika (24.) prikazuje rješenje Clark-Wright-ovog algoritma za rutu HR – 43753.



Slika 24. Slika 22. Ruta HR-43753 kao rješenje CW-ovog algoritma

Metoda s indikatorom T

Izrada polu-matrice u kojoj se nalaze izračunate uštede, prvi je korak u izračunu najkraćeg puta kod *metode s indikatorom T*. Uštede su dobivene pomoću formule (4).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
x_1	101	130	100	117	130	
x_2	102	193	190	153		
x_3	100	117	129			
x_4	178	142				
x_5	169					

Završna polu-matica s prikazom rute u nastavku kao rješenje *metode s indikatorom T*.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
x_1	101	(1) 130	100	117	(1) 130	
x_2	102	(1) 193	(1) 190	153		
x_3	100	117	129			
x_4	178	142				
x_5	(1) 169					

$2 \rightarrow 4$

$2 \rightarrow 5 \Rightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4$

$5 \rightarrow 6 \Rightarrow 6 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4$

$1 \rightarrow 3$

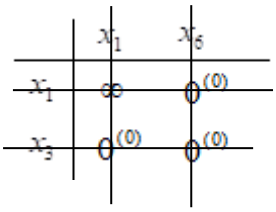
$1 \rightarrow 6 \Rightarrow\ 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4$

$0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0 = 260$ km.

Metoda grananja i ograničavanja

Početna matrica udaljenosti i rješenje *metode grananja i ograničavanja* prikazano je u nastavku. Izračun je izveden na jednak način kao u prethodnom primjeru.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	∞	66	103	65	96	103	103
x_1	66	∞	68	1	62	52	39
x_2	103	68	∞	66	6	16	53
x_3	65	1	66	∞	61	51	39
x_4	96	62	6	61	∞	21	58
x_5	103	52	16	51	21	∞	37
x_6	103	39	53	39	58	37	∞



$2 \rightarrow 4$

$5 \rightarrow 2 \Rightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4$

$6 \rightarrow 5 \Rightarrow 6 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4$

$4 \rightarrow 0 \Rightarrow 6 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0$

$0 \rightarrow 3$

$1 \rightarrow 6 \Rightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0$

$3 \rightarrow 1 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0 = 260$ km.

Metoda najbližeg susjeda

Rješenje *metode najbližeg susjeda* dobiveno je postupkom opisanim u poglavlju 4.4. Iz početne točke odabire se minimalna udaljenost prema prvom sljedećem čvoru te se istim postupkom od odabranog čvora povezuje sljedeći, itd.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	∞	66	103	65	96	103	103
x_1	66	∞	68	1	62	52	39
x_2	103	68	∞	66	6	16	53
x_3	65	1	66	∞	61	51	39
x_4	96	62	6	61	∞	21	58
x_5	103	52	16	51	21	∞	37
x_6	103	39	53	39	58	37	∞

$0 \rightarrow 3$

$3 \rightarrow 1 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1$

$1 \rightarrow 6 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6$

$6 \rightarrow 5 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 5$

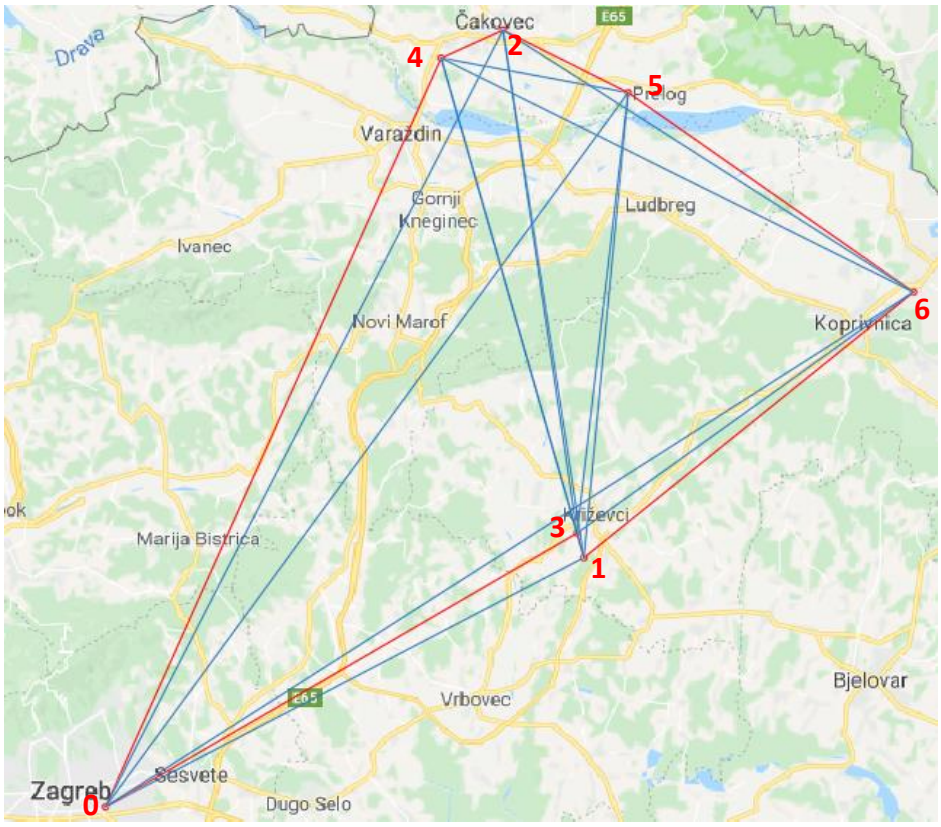
$5 \rightarrow 2 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2$

$2 \rightarrow 4 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4$

$4 \rightarrow 0 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0 = 260$ km.

Cristofidesov algoritam

Rješenje *Christofides-ovog algoritma* prikazano je na slici (25). Konačna ruta je dobivena na jednak način kao u prethodnim primjerima, detaljno opisanim u poglavlju 4.5. Ruta glasi: $0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0 = 260$ km



Slika 25. Ruta HR-43753 kao rješenje Christofides-ovog algoritma

5.1.4. Ruta HR-43472

U tablici 9. nalaze se osnovni podaci o ruti HR-43472. Potrebno je opskrbiti šest lokacija, tako da se svaka lokacija obiđe samo jednom i da se vozilo vrati u čvor iz kojeg je krenulo uz minimalnu prijeđenu udaljenost.

Tablica 9. Podaci o ruti HR-43472

Redni broj	Vrijeme dostave	Skladišni centar	Odredište	Količina pakiranja	Bruto masa (kg)	Šifra rute
1.	8.3.2017 0:00	Zagreb	Prgomelje	2	20	HR-43472
2.	8.3.2017 0:00	Zagreb	Bjelovar	1	447	HR-43472
3.	8.3.2017 0:00	Zagreb	Orehovec	1	125	HR-43472
4.	8.3.2017 0:00	Zagreb	Štefanje	1	77	HR-43472
5.	8.3.2017 0:00	Zagreb	Sveti Ivan Zelina	3	1108	HR-43472
6.	8.3.2017 0:00	Zagreb	Križevci	1	46	HR-43472

U nastavku je prikazana matrica međusobne udaljenosti između lokacija iz tablice 9. Pomoću navedenih udaljenosti, računaju se uštede korištenjem formule (4) te se dobivenim uštedama računa najkraći put prema *Clark-Wright-ovom algoritmu ušteda* i *metodi s indikatorom T*.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	∞	75	84	64	73	39	66
x_1	75	∞	10	36	21	52	25
x_2	84	10	∞	43	19	61	32
x_3	64	36	43	∞	46	24	11
x_4	73	21	19	46	∞	59	35
x_5	39	52	61	24	59	∞	31
x_6	66	25	32	11	35	31	∞

U tablici 10. nalaze se rangirane uštede za izračun *Clark-Wright-ovog algoritma*, dobivene formulom (4):

Tablica 10. Uštede za rutu HR-43472 rangirane prema veličini

Grana (*i,j*)	Ušteda *s*(*i,j*)	Grana (*i,j*)	Ušteda *s*(*i,j*)	Grana (*i,j*)	Ušteda *s*(*i,j*)
(1,2)	149	**(4,6)**	104	**(4,5)**	53
(2,4)	138	**(1,3)**	103		
(1,4)	127	**(3,4)**	91		
(3,6)	119	**(3,5)**	79		
(2,6)	118	**(5,6)**	74		
(1,6)	116	**(1,5)**	62		
(2,3)	105	**(2,5)**	62		

Clark-Wright-ov algoritam

(1,2) => 0 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 0

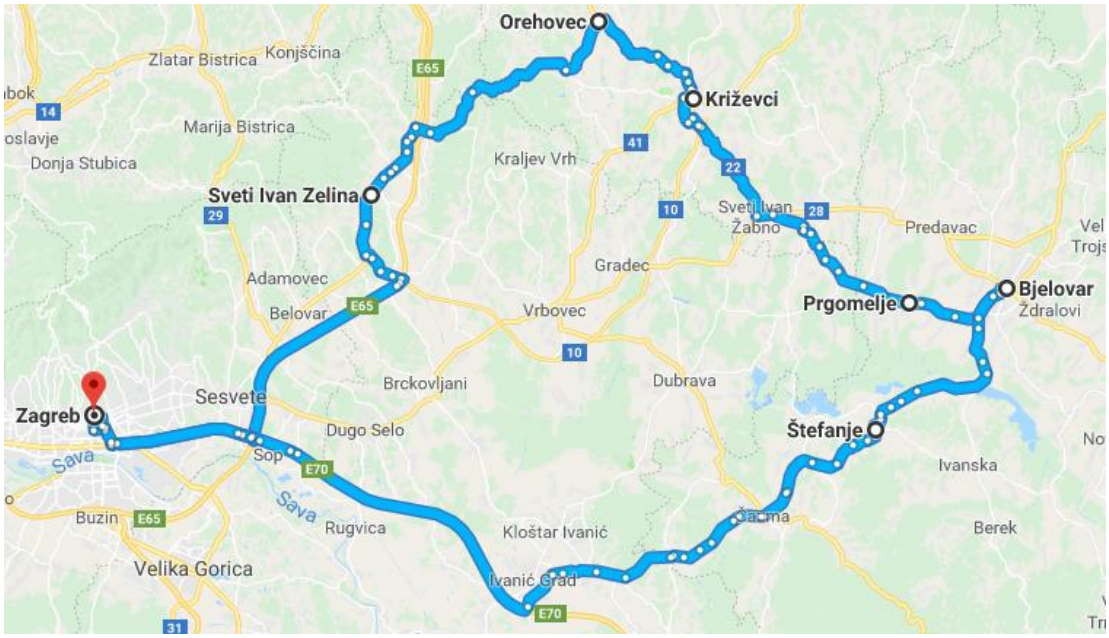
(2,4) => 0 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 4 ↔ 0

(3,6) => 0 ↔ 3 ↔ 6 ↔ 0

(1,6) => 0 ↔ 3 ↔ 6 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 4 ↔ 0

(3,5) => 0 ↔ 5 ↔ 3 ↔ 6 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 4 ↔ 0 = 201 km.

Slika (26) prikazuje rutu kao rješenje *Clark-Wright-ovog algoritma*.



Slika 26. Ruta HR-43472 kao rješenje CW-ovog algoritma

Metoda s indikatorom T

Izračunom ušteda te izradom polu-matrice udaljenosti započinje projektiranje rute pomoću *metode s indikatorom T*. Odabire se maksimalna ušteda koja ujedno predstavlja i početnu relaciju, odnosno poveznicu između čvorova gdje se ušteda nalazi. Uštede su dobivene korištenjem formule (4).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
	x_1	149	103	127	62	116
		x_2	105	138	62	118
			x_3	91	79	119
				x_4	53	104
					x_5	74

Rješenje za navedenu rutu, prikazano je pomoću polu-matrice u nastavku.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	**(0)**	**(0)**	**(0)**	**(1)**	**(1)**	**(0)**
x_1		(1) 149	103	127	62	(1) 116
		x_2	105	(1) 138	62	118
			x_3	91	(1) 79	(1) 119
				x_4	53	104
					x_5	74

$1 \rightarrow 2$

$2 \rightarrow 4 \Rightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4$

$3 \rightarrow 6 \Rightarrow$

$1 \rightarrow 6 \Rightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4$

$3 \rightarrow 5 \Rightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4$

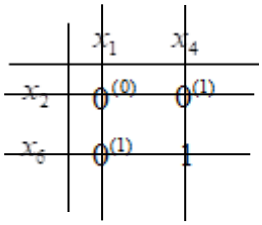
$0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0 = 201$ km.

Metoda grananja i ograničavanja

Matrični prikaz udaljenosti nalazi se u nastavku. Rješenje najkraćeg puta dobije se izračunom kazni za nepoštivanje predloženih veza među gradovima. Izračunate kazne (nule) predstavljaju pojedine relacije u ruti.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	∞	75	84	64	73	39	66
x_1	75	∞	10	36	21	52	25
x_2	84	10	∞	43	19	61	32
x_3	64	36	43	∞	46	24	11
x_4	73	21	19	46	∞	59	35
x_5	39	52	61	24	59	∞	31
x_6	66	25	32	11	35	31	∞

Posljednje dvije dobivene relacije, da bi se ruta kompletirala su: x_2 i x_4 te x_6 i x_1



Redoslijed dobivanja pojedinih relacija:

$0 \rightarrow 5$

$3 \rightarrow 6$

$5 \rightarrow 3 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6$

$4 \rightarrow 0$

$1 \rightarrow 2$

$2 \rightarrow 4 \Rightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0$

$6 \rightarrow 1 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0 = 201$ km.

Metoda najbližeg susjeda

U nastavku je prikazano rješenje prema *metodi najbližeg susjeda* za najkraći put:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	∞	75	84	64	73	39	66
x_1	75	∞	10	36	21	52	25
x_2	84	10	∞	43	19	61	32
x_3	64	36	43	∞	46	24	11
x_4	73	21	19	46	∞	59	35
x_5	39	52	61	24	59	∞	31
x_6	66	25	32	11	35	31	∞

$0 \rightarrow 5$

$5 \rightarrow 3 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3$

$3 \rightarrow 6 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6$

6 → 1 => 0 ↔ 5 ↔ 3 ↔ 6 ↔ 1

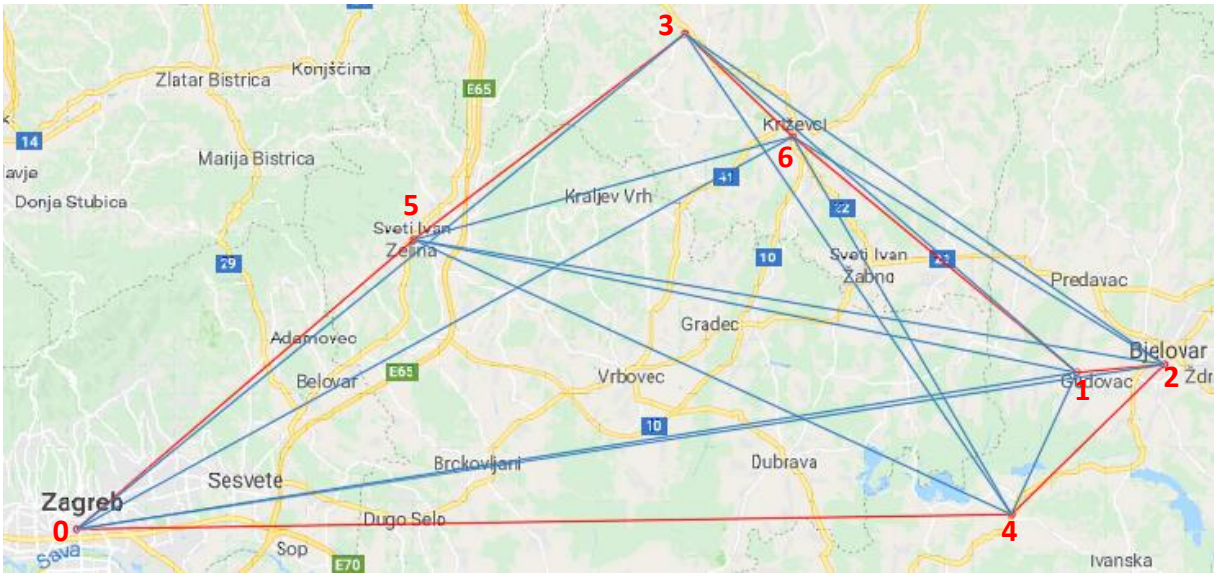
1 → 2 => 0 ↔ 5 ↔ 3 ↔ 6 ↔ 1 ↔ 2

2 → 4 => 0 ↔ 5 ↔ 3 ↔ 6 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 4

4 → 0 => 0 ↔ 5 ↔ 3 ↔ 6 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 4 ↔ 0 = 201 km.

Christofides-ov algoritam

Jednako kao u i prethodnim primjerima dobiveno je rješenje *Christofides-ovog algoritma*. Na slici (27) prikazano je rješenje najkraćeg puta prema metodi *Christofides-ovog algoritma*. Ruta dobivena *Christofides-ovim algoritmom*: 0 ↔ 5 ↔ 3 ↔ 6 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 4 ↔ 0 = 201 km.



Slika 27. Ruta HR-43472 kao rješenje Christofides-ovog algoritma

5.1.5. Ruta HR-43882

U ruti HR-43882 nalazi se pet lokacija koje je potrebno opskrbiti robom. Tablica 11. prikazuje podatke o dostavi, vremenu, odredištu, količini i masi tereta. Na temelju navedenih podataka projektirati će se ruta, te će se trošak distribucije optimizirati.

Tablica 11. Podaci o ruti HR-43882

Redni broj	Vrijeme dostave	Skladišni centar	Odredište	Količina pakiranja	Bruto masa(kg)	Šifra rute
1.	16.3.2017 0:00	Zagreb	Pisarovina	2	800	HR-43882
2.	16.3.2017 0:00	Zagreb	Kutina	1	21	HR-43882
3.	16.3.2017 0:00	Zagreb	Sisak	2	486	HR-43882
4.	16.3.2017 0:00	Zagreb	Gorica Svetojanska	1	300	HR-43882
5.	16.3.2017 0:00	Zagreb	Popovača	1	373	HR-43882

Međusobna udaljenost između lokacija iz tablice 11. prikazana je u nastavku te će se pomoću nje računati uštede između čvorova za daljnji postupak izračuna najkraćeg puta.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	∞	34	83	60	45	66
x_1	34	∞	105	61	36	86
x_2	83	105	∞	44	124	24
x_3	60	61	44	∞	92	25
x_4	45	36	124	92	∞	107
x_5	66	86	24	25	107	∞

Tablica 12. prikazuje uštede izračunate prema formuli (4) i rangirane prema veličini za svih pet vrhova.

Tablica 12. Uštede za rutu HR-43882 rangirane prema veličini

Grana (i,j)	Ušteda $s(i,j)$	Grana (i,j)	Ušteda $s(i,j)$
(2,5)	125	**(1,2)**	12
(3,5)	101	**(2,4)**	4
(2,3)	99	**(4,5)**	4
(1,4)	43		
(1,3)	33		
(1,5)	14		
(3,4)	13		

Clark-Wright-ov algoritam

Uštede iz tablice 12. koriste se pri izračunu najkraćeg puta *Clark-Wright-ovog algoritma* kako je prikazano u nastavku.

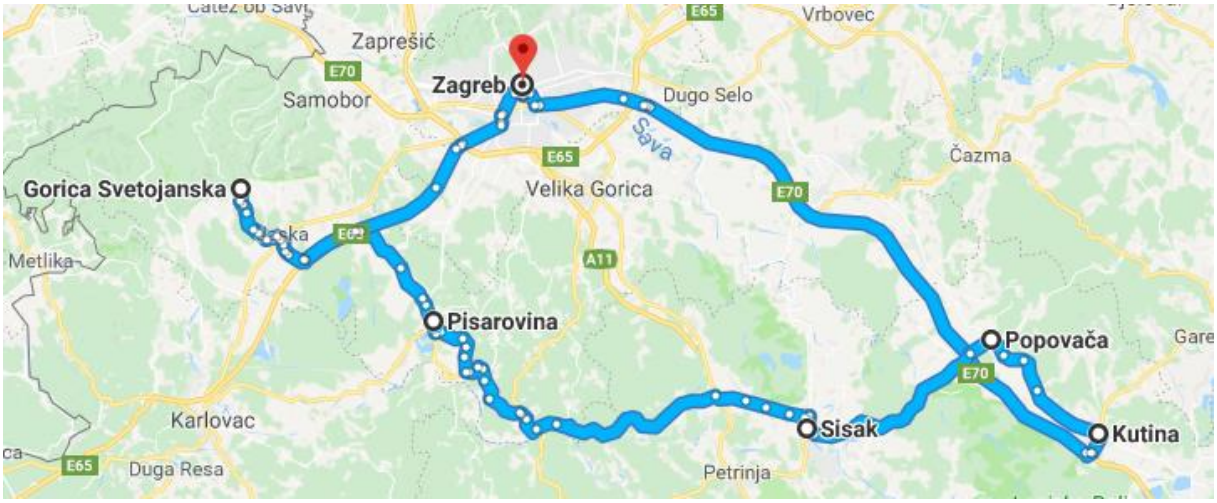
(2,5) => 0 ↔ 2 ↔ 5 ↔ 0

(3,5) => 0 ↔ 2 ↔ 5 ↔ 3 ↔ 0

(1,4) => 0 ↔ 1 ↔ 4 ↔ 0

(1,3) => 0 ↔ 2 ↔ 5 ↔ 3 ↔ 1 ↔ 4 ↔ 0 = 274 km.

Slika (28) prikazuje grafičko rješenje *Clark-Wright-ovog algoritma*.



Slika 28. Ruta HR-43882 kao rješenje CW-ovog algoritma

Metoda s indikatorom T

Izračun započinje pretragom ušteda prema polu-matrici, odnosno pronalaskom maksimalne uštede. Odabrana ušteda između dva čvora označava prvu relaciju u ruti, na jednak način uz poštivanje ograničenja odabiru se sljedeće po veličini uštede te se po tom principu dobije rješenje, odnosno kompletirana ruta. U nastavku je prikazana početna polu-matrica udaljenosti za rutu HR-43882 i završna polu matrica kao rješenje najkraćeg puta prema *metodi s indikatorom T*. Uštede koje se nalaze u polu-matrici izračunate su pomoću formule (4).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
x_1	12	33	43	14	
x_2	99	4	125		
x_3	13	101			
x_4	4				

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	**(0)**	**(1)**	**(0)**	**(1)**	**(0)**
x_1	12		(1) 33	(1) 43	14
x_2	99	4			(1) 125
x_3	13				(1) 101
x_4	4				

$2 \rightarrow 5$

$3 \rightarrow 5 \Rightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3$

$1 \rightarrow 4$

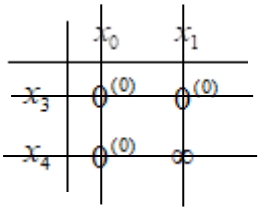
$1 \rightarrow 3 \Rightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4$

$0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0 = 274$ km.

Metoda grananja i ograničavanja

Obzirom da u završnoj matrici sve vrijednosti kazni iznose nula, prvo se odabire relacija $x_4 \rightarrow x_0$ jer se radi ograničenja ne može odabrati relacija x_4 i x_1, već postoji relacija koja je usmjerena od čvora x_1 prema čvoru x_4. Prema tome, posljednja relacija je $x_3 \rightarrow x_1$.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	∞	34	83	60	45	66
x_1	34	∞	105	61	36	86
x_2	83	105	∞	44	124	24
x_3	60	61	44	∞	92	25
x_4	45	36	124	92	∞	107
x_5	66	86	24	25	107	∞



U nastavku se nalaze koraci rješenja prema redoslijedu odabira pojedinačnih relacija:

$2 \rightarrow 5$

$5 \rightarrow 3 \Rightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3$

$0 \rightarrow 2 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3$

$1 \rightarrow 4$

$4 \rightarrow 0 \Rightarrow 1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0$

$3 \rightarrow 1 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0 = 274$ km.

Metoda najbližeg susjeda

Početak izračuna započinje odabirom minimalne udaljenosti usmjerene od čvora x_0, u ovom primjeru, početna relacija je $x_0 \rightarrow x_1$, minimalna udaljenost iznosi 34 km. Zatim se iz vrha x_1 odabire također minimalna udaljenost ne uzimajući u obzir vrh x_0, kako ne bi nastala pod-ruta „*subtour*“, stoga sljedeći čvor u djelomičnoj ruti je x_4. Na jednak način dobije se rješenje *metode najbližeg susjeda*, kompletna ruta.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	∞	34	83	60	45	66
x_1	34	∞	105	61	36	86
x_2	83	105	∞	44	124	24
x_3	60	61	44	∞	92	25
x_4	45	36	124	92	∞	107
x_5	66	86	24	25	107	∞

$0 \rightarrow 1$

$1 \rightarrow 4 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4$

$4 \rightarrow 3 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3$

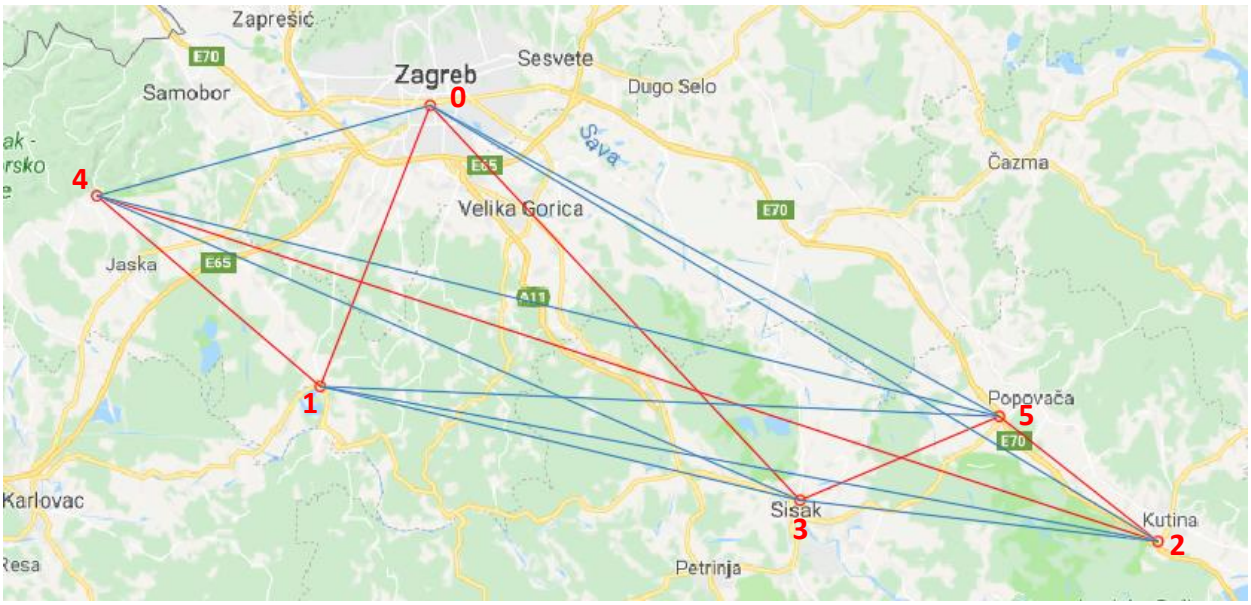
$3 \rightarrow 5 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5$

$5 \rightarrow 2 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2$

$2 \rightarrow 0 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0 = 294$ km.

Christofides-ov algoritam

Na jednak način kao u prethodnim primjerima dobiveno je rješenje najkraćeg puta pomoću *Christofides-ovog algoritma*. Na slici 29. crvenim linijama prikazana je ruta kao rješenje navedenog algoritma. Rješenje je: $0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 0 = 303$ km.



Slika 29. Ruta HR-43882 kao rješenje Christofides-ovog algoritma

5.1.6. Ruta HR-43881

U stupcu „odredište“ u tablici 13., grad Koprivnica naveden je tri puta kao dostavno mjesto, odnosno numeriran brojevima od jedan do tri, razlog tome su tri različita mjesta koja je potrebno opskrbiti unutar grada Koprivnice, međutim radi tajnosti podataka nije moguće navesti točnu adresu, stoga se brojevima označavaju navedena mjesta. Ruta HR-43881 je ruta na području Sjeverne Hrvatske koja sadrži najveći broj mjesta koja je potrebno opskrbiti.

Tablica 13. Podaci o ruti HR-43881

Redni broj	**Vrijeme dostave**	**Skladišni centar**	**Odredište**	**Količina pakiranja**	**Bruto masa (kg)**	**Šifra rute**
1.	16.3.2017 0:00	Zagreb	Ludbreg	1	211	HR-43881
2.	16.3.2017 0:00	Zagreb	Koprivnica 1	1	235	HR-43881
3.	16.3.2017 0:00	Zagreb	Đurđevac	1	557	HR-43881
4.	16.3.2017 0:00	Zagreb	Ferdinandovac	1	38	HR-43881
5.	16.3.2017 0:00	Zagreb	Koprivnica 2	1	193	HR-43881
6.	16.3.2017 0:00	Zagreb	Čakovec	1	782	HR-43881
7.	16.3.2017 0:00	Zagreb	Prelog	1	72	HR-43881
8.	16.3.2017 0:00	Zagreb	Varaždin	1	49	HR-43881
9.	16.3.2017 0:00	Zagreb	Koprivnica 3	1	148	HR-43881

U matričnom prikazu međusobnih udaljenosti u nastavku prikazane su udaljenosti između lokacija navedenih u tablici 13. To je ujedno i početna radnja prije početka projektiranja ruta *Clark-Wright-ovim algoritmom,* kako bi se mogle izračunati uštede između čvorova unutar rute.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_0	∞	98	100	109	120	97	103	103	88	98
x_1	89	∞	25	45	59	24	30	16	28	22
x_2	100	25	∞	34	45	9	53	37	52	3
x_3	109	45	34	∞	11	26	79	64	78	32
x_4	120	59	45	11	∞	36	90	74	89	42
x_5	97	24	9	26	26	∞	55	40	54	7
x_6	103	30	53	79	90	55	∞	16	17	51
x_7	103	16	37	64	74	40	16	∞	26	36
x_8	88	28	52	78	89	54	17	26	∞	48
x_9	98	22	3	32	42	7	51	36	48	∞

Tablica 14. prikazuje uštede izračunate prema formuli (4). Uštede su rangirane prema veličini radi izračuna *Clark-Wright-ovog algoritma*. Uz zadovoljenje ograničenja i uvjeta prolazi se po listi ušteda te se ruta formira kao rješenje najkraćeg puta.

Tablica 14. Uštede za rutu HR-43881 rangirane prema veličini

Grana (*i,j*)	**Ušteda *s*(*i,j*)**	**Grana (*i,j*)**	**Ušteda *s*(*i,j*)**	**Grana (*i,j*)**	**Ušteda *s*(*i,j*)**
(3,4)	218	**(6,8)**	174	**(2,6)**	150
(2,9)	195	**(1,9)**	174	**(6,9)**	150
(6,7)	190	**(1,2)**	173	**(4,7)**	149
(2,5)	188	**(1,5)**	171	**(3,7)**	148
(5,9)	188	**(1,6)**	171	**(5,6)**	145
(1,7)	185	**(2,7)**	166	**(8,9)**	138
(4,5)	181	**(7,8)**	165	**(2,8)**	136
(3,5)	180	**(7,9)**	165	**(4,6)**	133
(4,9)	176	**(1,3)**	162	**(3,6)**	133
(2,4)	175	**(5,7)**	160	**(5,8)**	131
(3,9)	175	**(1,4)**	159	**(4,8)**	119
(2,3)	175	**(1,8)**	158	**(3,8)**	119

Clark-Wright-ov algoritam

U nastavku je prikazano rješenje *Clark-Wright-ovog algoritma* prema uštedama iz tablice 14.

(3,4) => 0 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 0

(2,9) => 0 ↔ 2 ↔ 9 ↔ 0

(6,7) => 0 ↔ 6 ↔ 7 ↔ 0

(2,5) => 0 ↔ 5 ↔ 2 ↔ 9 ↔ 0

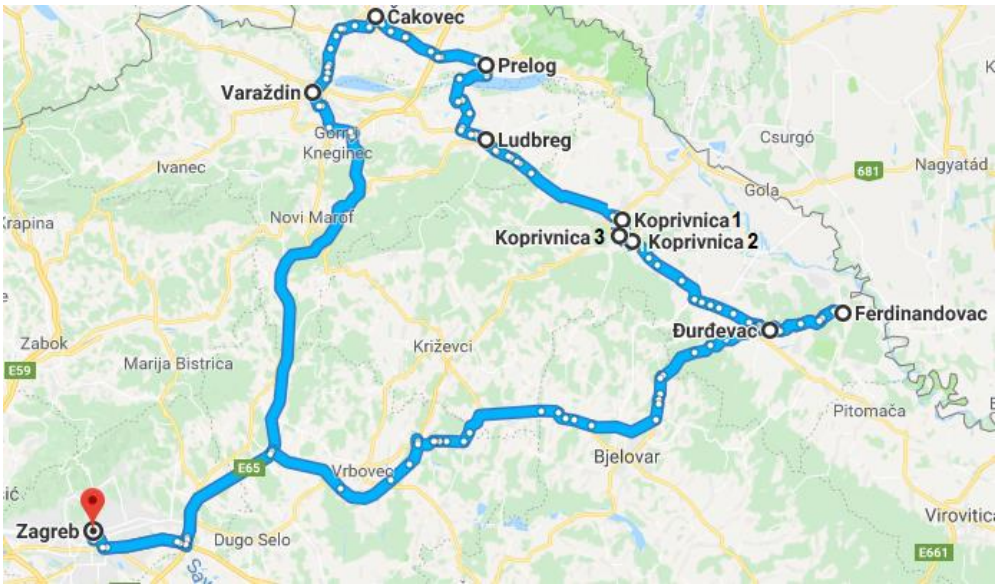
(1,7) => 0 ↔ 6 ↔ 7 ↔ 1 ↔ 0

(4,5) => 0 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 5 ↔ 2 ↔ 9 ↔ 0

(6,8) => 0 ↔ 8 ↔ 6 ↔ 7 ↔ 1 ↔ 0

(1,9) => 0 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 5 ↔ 2 → 9 ↔ 1 ↔ 7 ↔ 6 ↔ 8 ↔ 0 = 327 km.

Slika (30) prikazuje rješenje dobiveno metodom Clark-Wright-ovog algoritma.



Slika 30. Ruta HR-43881 kao rješenje Clark-Wright-ovog algoritma

Metoda s indikatorom T

Polu-matrica u nastavku prikazuje dobivene uštede prema formuli (4). Pomoću navedenih ušteda dobije se rješenje najkraćeg puta prema *metodi s indikatorom T* po prinicpu izračuna kako je objašnjeno u poglavlju 4.2.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_0	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
x_1	173	162	159	171	171	185	158	174	
x_2	175	175	188	150	166	136	195		
x_3	218	180	133	148	119	175			
x_4	181	133	149	119	176				
x_5	145	160	131	188					
x_6	190	174	150						
x_7	165	165							
x_8	138								

U nastavku se nalazi prikaz završne polu-matrice udaljenosti s rješenjima najkraćeg puta.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_0	**(0)**	**(0)**	**(1)**	**(0)**	**(0)**	**(0)**	**(0)**	**(1)**	**(0)**
x_1	173	162	159	171	171	(1) 185	158	(1) 174	
x_2	175	175	(1) 188	150	166	136	(1) 195		
x_3	(1) 218	180	133	148	119	175			
x_4	(1) 181	133	149	119	176				
x_5	145	160	131	188					
x_6	(1) 190	(1) 174	150						
x_7	165	165							
x_8	138								

$3 \rightarrow 4$

$2 \rightarrow 9$

$6 \rightarrow 7$

$2 \rightarrow 5 \Rightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 9$

$1 \rightarrow 7 \Rightarrow 6 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 1$

$4 \rightarrow 5 \Rightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \rightarrow 9$

$6 \rightarrow 8 \Rightarrow 8 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 1$

$1 \rightarrow 9 \Rightarrow 8 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 7 \rightarrow 1 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3$

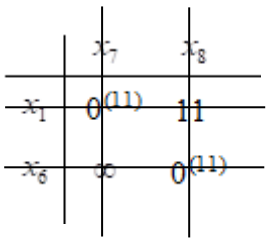
$0 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 7 \rightarrow 1 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 0 = 327$ km.

Metoda grananja i ograničavanja

Na jednak način kao u prethodnim primjerima dobiveno je rješenje najkraćeg puta prema *metodi grananja i ograničavanja*.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_0	∞	98	100	109	120	97	103	103	88	98
x_1	89	∞	25	45	59	24	30	16	28	22
x_2	100	25	∞	34	45	9	53	37	52	3
x_3	109	45	34	∞	11	26	79	64	78	32
x_4	120	59	45	11	∞	36	90	74	89	42
x_5	97	24	9	26	26	∞	55	40	54	7
x_6	103	30	53	79	90	55	∞	16	17	51
x_7	103	16	37	64	74	40	16	∞	26	36
x_8	88	28	52	78	89	54	17	26	∞	48
x_9	98	22	3	32	42	7	51	36	48	∞

Završne relacije su: $x_1 \rightarrow x_7$ i $x_6 \rightarrow x_8$ kako je i prikazano u matrici u nastavku.



Relacije između vrhova dobivene prema redoslijedu rješavanja *metode grananja i ograničavanja:*

$3 \rightarrow 4$

$4 \rightarrow 5 \Rightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5$

$8 \rightarrow 0$

$0 \rightarrow 3 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5$

$2 \rightarrow 9$

$5 \rightarrow 2 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 9$

$7 \rightarrow 6$

$9 \rightarrow 1 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 1$

$1 \rightarrow 7 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 7$

$6 \rightarrow 8 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 0 = 327$ km.

Metoda najbližeg susjeda

Odabirom minimalnih udaljenosti između vrhova rješava se *metoda najbližeg susjeda*, na jednak način kao i u prethodnim primjerima. U nastavku je prikazan redoslijed dobivenih relacija. Najbliži čvor početnoj lokaciji je x_8, zatim se u rutu nadovezuje čvor x_6, itd.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_0	∞	98	100	109	120	97	103	103	88	98
x_1	89	∞	25	45	59	24	30	16	28	22
x_2	100	25	∞	34	45	9	53	37	52	3
x_3	109	45	34	∞	11	26	79	64	78	32
x_4	120	59	45	11	∞	36	90	74	89	42
x_5	97	24	9	26	26	∞	55	40	54	7
x_6	103	30	53	79	90	55	∞	16	17	51
x_7	103	16	37	64	74	40	16	∞	26	36
x_8	88	28	52	78	89	54	17	26	∞	48
x_9	98	22	3	32	42	7	51	36	48	∞

U nastavku je prikazan redoslijed dobivanja pojedinih relacija prilikom izračuna najkraćeg puta kod *metode najbližeg susjeda*. Posljednja dobivena relacija u ruti je $x_4 \rightarrow x_0$, iako je udaljenost od čvora x_4 prema čvoru x_0 najveća od ponuđenih, kako ne bi nastala pod-ruta i obzirom da je to preostali čvor, potrebno ih je povezati iako filozofija *metode najbližeg susjeda* nalaže odabir minimalnih udaljenosti, odnosno odabir najbližeg čvora.

$0 \rightarrow 8$

$8 \rightarrow 6 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 6$

$6 \rightarrow 7 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 7$

$7 \rightarrow 1 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 1$

$1 \rightarrow 9 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 6 \rightarrow 7 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 9$

$9 \rightarrow 2 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 6 \rightarrow 7 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 2$

$2 \rightarrow 5 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 6 \rightarrow 7 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5$

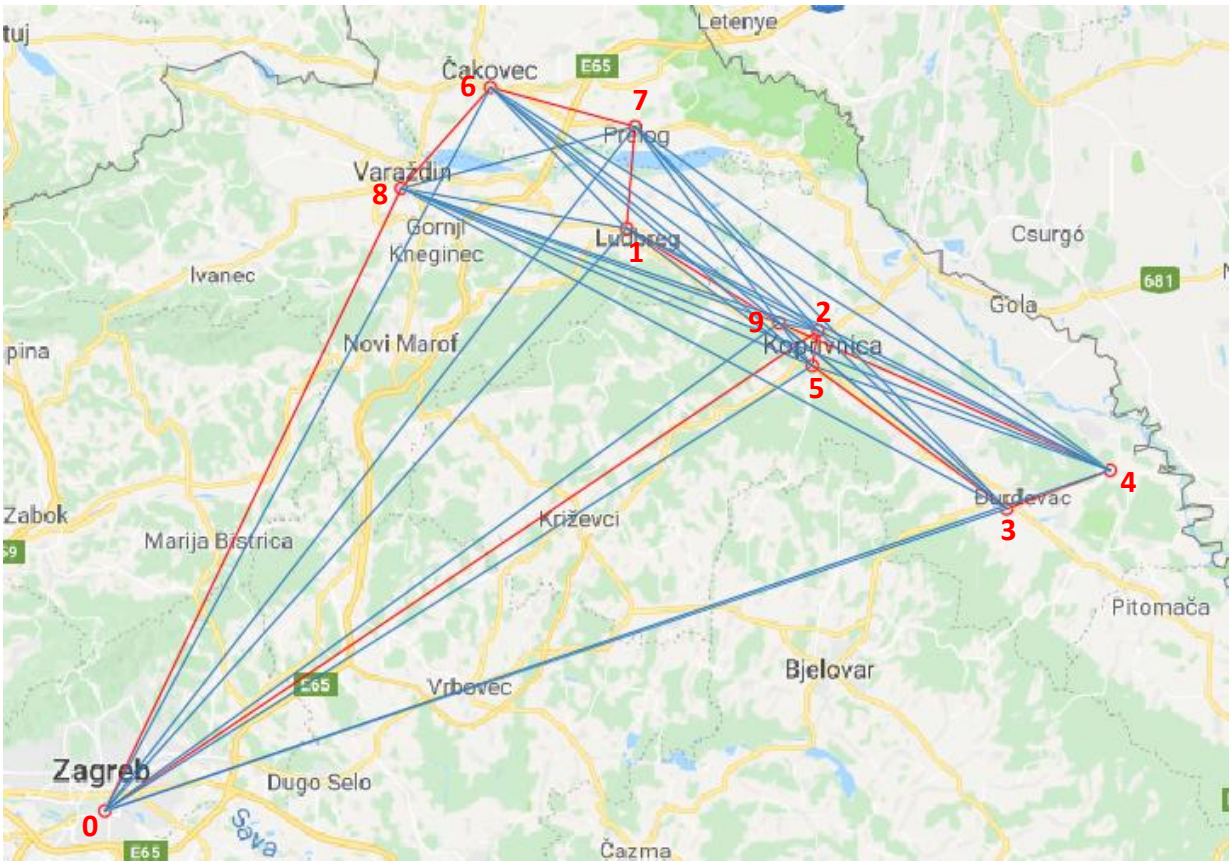
$5 \rightarrow 3 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 6 \rightarrow 7 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3$

$3 \rightarrow 4 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 6 \rightarrow 7 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4$

$4 \rightarrow 0 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 6 \rightarrow 7 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0 = 328$ km.

Christofides-ov algoritam

Rješenje *Christofides-ovog algoritma* nalazi se na slici 31. Crvene linije označuju najkraći put kao rješenje algoritma, dok plave linije prikazuju međusobne udaljenosti između čvorova. Svrha *Christofides-ovog algoritma* je dobiti rješenje najkraćeg puta korištenjem matrice udaljenosti Detaljno objašnjen postupak dobivanja rješenja prikazan je u poglavlju 4.5. Rješenje za rutu HR-43881 glasi: $0 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0 = 347$ km.



Slika 31. Ruta HR-43881 kao rješenje Christofides-ovog algoritma

5.2. Rute na području Slavonije

Nakon što su dobivena rješenja najkraćeg puta pomoću matematičkih metoda za sve navedene rute na području Sjeverne Hrvatske, potrebno je projektirati rute i izračunati najkraći put za rute na području Slavonije. Na jednak način projektiraju se i izračunavaju rute na području Slavonije kao i u primjerima Sjeverne Hrvatske. Rute se u navedenim područjima razlikuju prvenstveno prema udaljenosti središta distribucije i polazne točke, stoga su i duljine samih ruta znatno veće na području Slavonije, u odnosu na rute na području Sjeverne Hrvatske.

Osim prostorne i vremenske razdaljine, razlika je i u broju lokacija koje je potrebno opskrbiti. Proporcionalno tome, veća je i količina tereta pri distribuciji na području Slavonije. Stoga je veoma bitno dobiti optimalna rješenja, odnosno najkraći put kako bi se uštedjelo vrijeme i novac. Obzirom da je potrebno distribuirati veću količinu tereta, uštede mogu nastati pravilnim odabirom vozila, neophodno je stoga teret pravilno slagati u vozilo te postoji mogućnost kombiniranja paketa, odnosno popunjavanja praznog prostora u vozilu, pazeći pri tome na ukupnu masu i nosivost vozila. U nastavku su prikazani izračuni najkraćeg puta prema metodama za rute na području Slavonije.

5.2.1. Ruta HR-43344

Tablica 15. prikazuje osnovne podatke o ruti HR-43344. Distribuciju započinje kao i kod Sjeverne Hrvatske iz centralnog skladišta u gradu Zagrebu. Kao što je ranije navedeno, lokacije. Iako su udaljenosti znatno veće kod distribucije na području Slavonije, princip je isti za izračun najkraćeg puta po matematičkim metodama.

Tablica 15. Podaci o ruti HR-43344

Redni broj	**Vrijeme dostave**	**Skladišni centar**	**Odredište**	**Količina pakiranja**	**Bruto masa (kg)**	**Šifra rute**
1.	7.3.2017 0:00	Zagreb	Našice	2	278	HR-43344
2.	7.3.2017 0:00	Zagreb	Požega	4	556	HR-43344
3.	7.3.2017 0:00	Zagreb	Đakovo	3	417	HR-43344
4.	7.3.2017 0:00	Zagreb	Osijek	5	695	HR-43344
5.	7.3.2017 0:00	Zagreb	Slavonski Brod	4	556	HR-43344
6.	7.3.2017 0:00	Zagreb	Vinkovci	3	417	HR-43344

Udaljenosti između lokacija iz tablice 15. prikazane su u matričnom obliku u nastavku. Vidljivo je kako su udaljenosti iz početne točke prema lokacijama nekoliko puta veće u odnosu na udaljenosti među lokacijama te će to utjecati na krajnji rezultat.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	∞	224	174	242	283	191	272
x_1	224	∞	48	35	55	54	78
x_2	174	48	∞	72	143	43	134
x_3	242	35	72	∞	43	53	39
x_4	283	55	143	43	∞	95	42
x_5	191	54	43	53	95	∞	84
x_6	272	78	134	39	42	84	∞

Tablica 16. prikazuje rješenja ušteda dobivenih pomoću formule (4), sortirane prema veličini od najveće prema najmanjoj, prema zahtjevu za izračun najkraćeg puta *Clark-Wright-ovog algoritma*.

Tablica 16. Uštede za rutu HR-43344 rangirane prema veličini

Grana (*i,j*)	Ušteda *s(i,j)*	Grana (*i,j*)	Ušteda *s(i,j)*	Grana (*i,j*)	Ušteda *s(i,j)*
(4,6)	513	**(5,6)**	379	**(2,6)**	312
(3,4)	482	**(4,5)**	379		
(3,6)	475	**(1,5)**	361		
(1,4)	452	**(1,2)**	350		
(1,3)	431	**(2,3)**	344		
(1,6)	418	**(2,5)**	322		
(3,5)	380	**(2,4)**	314		

Clark-Wright-ov algoritam

(4,6) => 0 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 0

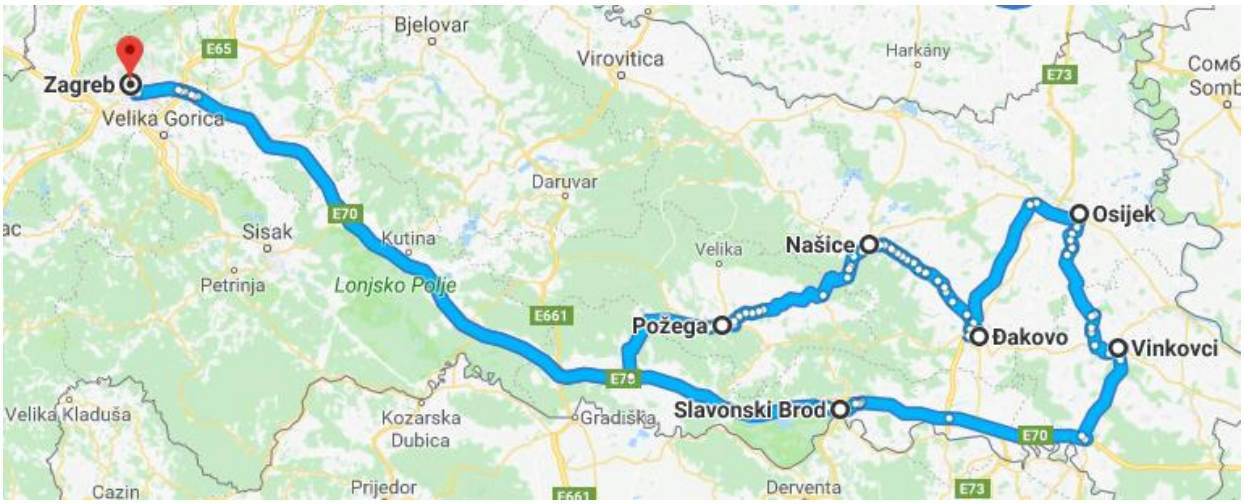
(3,4) => 0 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 0

(1,3) => 0 ↔ 1 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 0

(5,6) => 0 ↔ 1 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 5

(1,2) => 0 ↔ 2 ↔ 1 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 5 ↔ 0 = 617 km.

Grafički prikaz rješenja *Clark-Wright-ovog algoritma* prikazano je na slici 32.



Slika 32. Ruta HR-43344 kao rješenje CW-ovog algoritma

Metoda s indikatorom T

Maksimalna ušteda u polu-matrici početna je poveznica dva čvora u ruti. Uštede koje se nalaze u polu-matrici dobivene su korištenjem formule(4). Rješenje najkraćeg puta dobiveno je na jednak način kao i u prethodnim primjerima i nalazi se u nastavku:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
x_1	350	431	452	361	418	
x_2	344	314	322	312		
x_3	482	380	475			
x_4	379	513				
x_5	379					

Završni oblik polu-matrice prikazan je u nastavku kao i koraci izračuna najkraćeg puta prema metodi s indikatorom T, dobiveno ranijim izračunom ušteda pomoću formule (4).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	**(0)**	**(1)**	**(0)**	**(0)**	**(1)**	**(0)**
x_1	(1) 350	(1) 431	452	361	418	
x_2	344	314	322	312		
x_3	(1) 482	380	475			
x_4	379	(1) 513				
x_5	(1) 379					

$4 \rightarrow 6$

$3 \rightarrow 4 \Rightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6$

$1 \rightarrow 3 \Rightarrow 1 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6$

$5 \rightarrow 6 \Rightarrow 1 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \rightarrow 6 \leftrightarrow 5$

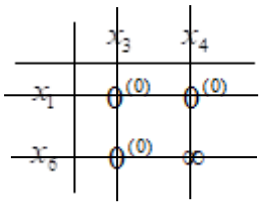
$1 \rightarrow 2 \Rightarrow 2 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \rightarrow 6 \leftrightarrow 5$

$0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \rightarrow 6 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0 = 617$ km.

Metoda grananja i ograničavanja

Kao u jednom od ranijih primjera, odabir posljednje dvije relacije u slučaju kad vrijednost kazni iznosi nula, odvija se na način da se prvenstveno eliminira relacija koja nije moguća, u ovom slučaju to je $x_6 \rightarrow x_4$, stoga se u rutu dodaje relacija $x_6 \rightarrow x_3$, pa prema tome posljednja relacija glasi: $x_1 \rightarrow x_4$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	∞	224	174	242	283	191	272
x_1	224	∞	48	35	55	54	78
x_2	174	48	∞	72	143	43	134
x_3	242	35	72	∞	43	53	39
x_4	283	55	143	43	∞	95	42
x_5	191	54	43	53	95	∞	84
x_6	272	78	134	39	42	84	∞



$0 \rightarrow 2$

$5 \rightarrow 0$

$2 \rightarrow 1 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1$

$3 \rightarrow 5 \Rightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0$

$4 \rightarrow 6$

$6 \rightarrow 3 \Rightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \rightarrow 0$

$1 \rightarrow 4 \Rightarrow 1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \rightarrow 0$

$0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \rightarrow 0 = 602$ km.

Metoda najbližeg susjeda

U nastavku se nalazi rješenje *metode najbližeg susjeda*, izvedeno na način kao u prethodnim primjerima, odabirom minimalnih udaljenosti između lokacije:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	∞	224	174	242	283	191	272
x_1	224	∞	48	35	55	54	78
x_2	174	48	∞	72	143	43	134
x_3	242	35	72	∞	43	53	39
x_4	283	55	143	43	∞	95	42
x_5	191	54	43	53	95	∞	84
x_6	272	78	134	39	42	84	∞

$0 \rightarrow 2$

$2 \rightarrow 5 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5$

$5 \rightarrow 3 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3$

$3 \rightarrow 1 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1$

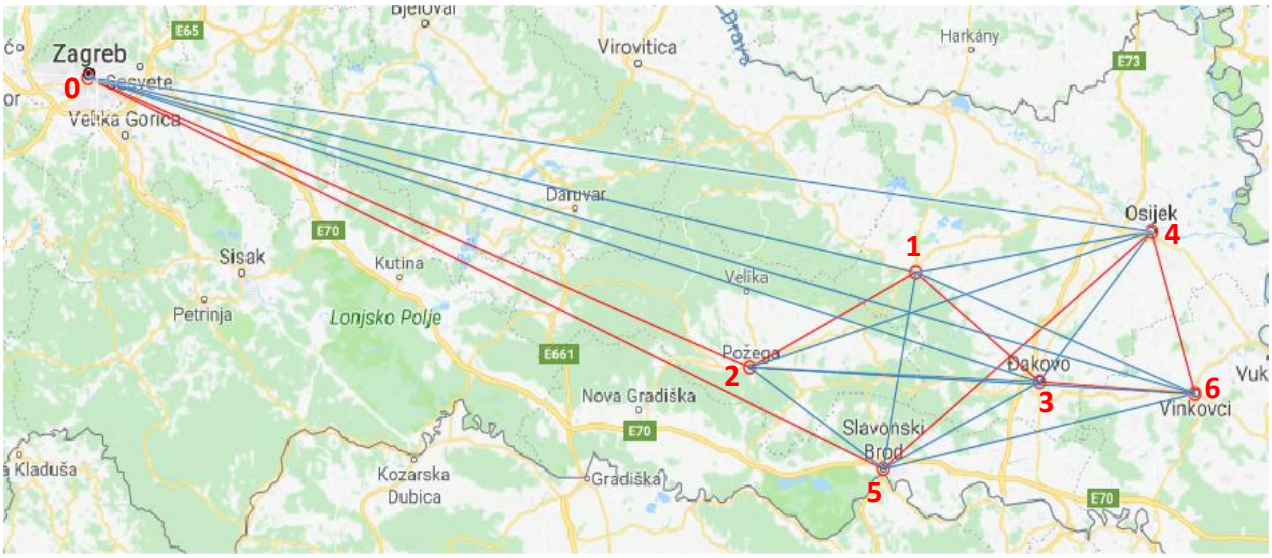
$1 \rightarrow 4 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4$

$4 \rightarrow 6 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6$

$6 \rightarrow 0 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 0 = 674$ km.

Christofides-ov algoritam

Prema postupku izračuna u poglavlju 4.5., dobiveno je rješenje za ovaj kao i za ranije primjere. Na slici 33. crvenim linijama prikazano je rješenje dobiveno izračunom *Christofides-ovog algoritma*, dok plave linije označuju moguće međusobne udaljenosti između lokacija. Rješenje *Christofides-ovog algoritma* glasi: $0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0 = 624$ km.



Slika 33. Ruta HR-43827 kao rješenje Christofides-ovog algoritma

5.2.2. Ruta HR-43827

U tablici 17. prikazani su opći podaci za rutu HR-43827. Ruta započinje i završava u skladišnom centru u Zagrebu, a potrebno je u jednom danu opskrbiti sve lokacije kako je navedeno u tablici.

Tablica 17. Podaci o ruti HR-43827

Redni broj	Vrijeme dostave	Skladišni centar	Odredište	Količina pakiranja	Bruto masa (kg)	Šifra rute
1.	15.3.2017 0:00	Zagreb	Pakrac	1	145	HR-43827
2.	15.3.2017 0:00	Zagreb	Stari Mikanovci	1	486	HR-43827
3.	15.3.2017 0:00	Zagreb	Gundinci	1	57	HR-43827
4.	15.3.2017 0:00	Zagreb	Dalj	1	74	HR-43827
5.	15.3.2017 0:00	Zagreb	Osijek	1	486	HR-43827
6.	15.3.2017 0:00	Zagreb	Podravska Slatina	1	315	HR-43827
7.	15.3.2017 0:00	Zagreb	Čepin	1	62	HR-43827
8.	15.3.2017 0:00	Zagreb	Našice	1	289	HR-43827
9.	15.3.2017 0:00	Zagreb	Vinkovci	3	2332	HR-43827

U nastavku se nalazi matrični prikaz međusobnih udaljenosti između lokacija iz tablice 17.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_0	∞	307	128	248	267	233	283	178	224	272
x_1	307	∞	196	53	38	69	25	119	78	33
x_2	128	196	∞	151	136	139	189	72	96	173
x_3	248	53	151	∞	34	31	38	99	53	23
x_4	267	38	136	34	∞	62	11	88	42	41
x_5	233	69	139	31	62	∞	75	107	62	37
x_6	283	25	189	38	11	75	∞	95	54	42
x_7	178	119	72	99	88	107	95	∞	46	124
x_8	224	78	96	53	42	62	54	46	∞	84
x_9	272	33	173	23	41	37	42	124	84	∞

Tablica 18. prikazuje rangirane ušteda prema veličini koje se koriste pri izračunu najkraćeg puta *Clark-Wright-ovim algoritmom* i *metodom s indikatorom T*. Uštede za obje metode izračunate su pomoću formule (4) postupkom kako je ranije objašnjeno.

Tablica 18. Uštede za rutu HR-43827 rangirane prema veličini

Grana (*i,j*)	Ušteda *s*(*i,j*)	Grana (*i,j*)	Ušteda *s*(*i,j*)	Grana (*i,j*)	Ušteda *s*(*i,j*)
(1,6)	565	**(1,8)**	453	**(7,8)**	356
(1,9)	546	**(6,8)**	453	**(3,7)**	327
(4,6)	539	**(3,5)**	450	**(7,9)**	326
(1,4)	536	**(4,8)**	449	**(5,7)**	304
(6,9)	513	**(5,6)**	441	**(2,4)**	259
(1,3)	502	**(4,5)**	438	**(2,8)**	256
(4,9)	498	**(3,8)**	419	**(1,2)**	239
(3,9)	497	**(8,9)**	412	**(2,7)**	234
(3,6)	493	**(5,8)**	395	**(2,9)**	227
(3,4)	481	**(1,7)**	366	**(2,3)**	225
(1,5)	471	**(6,7)**	366	**(2,5)**	222
(5,9)	468	**(4,7)**	357	**(2,6)**	222

Clark-Wright-ov algoritam

Iz tablice ušteda 18, projektira se ruta prema koracima kako je prikazano u nastavku:

(1,6) => 0 ↔ 1 ↔ 6 ↔ 0

(1,9) => 0 ↔ 9 ↔ 1 ↔ 6 ↔ 0

(4,6) => 0 ↔ 9 ↔ 1 ↔ 6 ↔ 4 ↔ 0

(3,9) => 0 ↔ 3 ↔ 9 ↔ 1 ↔ 6 ↔ 4 ↔ 0

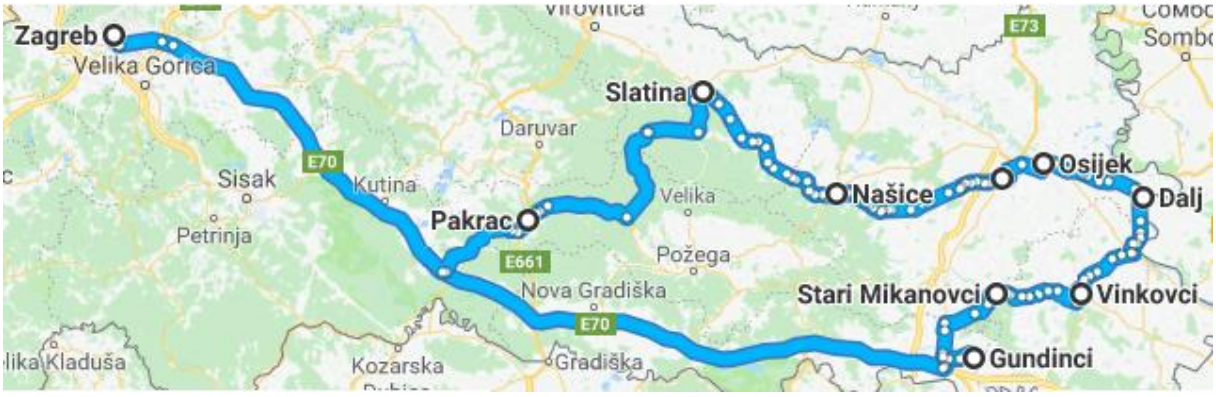
(3,5) => 0 ↔ 5 ↔ 3 ↔ 9 ↔ 1 ↔ 6 ↔ 4 ↔ 0

(4,8) => 0 ↔ 5 ↔ 3 ↔ 9 ↔ 1 ↔ 6 ↔ 4 ↔ 8 ↔ 0

(7,8) => 0 ↔ 5 ↔ 3 ↔ 9 ↔ 1 ↔ 6 ↔ 4 ↔ 8 ↔ 7 ↔ 0

(2,7) => 0 ↔ 5 ↔ 3 ↔ 9 ↔ 1 ↔ 6 ↔ 4 ↔ 8 ↔ 7 ↔ 2 ↔ 0 = 644 km.

Kompletirana ruta prikazana je u grafičkom obliku na slici 34. kao rješenje *Clark-Wright-ovog algoritma*.



Slika 34. Ruta HR-43827 kao rješenje CW-ovog algoritma

Metoda s indikatorom T

Početni korak kod *metode s indikatorom T* izrada je polu-matrice ušteda dobivenih pomoću formule (4) iz međusobnih udaljenosti lokacija iz tablice 18.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_0	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
	x_1	239	502	536	471	565	366	453	546
		x_2	225	259	222	222	234	256	227
			x_3	481	450	493	327	419	497
				x_4	438	539	357	449	498
					x_5	441	304	395	468
						x_6	366	453	513
							x_7	356	326
								x_8	412

Rješenje *metode s indikatorom T* kao najkraći put, prikazano je u nastavku prema izračunu pojedinih relacija te izračun po koracima.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_0	**(0)**	**(1)**	**(0)**	**(0)**	**(1)**	**(0)**	**(0)**	**(0)**	**(0)**
	x_1	239	502	536	471	(1) 565	366	453	(1) 546
		x_2	225	259	222	222	(1) 234	256	227
			x_3	481	(1) 450	493	327	419	(1) 497
				x_4	438	(1) 539	357	(1) 449	498
					x_5	441	304	395	468
						x_6	366	453	513
							x_7	(1) 356	326
								x_8	412

$1 \rightarrow 6$

$1 \rightarrow 9 \Rightarrow 9 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6$

$4 \rightarrow 6 \Rightarrow 9 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4$

$3 \rightarrow 9 \Rightarrow 3 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4$

$3 \rightarrow 5 \Rightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4$

$4 \rightarrow 8 \Rightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 8$

$7 \rightarrow 8 \Rightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 7$

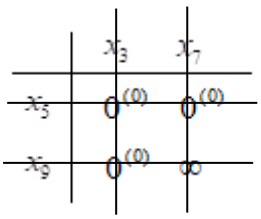
$2 \rightarrow 7 \Rightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 2$

$0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0 = 644$ km.

Metoda grananja i ograničavanja

Izračunom kazni za ne korištenje predložene veze među gradovima dobiva se rješenje metode grananja i ograničavanja. U nastavku su kao i u prethodnim primjerima prikazana početna matrica udaljenosti te završna matrica s posljednje dvije relacije uz prikazane relacije prema redoslijedu izračuna.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_0	∞	307	128	248	267	233	283	178	224	272
x_1	307	∞	196	53	38	69	25	119	78	33
x_2	128	196	∞	151	136	139	189	72	96	173
x_3	248	53	151	∞	34	31	38	99	53	23
x_4	267	38	136	34	∞	62	11	88	42	41
x_5	233	69	139	31	62	∞	75	107	62	37
x_6	283	25	189	38	11	75	∞	95	54	42
x_7	178	119	72	99	88	107	95	∞	46	124
x_8	224	78	96	53	42	62	54	46	∞	84
x_9	272	33	173	23	41	37	42	124	84	∞



$0 \rightarrow 2$

$7 \rightarrow 0$

$2 \rightarrow 8 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 8$

$8 \rightarrow 4 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 4$

$4 \rightarrow 6 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6$

$6 \rightarrow 1 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 1$

$1 \rightarrow 9 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 9$

$3 \rightarrow 5$

$9 \rightarrow 3 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5$

$5 \rightarrow 7 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 0 = 674$ km.

Metoda najbližeg susjeda

Rješenje *metode najbližeg susjeda* je dobiveno na način kao i u prethodnim primjerima, u nastavku se nalazi ispunjena matrica udaljenosti uz prikaz pojedinačnih relacija te prikaz kompletne rute.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_0	∞	307	128	248	267	233	283	178	224	272
x_1	307	∞	196	53	38	69	25	119	78	33
x_2	128	196	∞	151	136	139	189	72	96	173
x_3	248	53	151	∞	34	31	38	99	53	23
x_4	267	38	136	34	∞	62	11	88	42	41
x_5	233	69	139	31	62	∞	75	107	62	37
x_6	283	25	189	38	11	75	∞	95	54	42
x_7	178	119	72	99	88	107	95	∞	46	124
x_8	224	78	96	53	42	62	54	46	∞	84
x_9	272	33	173	23	41	37	42	124	84	∞

$0 \rightarrow 2 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2$

$2 \rightarrow 7 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 7$

$7 \rightarrow 8 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 8$

$8 \rightarrow 4 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 4$

$4 \rightarrow 6 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6$

$6 \rightarrow 1 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 1$

$1 \rightarrow 9 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 9$

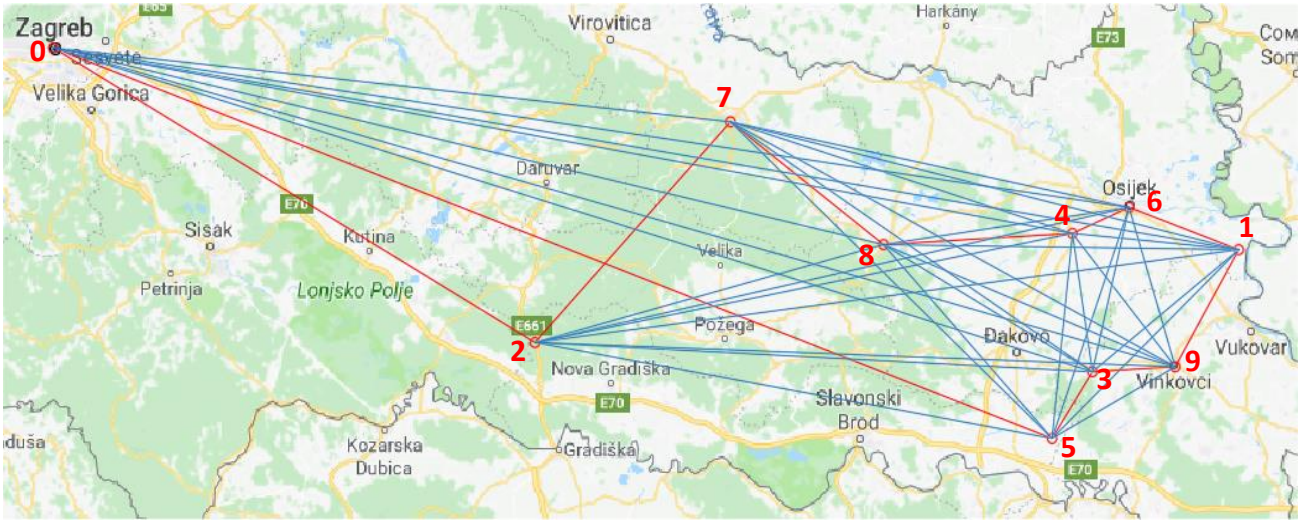
$9 \rightarrow 3 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 3$

$3 \rightarrow 5 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5$

$5 \rightarrow 0 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0 = 644$ km.

Christofides-ov algoritam

Rješenje *Christofides-ovog algoritma* prikazano je na slici 35. Rješenje je dobiveno prema postupku objašnjenom u poglavlju 4.5., kao i u prethodnim primjerima izračuna puta *Christofides-ovim algoritmom*. Redoslijed obilaska lokacija, odnosno rješenje glasi: $0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0 = 644$ km.



Slika 35. Ruta HR-43827 kao rješenje Christofides-ovog algoritma

5.2.3. Ruta HR-43761

Tablica 18. prikazuje opće podatke o ruti za rutu HR-43761. U ruti se nalaze dva dostavna mjesta u Podravskoj Slatini, obzirom da nije moguće navesti točne adrese, mjesta opskrbe voditi će se brojevima (Podravska Slatina 1 i Podravska Slatina 2).

Tablica 19. Podaci za rutu HR-43761

Redni broj	Vrijeme dostave	Skladišni centar	Odredište	Količina pakiranja	Bruto masa (kg)	Šifra rute
1.	14.3.2017 0:00	Zagreb	Zdenci	1	370	HR-43761
2.	14.3.2017 0:00	Zagreb	Koška	10	100	HR-43761
3.	14.3.2017 0:00	Zagreb	Bolman	1	531	HR-43761
4.	14.3.2017 0:00	Zagreb	Kneževi Vinogradi	1	235	HR-43761
5.	14.3.2017 0:00	Zagreb	Podravska Slatina 1	2	1038	HR-43761
6.	14.3.2017 0:00	Zagreb	Ernestinovo/Sodolovci	1	509	HR-43761
7.	14.3.2017 0:00	Zagreb	Virovitica	1	9	HR-43761
8.	14.3.2017 0:00	Zagreb	Požega	9	7007	HR-43761
9.	14.3.2017 0:00	Zagreb	Gradište	1	81	HR-43761
10.	14.3.2017 0:00	Zagreb	Podravska Slatina 2	1	89	HR-43761
11.	14.3.2017 0:00	Zagreb	Gundinci	1	511	HR-43761

Matrični prikaz međusobnih udaljenosti između svih jedanaest lokacija i polazne točke, skladišnog centra u Zagrebu nalazi se u nastavku. Svrha matričnog prikaza udaljenosti je osnova za izračun najkraćeg puta prema navedenim matematičkim metodama.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
x_0	∞	210	272	261	281	178	267	145	174	255	233	184
x_1	210	∞	33	61	81	28	74	59	52	115	81	35
x_2	272	33	∞	34	58	60	46	99	64	91	64	61
x_3	261	61	34	∞	25	80	45	109	103	91	108	78
x_4	281	81	58	25	∞	100	44	130	124	91	101	98
x_5	178	28	60	80	100	∞	100	31	72	142	107	3
x_6	267	74	46	45	44	100	∞	133	100	16	59	101
x_7	145	59	99	109	130	31	133	∞	88	174	140	32
x_8	174	52	64	103	124	72	100	88	∞	108	87	74
x_9	255	115	91	91	91	142	16	174	108	∞	26	141
x_{10}	233	81	64	108	101	107	59	140	87	26	∞	109
x_{11}	184	35	61	78	98	3	101	32	74	141	109	∞

Prema prethodnoj matrici udaljenosti, izračunate su uštede pomoću formule (4) te su rangirane po veličini u tablici 20.

Tablica 20. Uštede za rutu HR-43761 rangirane prema veličini

Grana (*i,j*)	Ušteda *s*(*i,j*)	Grana (*i,j*)	Ušteda *s*(*i,j*)	Grana (*i,j*)	Ušteda *s*(*i,j*)	Grana (*i,j*)	Ušteda *s*(*i,j*)
(3,4)	517	**(4,10)**	413	**(3,5)**	353	**(9,11)**	298
(4,6)	504	**(1,3)**	410	**(1,9)**	350	**(3,7)**	297
(2,3)	499	**(1,4)**	410	**(6,11)**	350	**(7,11)**	297
(2,4)	495	**(2,11)**	395	**(5,6)**	345	**(1,7)**	296
(2,6)	493	**(2,5)**	390	**(6,8)**	341	**(4,7)**	296
(3,6)	483	**(3,10)**	386	**(1,8)**	384	**(5,7)**	292
(6,9)	476	**(2,8)**	382	**(3,8)**	332	**(5,9)**	291
(9,10)	462	**(3,11)**	367	**(4,8)**	331	**(8,11)**	284
(1,2)	449	**(4,11)**	367	**(8,9)**	321	**(5,8)**	280
(4,8)	331	**(1,10)**	362	**(8,10)**	320	**(6,7)**	279
(2,10)	441	**(1,5)**	360	**(2,7)**	318	**(7,10)**	238
(6,10)	441	**(4,5)**	359	**(10,11)**	308	**(7,8)**	231
(2,9)	436	**(5,11)**	359	**(5,10)**	304	**(7,9)**	226
(3,9)	425	**(1,11)**	365	**(1,6)**	303		

Clark-Wright-ov algoritam

Izračun najkraćeg puta pomoću *Clark-Wright-ovog algoritma ušteda* dobiva se prema uštedama iz tablice 20., uz zadovoljenje određenih uvjeta i ograničenja. Cilj algoritma je da vozilo krene iz jedne točke, obiđe svaku lokaciju jednom i ponovno se vrati u istu točku te da pri tome prijeđe najkraći mogući put. Koraci izračuna prikazani su nastavku, kao i konačno rješenje najkraćeg puta:

(3,4) => 0 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 0

(4,6) => 0 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 0

(2,3) => 0 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 0

(6,9) => 0 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 9 ↔ 0

(9,10) => 0 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 9 ↔ 10 ↔ 0

(1,2) => 0 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 9 ↔ 10 ↔ 0

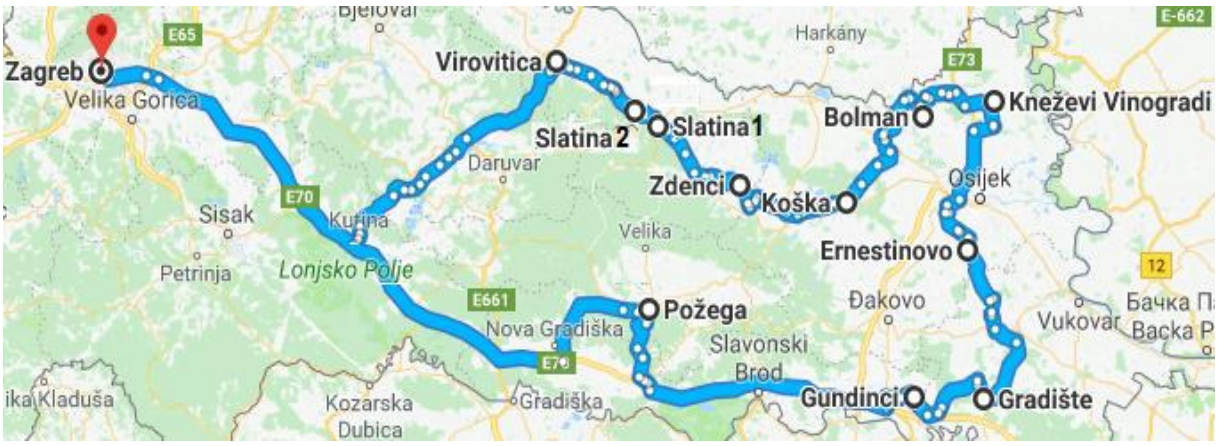
(1,5) => 0 ↔ 5 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 9 ↔ 10 ↔ 0

(5,11) => 0 ↔11 ↔ 5 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 9 ↔ 10 ↔ 0

(8,10) => 0 ↔11 ↔ 5 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 9 ↔ 10 ↔ 8 ↔ 0

(7,11) => 0 ↔ 7 ↔11 ↔ 5 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 9 ↔ 10 ↔ 8 ↔ 0 = 677 km.

Najkraći put dobiven prema algoritmu *Clark-Wright-a* prikazan je na slici 36.



Slika 36. Ruta HR-43761 kao rješenje CW-ovog algoritma

Metoda s indikatorom T

U nastavku je prikazana polu-matrica ušteda za rutu HR-43761. Uštede su izračunate pomoću formule (4). Prikazan je osnovni izgled polu-matrice, odnosno polazna matrica ušteda koje su nastale iz početne matrice međusobne udaljenosti. Jedna ušteda prikazuje jednu relaciju između dva čvora, a u prvom retku nalazi se indikator vrijednosti 2, što u prijevodu znači obostranu putovanje, do lokacije te povratak.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
x_0	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
	x_1	449	410	410	360	303	296	384	350	362	365
		x_2	499	495	390	493	318	382	436	441	395
			x_3	517	353	483	297	332	425	386	367
				x_4	359	504	296	331	445	413	367
					x_5	345	292	280	291	304	359
						x_6	279	341	476	441	350
							x_7	231	226	238	297
								x_8	321	320	284
									x_9	462	298
										x_{10}	308

Rješenje *metode s indikatorom T* za rutu HR – 43761, prikazano je u matričnom obliku i pojedinačnim relacijama prema redoslijedu izračuna. Projektiranje započinje odabirom najveće uštede u matrici. Odabrana ušteda označuje prvu relaciju u ruti, u ovom slučaju to je ušteda iznosa 517 km, a nalazi se između čvora x_3 i x_4. Indikator te se u oba čvora umanjuje za jedan. Stoga, početna relacija je usmjerena od čvora x_3 prema čvoru x_4. Nakon toga, odabire se sljedeća po veličini ušteda uz uvjet da je indikator T>0.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
x_0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
	x_1	(1) 449	410	410	(1) 360	303	296	384	350	362	365
		x_2	(1) 499	495	390	493	318	382	436	441	395
			x_3	(1) 517	353	483	297	332	425	386	367
				x_4	359	(1) 504	296	331	445	413	367
					x_5	345	292	280	291	304	(1) 359
						x_6	279	341	(1) 476	441	350
							x_7	231	226	238	(1) 297
								x_8	321	(1) 320	284
									x_9	(1) 462	298
										x_{10}	308

$3 \rightarrow 4$

$4 \rightarrow 6 \Rightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6$

$2 \rightarrow 3 \Rightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6$

$6 \rightarrow 9 \Rightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 9$

$9 \rightarrow 10 \Rightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 10$

$1 \rightarrow 2 \Rightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 10$

$1 \rightarrow 5 \Rightarrow 5 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 10$

$5 \rightarrow 11 \Rightarrow 11 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 10$

$8 \rightarrow 10 \Rightarrow 11 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 10 \leftrightarrow 8$

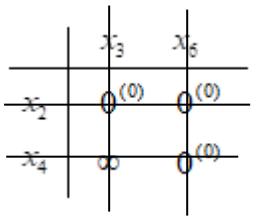
$7 \rightarrow 11 \Rightarrow 7 \leftrightarrow 11 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 10 \leftrightarrow 8$

$0 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 11 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 10 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 0 = 677$ km.

Metoda grananja i ograničavanja

Kao i u prethodnim primjerima, rješenje za najkraći put prema m*etodi grananja i ograničavanja* dobiveno je prema postupku objašnjenom u poglavlju 4.3.. U nastavku se nalaze početna i završna matrica rješenja te redoslijed dobivanja relacija pomoću izračuna kazni.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
x_0	∞	210	272	261	281	178	267	145	174	255	233	184
x_1	210	∞	33	61	81	28	74	59	52	115	81	35
x_2	272	33	∞	34	58	60	46	99	64	91	64	61
x_3	261	61	34	∞	25	80	45	109	103	91	108	78
x_4	281	81	58	25	∞	100	44	130	124	91	101	98
x_5	178	28	60	80	100	∞	100	31	72	142	107	3
x_6	267	74	46	45	44	100	∞	133	100	16	59	101
x_7	145	59	99	109	130	31	133	∞	88	174	140	32
x_8	174	52	64	103	124	72	100	88	∞	108	87	74
x_9	255	115	91	91	91	142	16	174	108	∞	26	141
x_{10}	233	81	64	108	101	107	59	140	87	26	∞	109
x_{11}	184	35	61	78	98	3	101	32	74	141	109	∞



0 → 7

8 → 0

11 → 5

7 → 11 => 0 ↔ 7 ↔ 11 ↔ 5

5 → 1 => 0 ↔ 7 ↔ 11 ↔ 5 ↔ 1

1 → 2 => 0 ↔ 7 ↔ 11 ↔ 5 ↔ 1 ↔ 2

9 → 10

6 → 9 => 6 ↔ 9 ↔ 10

$10 \rightarrow 8 \Rightarrow 6 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 10 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 0$

$3 \rightarrow 4$

$4 \rightarrow 6 \Rightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 10 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 0$

$2 \rightarrow 3 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 11 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 10 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 0 = 677$ km.

Metoda najbližeg susjeda

Ruta započinje iz čvora x_0 te se povezuje sa čvorom x_7, zatim čvor x_7 s vrhom x_5 prema pravilu najkraće, odnosno minimalne udaljenosti. Na jednak način dobije se kompletna ruta, kao i u prethodnim primjerima.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
x_0	∞	210	272	261	281	178	267	145	174	255	233	184
x_1	210	∞	33	61	81	28	74	59	52	115	81	35
x_2	272	33	∞	34	58	60	46	99	64	91	64	61
x_3	261	61	34	∞	25	80	45	109	103	91	108	78
x_4	281	81	58	25	∞	100	44	130	124	91	101	98
x_5	178	28	60	80	100	∞	100	31	72	142	107	3
x_6	267	74	46	45	44	100	∞	133	100	16	59	101
x_7	145	59	99	109	130	31	133	∞	88	174	140	32
x_8	174	52	64	103	124	72	100	88	∞	108	87	74
x_9	255	115	91	91	91	142	16	174	108	∞	26	141
x_{10}	233	81	64	108	101	107	59	140	87	26	∞	109
x_{11}	184	35	61	78	98	3	101	32	74	141	109	∞

$0 \rightarrow 7$

$7 \rightarrow 5 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 5$

$5 \rightarrow 11 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 11$

$11 \rightarrow 1 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 11 \leftrightarrow 1$

$1 \rightarrow 2 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 11 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2$

$2 \rightarrow 3 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 11 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3$

$3 \rightarrow 4 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 11 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4$

4 → 6 => 0 ↔ 7 ↔ 5 ↔ 11 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 6

6 → 9 => 0 ↔ 7 ↔ 5 ↔ 11 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 9

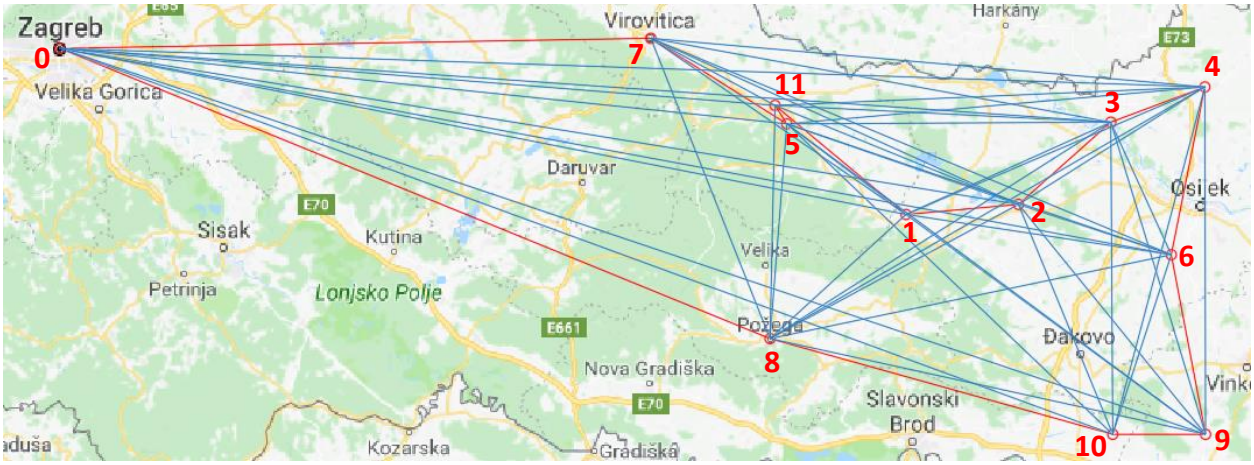
9 → 10 => 0 ↔ 7 ↔ 5 ↔ 11 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 9 ↔ 10

10 → 8 => 0 ↔ 7 ↔ 5 ↔ 11 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 9 ↔ 10 ↔ 8

8 → 0 => 0 ↔ 7 ↔ 5 ↔ 11 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 9 ↔ 10 ↔ 8 ↔ 0 = 683 km.

Christofides-ov algoritam

Rješenje *Christofides-ovog algoritma* prikazano je crvenim linijama, a nalazi se na slici 37. Rješenje je dobiveno jednakim načinom kao i ranije navedenim primjerima. Ruta glasi: 0 ↔ 7 ↔ 5 ↔ 11 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 9 ↔ 10 ↔ 8 ↔ 0 = 683 km.



Slika 37. Ruta HR-43761 kao rješenje Christofides-ovog algoritma

5.2.4. Ruta HR-43365

Ruta HR-43365 sadrži 11 lokacija koje je potrebno opskrbit, međutim vrijeme dostave nije jednako za sve lokacije, stoga će se ruta HR-43365 podijeliti na dva dijela, jedna ruta biti će za rok dostave 06.03.2017., dok će se u drugoj ruti opskrbljivati lokacije kojima je rok dostave 07.03.2017. U tablici 21. prikazana je ruta u kojoj se nalaze sve lokacije i podaci prije podjele. Lokacije u zajedničkoj ruti nije moguće opskrbiti u jednom danu, stoga je ruta podijeljena na dva dijela.

Tablica 21. Podaci za Rutu HR-43365

Vrijeme dostave	Skladišni centar	Odredište	Količina pakiranja	Bruto masa (kg)	Šifra rute
6.3.2017 0:00	Zagreb	Garešnica	1	244	HR-43365
6.3.2017 0:00	Zagreb	Virovitica	1	355	HR-43365
7.3.2017 0:00	Zagreb	Osijek	2	1473	HR-43365
6.3.2017 0:00	Zagreb	Dežanovac	1	216	HR-43365
6.3.2017 0:00	Zagreb	Grubišno Polje	1	190	HR-43365
7.3.2017 0:00	Zagreb	Babina Greda	1	482	HR-43365
6.3.2017 0:00	Zagreb	Veliki Zdenci	1	77	HR-43365
6.3.2017 0:00	Zagreb	Dalj	1	121	HR-43365
6.3.2017 0:00	Zagreb	Pakrac	1	478	HR-43365
7.3.2017 0:00	Zagreb	Pleternica	1	366	HR-43365
6.3.2017 0:00	Zagreb	Drenje	1	216	HR-43365
7.3.2017 0:00	Zagreb	Dežanovac	1	173	HR-43365

Tablica 22. prikazuje podatke o prvoj ruti HR-43365, lokacije kojima je rok dostave 06.03.

Tablica 22. Podaci o ruti HR-43365 za rok dostave 06.03.

Redni broj	Vrijeme dostave	Skladišni centar	Odredište	Količina pakiranja	Bruto masa (kg)	Šifra rute
1.	6.3.2017 0:00	Zagreb	Garešnica	1	244	HR-43365
2.	6.3.2017 0:00	Zagreb	Virovitica	1	355	HR-43365
3.	6.3.2017 0:00	Zagreb	Dežanovac	1	216	HR-43365
4.	6.3.2017 0:00	Zagreb	Grubišno Polje	1	190	HR-43365
5.	6.3.2017 0:00	Zagreb	Veliki Zdenci	1	77	HR-43365
6.	6.3.2017 0:00	Zagreb	Dalj	1	121	HR-43365
7.	6.3.2017 0:00	Zagreb	Pakrac	1	478	HR-43365
8.	6.3.2017 0:00	Zagreb	Drenje	1	216	HR-43365

Matrični prikaz međusobnih udaljenosti lokacija kojima je rok dostave 06.03., a nalaze se u tablici 22.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_0	∞	101	145	116	123	112	300	135	249
x_1	101	∞	51	17	30	17	198	35	151
x_2	145	51	∞	50	27	34	149	69	102
x_3	116	17	50	∞	29	20	187	23	135
x_4	123	30	27	29	∞	8	176	43	129
x_5	112	17	34	20	8	∞	181	39	134
x_6	300	198	149	187	176	181	∞	193	78
x_7	135	35	69	26	43	39	193	∞	119
x_8	249	151	102	165	129	134	78	119	∞

Uštede izračunate prema formuli (4) i rangirane od najveće prema najmanjoj nalaze se u tablici 23. Tablica prikazuje uštede za prvu dio rute koja je podijeljena na dva dijela, prvi dio se odnosi na one lokacije kojima je rok dostave 06.03.

Tablica 23. Uštede za rutu HR-43365 rangirane prema veličini (rok dostave 06.03)

Grana (*i,j*)	Ušteda *s(i,j)*	Grana (*i,j*)	Ušteda *s(i,j)*	Grana (*i,j*)	Ušteda *s(i,j)*
(6,8)	471	**(3,6)**	229	**(5,7)**	208
(2,6)	296	**(3,7)**	228	**(1,6)**	203
(2,8)	292	**(4,5)**	227	**(1,7)**	201
(7,8)	265	**(5,8)**	227	**(1,3)**	200
(4,6)	247	**(2,5)**	223	**(1,8)**	199
(4,8)	243	**(4,7)**	215	**(1,5)**	196
(6,7)	242	**(2,3)**	211	**(1,2)**	195
(2,4)	241	**(2,7)**	211	**(1,4)**	194
(5,6)	231	**(3,4)**	210		
(3,8)	230	**(3,5)**	208		

Clark-Wright-ov algoritam

Rješenje *Clark-Wright-ovog algoritma* prikazano je u nastavku ovisno o uštedama iz tablice 23.

(6,8) => 0 ↔ 6 ↔ 8 ↔ 0

(2,6) => 0 ↔ 2 ↔ 6 ↔ 8 ↔ 0

(7,8) => 0 ↔ 2 ↔ 6 ↔ 8 ↔ 7 ↔ 0

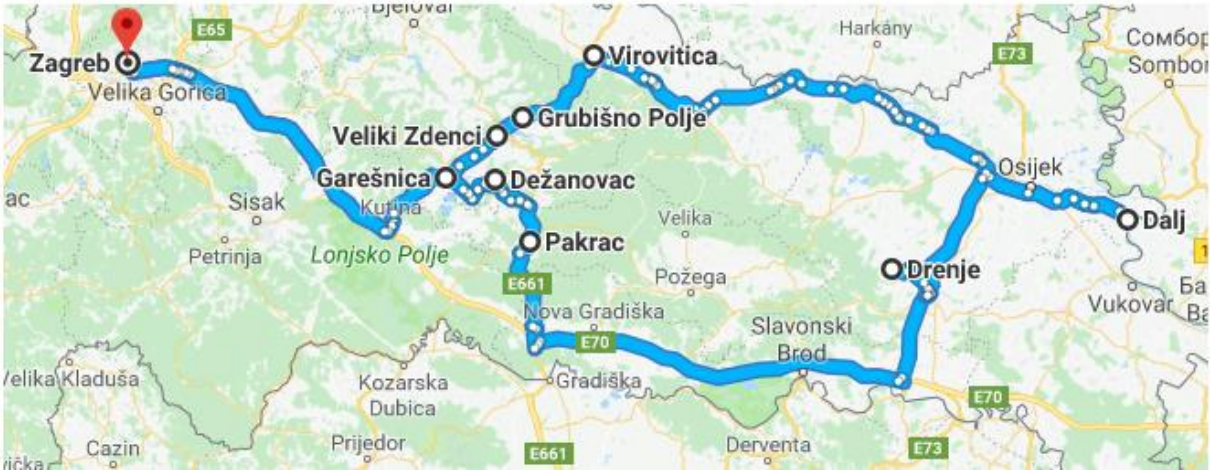
(2,4) => 0 ↔ 4 ↔ 2 ↔ 6 ↔ 8 ↔ 7 ↔ 0

(3,7) => 0 ↔ 4 ↔ 2 ↔ 6 ↔ 8 ↔ 7 ↔ 3 ↔ 0

(4,5) => 0 ↔ 5 ↔ 4 ↔ 2 ↔ 6 ↔ 8 ↔ 7 ↔ 3 ↔ 0

(1,3) => 0 ↔ 5 ↔ 4 ↔ 2 ↔ 6 ↔ 8 ↔ 7 ↔ 3 ↔ 1 ↔ 0 = 634 km.

Slika (38) prikazuje grafičko rješenje *Clark-Wright-ovog algoritma*.



Slika 38. Ruta HR-43365 kao rješenje CW-ovog algoritma (rok dostave 06.03.)

Metoda s indikatorom T

Rješenje je dobiveno na jednak način kao i u prethodnim primjerima, pronalaskom maksimalne uštede između dva čvora zadovoljenjem određenih ograničenja. Kao i u prethodnim primjerima, uštede su dobivene korištenjem formule (4). U nastavku je prikazana početna polu-matrica ušteda te konačna polu-matrica s rješenjima.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_0	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
x_1	195	200	194	196	203	201	199	
x_2	211	241	223	296	211	292		
x_3	210	208	229	228	230			
x_4	227	247	215	243				
x_5	231	208	227					
x_6	242	471						
x_7	265							

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
x_1	195	(1) 200	194	196	203	201	199	
x_2	211	(1) 241	223	(1) 296	211	292		
x_3	210	208	229	(1) 228	230			
x_4	(1) 227	247	215	243				
x_5	231	208	227					
x_6	242	(1) 471						
x_7	(1) 265							

$6 \rightarrow 8$

$2 \rightarrow 6 \Rightarrow 2 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 8$

$7 \rightarrow 8 \Rightarrow 2 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 7$

$2 \rightarrow 4 \Rightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 7$

$3 \rightarrow 7 \Rightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 3$

$4 \rightarrow 5 \Rightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 3$

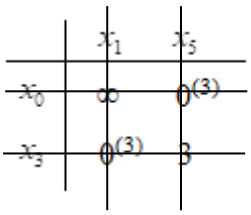
$1 \rightarrow 3 \Rightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1$

$0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 0 = 634$ km.

Metoda grananja i ograničavanja

Poglavlje 4.3. sadrži detaljan opis izračuna najkraćeg puta za *metodu grananja i ograničavanja*. U nastavku je prikazana početna matrica međusobne udaljenosti te završna matrica s posljednje dvije dobivene relacije. Zatim slijedi redoslijed relacija dobivenih izračunom kazni ranije navedenim postupkom.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_0	∞	101	145	116	123	112	300	135	249
x_1	101	∞	51	17	30	17	198	35	151
x_2	145	51	∞	50	27	34	149	69	102
x_3	116	17	50	∞	29	20	187	23	135
x_4	123	30	27	29	∞	8	176	43	129
x_5	112	17	34	20	8	∞	181	39	134
x_6	300	198	149	187	176	181	∞	193	78
x_7	135	35	69	26	43	39	193	∞	119
x_8	249	151	102	165	129	134	78	119	∞



$6 \rightarrow 8$

$2 \rightarrow 6 \Rightarrow 2 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 8$

$5 \rightarrow 4$

$4 \rightarrow 2 \Rightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 8$

$8 \rightarrow 7 \Rightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 7$

$1 \rightarrow 0$

$7 \rightarrow 3 \Rightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 3$

$0 \rightarrow 5 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 3$

$3 \rightarrow 1 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 0 = 634$ km.

Metoda najbližeg susjeda

Rješenje *metode najbližeg susjeda* dobije se dodavanjem relacija u djelomičnu rutu uz zadovoljenje uvjeta minimalne udaljenosti. Na jednak način kao u prethodnim primjerima.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_0	∞	101	145	116	123	112	300	135	249
x_1	101	∞	51	17	30	17	198	35	151
x_2	145	51	∞	50	27	34	149	69	102
x_3	116	17	50	∞	29	20	187	23	135
x_4	123	30	27	29	∞	8	176	43	129
x_5	112	17	34	20	8	∞	181	39	134
x_6	300	198	149	187	176	181	∞	193	78
x_7	135	35	69	26	43	39	193	∞	119
x_8	249	151	102	165	129	134	78	119	∞

$0 \rightarrow 1$

$1 \rightarrow 5 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5$

$5 \rightarrow 4 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4$

$4 \rightarrow 2 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2$

$2 \rightarrow 3 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3$

$3 \rightarrow 7 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 7$

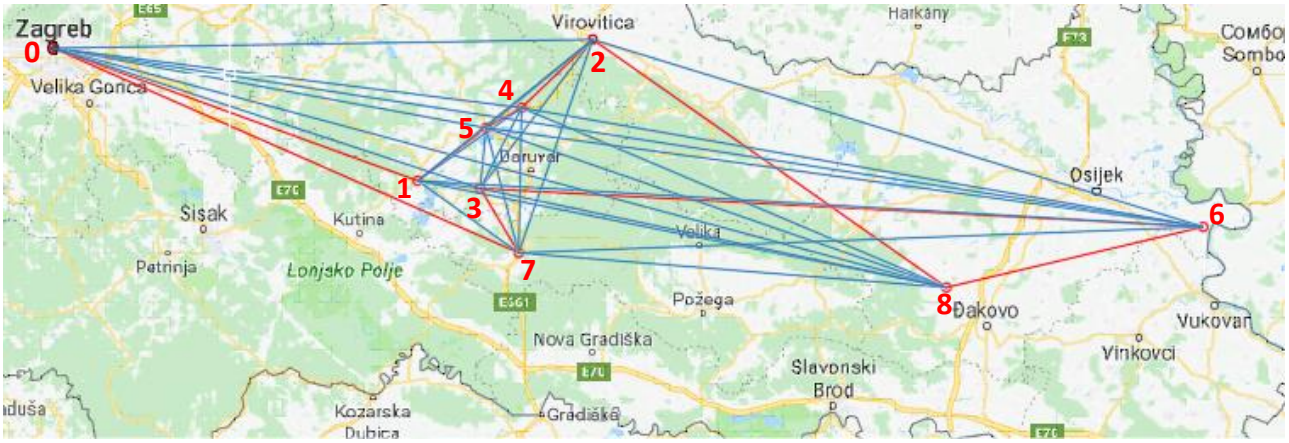
$7 \rightarrow 8 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 8$

8 → 6 => 0 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 4 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 7 ↔ 8 ↔ 6

6 → 0 => 0 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 4 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 7 ↔ 8 ↔ 6 ↔ 0 = 723 km.

Christofides-ov algoritam

Na slici 39. nalazi se rješenje najkraćeg puta prema metodi *Christofides-ovog algoritma*. Plave linije označuju međusobne udaljenosti među vrhovima, dok crvene označuju konačno rješenje, odnosno kompletiranu rutu *Christofides-ovog algoritma* prema postupku opisanom kod izračuna prve rute. Rješenje: 0 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 4 ↔ 2 ↔ 8 ↔ 6 ↔ 3 ↔ 7 ↔ 0 = 678 km.



Slika 39. Ruta HR-43365 kao rješenje Christofides-ovog algoritma (rok dostave 06.03.)

Tablica 24. prikazuje općenite podatke za drugi dio rute HR-43365, novu rutu s lokacijama, kojima je rok dostave 07.03.

Tablica 24. Podaci o ruti HR-43365 za rok dostave 07.03.

Redni broj	Vrijeme dostave	Skladišni centar	Odredište	Količina pakiranja	Bruto masa (kg)	Šifra rute
1.	7.3.2017 0:00	Zagreb	Osijek	2	1473	HR-43365
2.	7.3.2017 0:00	Zagreb	Babina Greda	1	482	HR-43365
3.	7.3.2017 0:00	Zagreb	Pleternica	1	366	HR-43365
4.	7.3.2017 0:00	Zagreb	Dežanovac	1	173	HR-43365

Tablica 24. prikazuje četiri lokacije koje su izdvojene iz rute HR-43365 jer rok dostave za navedene lokacije je 07.03. Međusobna udaljenost tih lokacija prikazana je u matričnom

prikazu udaljenosti u nastavku, koji će se koristiti pri izračunu ušteda. Obzirom da se distribucija odvija na području Slavonije, udaljenost od početne točke (skladišta u Zagrebu) do lokacija u Slavoniji je velika, stoga će i duljina rute biti znatno veća. Potrebno je opskrbiti četiri lokacije s ukupnim iznosom količine tereta pet paleta mase približno 2500 kg, što najčešće nije isplativo za taj broj lokacije, odnosno količinu tereta.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
x_0	∞	283	238	183	116
x_1	283	∞	67	101	161
x_2	238	67	∞	80	168
x_3	183	101	80	∞	84
x_4	116	161	168	84	∞

U nastavku se nalaze rješenja za najkraći put po metodama za drugi dio podijeljene rute. Tablica 25. prikazuje uštede dobivene prema formuli (4) te sortirane od najveće prema najmanjoj radi izračuna *Clark-Wright-ovog algoritma* i *metode s indikatorom T.*

Tablica 25. Uštede za rutu HR-43365 rangirane prema veličini (rok dostave 07.03.)

Grana ***(i,j)***	**Ušteda** ***s(i,j)***	**Grana** ***(i,j)***	**Ušteda** ***s(i,j)***
(1,2)	454	**(1,4)**	238
(1,3)	365	**(3,4)**	215
(2,3)	341	**(2,4)**	186

Clark-Wright-ov algoritam

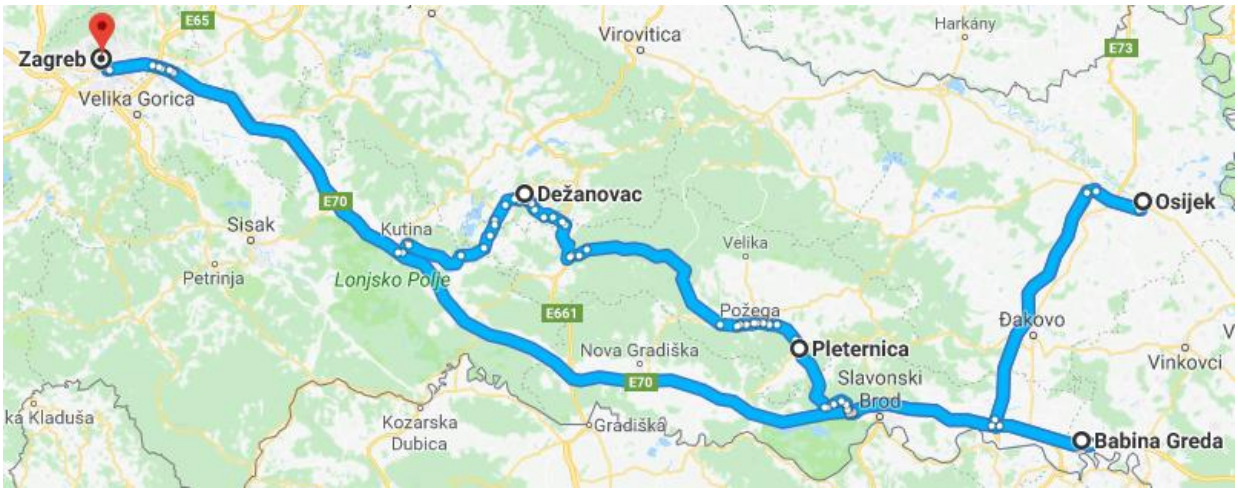
Rješenje po koracima *Clark-Wright-ovog algoritma ušteda* za četiri čvora koja pripadaju drugom dijelu rutu HR-43365:

(1,2) => 0 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 0

(1,3) => 0 ↔ 3 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 0

(3,4) => 0 ↔ 4 ↔ 3 ↔ 1 ↔ 2 ↔ 0 = 606 km.

Prikaz dobivene rute prema *Clark-Wright-ovom algoritmu* nalazi se na slici 40.



Slika 40. Ruta HR-43365 kao rješenje CW-ovog algoritma (rok dostave 07.03)

Metoda s indikatorom T

Na jednak način kao u prijašnjim primjerima, izračunava se najkraći put za *metodu s indikatorom T*. U polu-matrici ušteda, odabire se maksimalna ušteda koja se nalaz između dva vrha. Odabrana ušteda označava početnu relaciju između ta dva vrha. Prema istom principu odabire se sljedeća najveća ušteda uz zadovoljenje uvjeta ograničenja: indikator T mora biti veći od nule i ne smije nastati pod-ruta. Uštede su izračunate pomoću formule (4).

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_0	**2**	**2**	**2**	**2**
	x_1	454	365	238
		x_2	341	186
			x_3	215

Završna polu-matrica s konačnim rješenjem *metode s indikatorom T*, uz prikaz redoslijeda dobivanja pojedinih relacija i nastanak kompletne rute:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_0	**0**	**1**	**0**	**1**
x_1		1 454	1 365	238
		x_2	341	186
			x_3	1 215

$1 \rightarrow 2$

$1 \rightarrow 3 \Rightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2$

$3 \rightarrow 4 \Rightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2$

$0 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0 = 606$ km.

Metoda grananja i ograničavanja

U nastavku je prikazana početna i završna matrica u izračunu *metode grananja i ograničavanja*. Izračunom kazni dobiju se pojedinačne relacije u ruti te spajanjem istih kompletira se ruta, odnosno najkraći put prema pravilima *metode grananja i ograničavanja*.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
x_0	∞	283	238	183	116
x_1	283	∞	67	101	161
x_2	238	67	∞	80	168
x_3	183	101	80	∞	84
x_4	116	161	168	84	∞

	x_0	x_1
x_2	$0^{(0)}$	∞
x_3	$0^{(0)}$	$0^{(0)}$

$0 \rightarrow 4$

$4 \rightarrow 3 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3$

$1 \rightarrow 2$

$2 \rightarrow 0 \Rightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0$

$3 \rightarrow 1 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0 = 606$ km.

Metoda najbližeg susjeda

Prema pravilima izračuna *metode najbližeg susjeda*, najmanja udaljenost nalazi se između čvora x_0 te čvora x_4, što predstavlja početnu relaciju. Jednakim načinom odabire se sljedeća relacija koja se nastavlja od čvora x_4 prema čvoru x_3, itd. U nastavku su prikazane odabrane relacije prema matrici udaljenosti.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
x_0	∞	283	238	183	116
x_1	283	∞	67	101	161
x_2	238	67	∞	80	168
x_3	183	101	80	∞	84
x_4	116	161	168	84	∞

$0 \rightarrow 4$

$4 \rightarrow 3 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3$

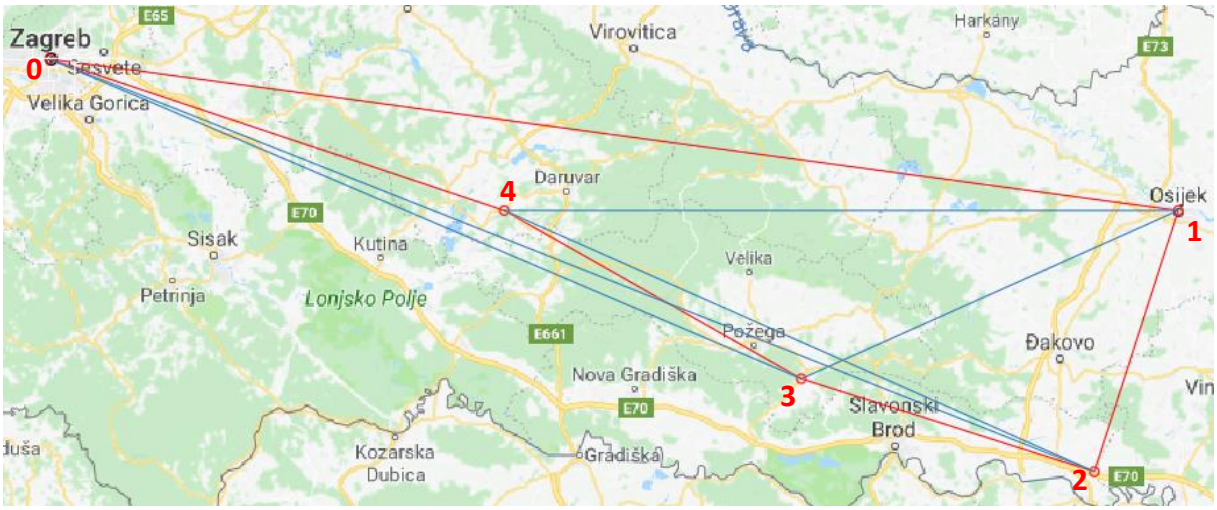
$3 \rightarrow 2 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 2$

$2 \rightarrow 1 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1$

$1 \rightarrow 0 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 0 = 630$ km.

Christofides-ov algoritam

Prema postupku kao u prethodnim primjerima te detaljno objašnjenom prinicpu kod izračuna prve metode, dobiveno je rješenje za najkraći put prema *Christofides-ovom algoritmu,* a rješenje je prikazano na slici 41. Dobivena ruta glasi: $0 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 0 = 630$ km.



Slika 41. Ruta HR-43365 kao rješenje Christofides-ovog algoritma (rok dostave 07.03.)

5.1.5. Ruta HR-43443

Vrijeme dostave, odredište, količina i masa tereta prikazani su u tablici 26., a odnose se na rutu HR-43443. U općini Čepin nalaze se dvije lokacije koje je potrebno opskrbit, u tablici će biti prikazane kao Čepin 1 i Čepin 2.

Tablica 26. Podaci o ruti HR-43443

Redni broj	Vrijeme dostave	Skladišni centar	Odredište	Količina pakiranja	Bruto masa (kg)	Šifra rute
1.	7.3.2017 0:00	Zagreb	Davor	1	113	HR-43443
2.	7.3.2017 0:00	Zagreb	Garešnica	1	307	HR-43443
3.	7.3.2017 0:00	Zagreb	Donji Miholjac	1	122	HR-43443
4.	7.3.2017 0:00	Zagreb	Vinkovci	1	317	HR-43443
5.	7.3.2017 0:00	Zagreb	Podravska Slatina	1	284	HR-43443
6.	7.3.2017 0:00	Zagreb	Ivankovo	1	47	HR-43443
7.	7.3.2017 0:00	Zagreb	Sotin	1	94	HR-43443
8.	7.3.2017 0:00	Zagreb	Pleternica	1	366	HR-43443
9.	7.3.2017 0:00	Zagreb	Đakovo	1	81	HR-43443
10.	7.3.2017 0:00	Zagreb	Čepin 1	1	540	HR-43443
11.	7.3.2017 0:00	Zagreb	Čepin 2	1	149	HR-43443

U nastavku je prikazan matrični prikaz međusobnih udaljenosti za lokacije iz tablice 26.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
x_0	∞	167	259	102	224	272	178	303	183	242	267	266
x_1	167	∞	125	100	116	136	107	169	43	101	124	123
x_2	259	125	∞	191	90	11	109	43	89	29	39	40
x_3	102	100	191	∞	122	205	79	237	96	174	200	199
x_4	224	116	90	122	∞	92	43	97	74	66	55	56
x_5	272	136	11	205	92	∞	129	30	102	42	42	43
x_6	178	107	109	79	43	129	∞	137	65	81	87	86
x_7	303	169	43	237	97	30	137	∞	133	67	57	58
x_8	183	43	89	96	74	102	65	133	∞	60	83	82
x_9	242	101	29	174	66	42	81	67	60	∞	29	34
x_{10}	267	124	39	200	55	42	87	57	83	29	∞	1
x_{11}	266	123	40	199	56	43	86	58	82	34	1	∞

U tablici 27. nalaze se uštede dobivene formulom (4) iz matrice udaljenosti za rutu HR–43443.

Tablica 27. Uštede za rutu HR-43443 rangirane prema veličini

Grana *(i,j)*	Ušteda *s(i,j)*	Grana *(i,j)*	Ušteda *s(i,j)*	Grana *(i,j)*	Ušteda *s(i,j)*	Grana *(i,j)*	Ušteda *s(i,j)*
(5,7)	545	**(5,9)**	472	**(7,8)**	353	**(6,8)**	296
(10,11)	532	**(4,10)**	436	**(2,8)**	353	**(1,4)**	275
(2,5)	520	**(4,11)**	434	**(6,7)**	344	**(1,6)**	238
(2,7)	519	**(4,7)**	430	**(6,9)**	339	**(3,4)**	204
(7,10)	513	**(4,5)**	404	**(4,8)**	333	**(3,6)**	201
(7,11)	511	**(4,9)**	400	**(2,6)**	328	**(3,8)**	189
(5,10)	497	**(2,4)**	393	**(5,6)**	321	**(2,3)**	170
(5,11)	495	**(8,10)**	367	**(1,10)**	310	**(3,9)**	170
(2,10)	487	**(8,11)**	367	**(1,11)**	310	**(1,3)**	169
(2,11)	485	**(8,9)**	365	**(1,9)**	308	**(3,10)**	169
(9,10)	480	**(4,6)**	359	**(1,8)**	307	**(3,11)**	169
(7,9)	478	**(6,10)**	358	**(1,5)**	303	**(3,5)**	169
(2,9)	474	**(6,11)**	358	**(1,2)**	301	**(3,7)**	168
(9,11)	474	**(5,8)**	353	**(1,7)**	301		

Clark-Wright-ov algoritam

(5,7) => 0 ↔ 5 ↔ 7 ↔ 0

(10,11) => 0 ↔ 10 ↔ 11 ↔ 0

(2,5) => 0 ↔ 2 ↔ 5 ↔ 7 ↔ 0

(7,10) => 0 ↔ 2 ↔ 5 ↔ 7 ↔ 10 ↔ 11 ↔ 0

(2,9) => 0 ↔ 9 ↔ 2 ↔ 5 ↔ 7 ↔ 10 ↔ 11 ↔ 0

(4,11) => 0 ↔ 9 ↔ 2 ↔ 5 ↔ 7 ↔ 10 ↔ 11 ↔ 4 ↔ 0

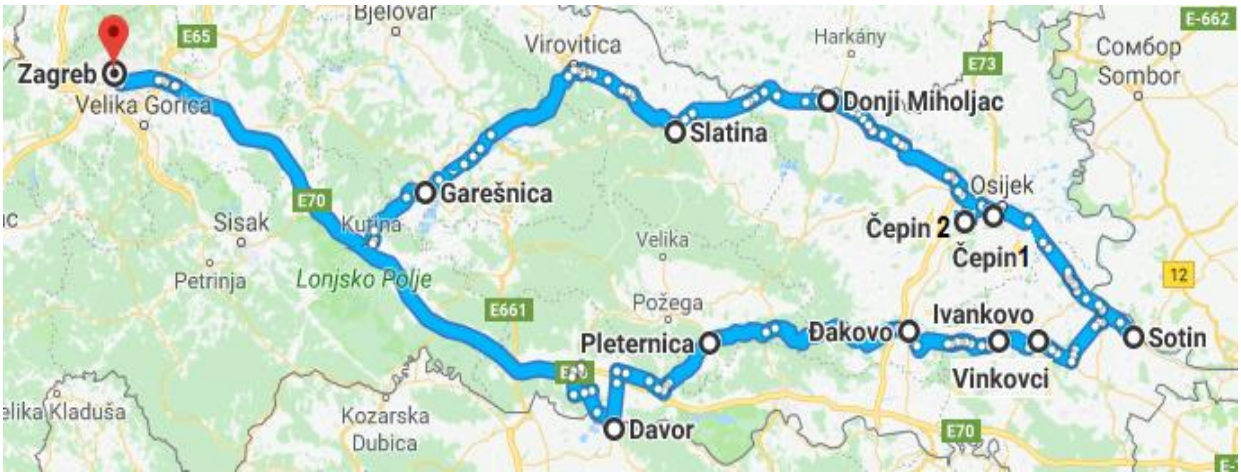
(8,9) => 0 ↔ 8 ↔ 9 ↔ 2 ↔ 5 ↔ 7 ↔ 10 ↔ 11 ↔ 4 ↔ 0

(4,6) => 0 ↔ 8 ↔ 9 ↔ 2 ↔ 5 ↔ 7 ↔ 10 ↔ 11 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 0

(1,8) => 0 ↔ 1 ↔ 8 ↔ 9 ↔ 2 ↔ 5 ↔ 7 ↔ 10 ↔ 11 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 0

(3,6) => 0 ↔ 1 ↔ 8 ↔ 9 ↔ 2 ↔ 5 ↔ 7 ↔ 10 ↔ 11 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 3 ↔ 0 = 678 km.

Grafički prikaz rješenja *Clark-Wright-ovog algoritma* prikazan je na slici 42.



Slika 42. Ruta HR-43443 kao rješenje CW-ovog algoritma

Metoda s indikatorom T

Na jednak način kao u prijašnjim primjerima, dobiveno je rješenje najkraćeg puta prema *metodi s indikatorom T*. U nastavku su prikazane početna polu-matrica ušteda i završna polu-matrica koja ujedno prikazuje i konačno rješenje. Nakon završne polu-matrice ušteda, nalazi se prikaz rješenja prema koracima dobivanja pojedinačnih relacija i konačan izgled rute, odnosno najkraćeg puta za rutu HR–43443. Uštede unutar polu-matrice dobivene su korištenjem formule (4).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
x_0	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
	x_1	301	169	275	303	238	301	307	308	310	310
		x_2	170	393	520	328	519	353	474	487	485
			x_3	204	169	201	168	189	170	169	169
				x_4	404	359	430	333	400	436	434
					x_5	321	545	353	472	497	495
						x_6	344	296	339	358	358
							x_7	353	478	513	511
								x_8	365	367	367
									x_9	480	474
										x_{10}	532

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
x_0	**(1)**	**(0)**	**(1)**	**(0)**	**(0)**	**(0)**	**(0)**	**(0)**	**(0)**	**(0)**	**(0)**
	x_1	301	169	275	303	238	301	(1) 307	308	310	310
		x_2	170	393	(1) 520	328	519	353	(1) 474	487	485
			x_3	204	169	(1) 201	168	189	170	169	169
				x_4	404	(1) 359	430	333	400	436	(1) 434
					x_5	321	(1) 545	353	472	497	495
						x_6	344	296	339	358	358
							x_7	353	478	(1) 513	511
								x_8	(1) 365	367	367
									x_9	480	474
										x_{10}	(1) 532

$5 \rightarrow 7$

$10 \rightarrow 11$

$2 \rightarrow 5 \Rightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 7$

$7 \rightarrow 10 \Rightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 10 \leftrightarrow 11$

$2 \rightarrow 9 \Rightarrow 9 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 10 \leftrightarrow 11$

$4 \rightarrow 11 \Rightarrow 9 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 10 \leftrightarrow 11 \leftrightarrow 4$

$8 \rightarrow 9 \Rightarrow 8 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 10 \leftrightarrow 11 \leftrightarrow 4$

$4 \rightarrow 6 \Rightarrow 8 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 10 \leftrightarrow 11 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6$

$1 \rightarrow 8 \Rightarrow 1 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 10 \leftrightarrow 11 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6$

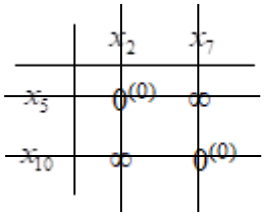
$3 \rightarrow 6 \Rightarrow 1 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 10 \leftrightarrow 11 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 3$

$0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 10 \leftrightarrow 11 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 0 = 678$ km.

Metoda grananja i ograničavanja

Da bi se dobilo rješenje najkraćeg puta prema *metodi grananja i ograničavanja* potrebno je u svakom retku i svakom stupcu imati barem jednu nulu kako bi se mogle izračunati kazne za nekorištenje predložene veze među gradovima. Zatim odabir najveće kazne predstavlja jednu relaciju. Prema istom principu izračuna, dobije se vrijednost ostalih kazni te ujedno i potrebne relacije kako bi se kompletirala ruta najkraćeg puta. Na jednak način kako je opisano u poglavlju 4.3.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
x_0	∞	167	259	102	224	272	178	303	183	242	267	266
x_1	167	∞	125	100	116	136	107	169	43	101	124	123
x_2	259	125	∞	191	90	11	109	43	89	29	39	40
x_3	102	100	191	∞	122	205	79	237	96	174	200	199
x_4	224	116	90	122	∞	92	43	97	74	66	55	56
x_5	272	136	11	205	92	∞	129	30	102	42	42	43
x_6	178	107	109	79	43	129	∞	137	65	81	87	86
x_7	303	169	43	237	97	30	137	∞	133	67	57	58
x_8	183	43	89	96	74	102	65	133	∞	60	83	82
x_9	242	101	29	174	66	42	81	67	60	∞	29	34
x_{10}	267	124	39	200	55	42	87	57	83	29	∞	1
x_{11}	266	123	40	199	56	43	86	58	82	34	1	∞



$0 \rightarrow 3$

$6 \rightarrow 4$

$3 \rightarrow 6 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4$

$8 \rightarrow 1$

$1 \rightarrow 0 \Rightarrow 8 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 0$

$9 \rightarrow 8 \Rightarrow\ 9 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 0$

$11 \rightarrow 10$

$4 \rightarrow 11 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 11 \leftrightarrow 10$

$2 \rightarrow 9 \Rightarrow\ 2 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 0$

$7 \rightarrow 5$

$5 \rightarrow 2 \Rightarrow 7 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 0$

$10 \rightarrow 7 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 11 \leftrightarrow 10 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 0 = 678$ km.

Metoda najbližeg susjeda

Kako i sam naziv metode glasi, potrebno je naći najbližeg susjeda odabranom čvoru, odnosno sljedeći vrh nakon odabranog s minimalnom udaljenosti. U nastavku je prikazano rješenje najkraćeg puta za *metodu najbližeg susjeda*.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
x_0	∞	167	259	102	224	272	178	303	183	242	267	266
x_1	167	∞	125	100	116	136	107	169	43	101	124	123
x_2	259	125	∞	191	90	11	109	43	89	29	39	40
x_3	102	100	191	∞	122	205	79	237	96	174	200	199
x_4	224	116	90	122	∞	92	43	97	74	66	55	56
x_5	272	136	11	205	92	∞	129	30	102	42	42	43
x_6	178	107	109	79	43	129	∞	137	65	81	87	86
x_7	303	169	43	237	97	30	137	∞	133	67	57	58
x_8	183	43	89	96	74	102	65	133	∞	60	83	82
x_9	242	101	29	174	66	42	81	67	60	∞	29	34
x_{10}	267	124	39	200	55	42	87	57	83	29	∞	1
x_{11}	266	123	40	199	56	43	86	58	82	34	1	∞

$0 \rightarrow 1$

$1 \rightarrow 8 \Rightarrow\ 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 8$

$8 \rightarrow 9 \Rightarrow\ 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 9$

$9 \rightarrow 2 \Rightarrow\ 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 2$

$2 \rightarrow 5 \Rightarrow\ 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5$

$5 \rightarrow 7 \Rightarrow\ 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 7$

$7 \rightarrow 10 \Rightarrow\ 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 10$

$10 \rightarrow 11 \Rightarrow\ 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 10 \leftrightarrow 11$

$11 \rightarrow 4 \Rightarrow\ 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 10 \leftrightarrow 11 \leftrightarrow 4$

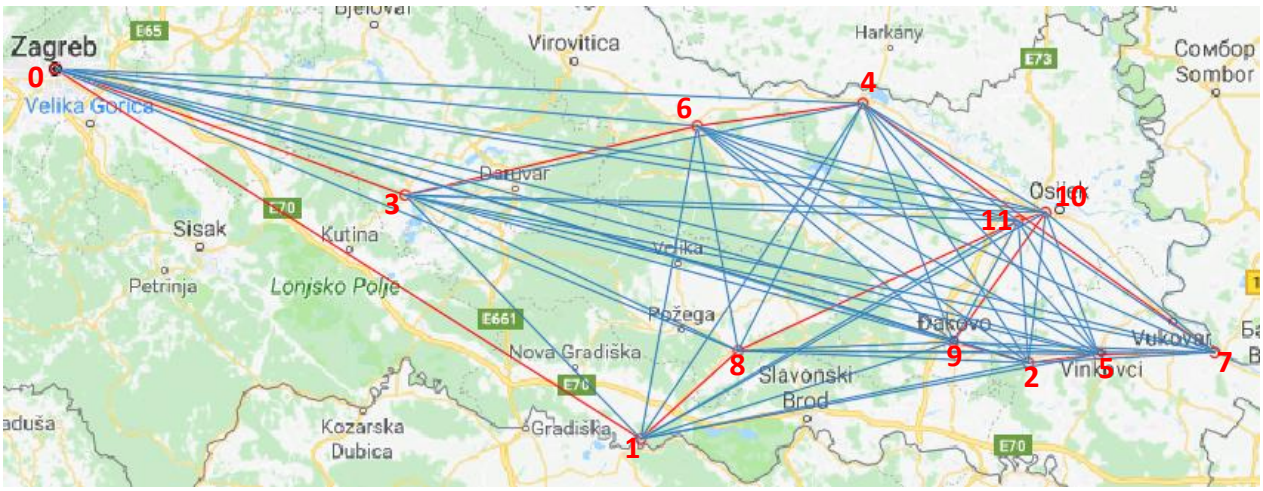
$4 \rightarrow 6 \Rightarrow\ 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 10 \leftrightarrow 11 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6$

$6 \rightarrow 3 \Rightarrow\ 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 10 \leftrightarrow 11 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 3$

$3 \rightarrow 0 \Rightarrow\ 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 9 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 10 \leftrightarrow 11 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 0 = 678$ km.

Christofides-ov algoritam

Grafičko rješenje *Christofides-ovog algoritma* prikazano je na slici 43. Postupak izračuna *Christofides-ovog algoritma* prikazan je u poglavlju 4.5., a njegova primjena detaljno je opisana i prikazana na primjeru rute HR-43627. Dobivena ruta kao rješenje najkraćeg puta glasi: $0 \rightarrow 1 \rightarrow 8 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 9 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 0 = 713$ km.



Slika 43. Ruta HR-43443 kao rješenje Christofides-ovog algoritma

5.2.6. Ruta HR-43960

Opći podaci o ruti HR-43960 nalaze se u tablici 28. Potrebno je dostaviti robu na osam lokacija te se vratiti u Zagreb, odakle ruta i započinje.

Tablica 28. Podaci za rutu HR-43960

Redni broj	Vrijeme dostave	Skladišni centar	Odredište	Količina pakiranja	Bruto masa (kg)	Šifra rute
1.	17.3.2017 0:00	Zagreb	Popovac	1	27	HR-43960
2.	17.3.2017 0:00	Zagreb	Čačinci	1	69	HR-43960
3.	17.3.2017 0:00	Zagreb	Našice	2	1609	HR-43960
4.	17.3.2017 0:00	Zagreb	Jagodnjak	1	271	HR-43960
5.	17.3.2017 0:00	Zagreb	Kneževi Vinogradi	1	45	HR-43960
6.	17.3.2017 0:00	Zagreb	Donji Miholjac	2	734	HR-43960
7.	17.3.2017 0:00	Zagreb	Beli Manastir	2	20	HR-43960
8.	17.3.2017 0:00	Zagreb	Lug	1	90	HR-43960

Prema udaljenostima između svih navedenih lokacija, računaju se uštede između svake od njih kako bi se mogle projektirati rute prema *Clark-Wright-ovom algoritmu* i *metodi s indikatorom T*. Lokacije iz matričnog prikaza nalaze se u tablici 28.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_0	∞	281	209	224	267	281	221	269	287
x_1	281	∞	88	77	33	16	60	13	27
x_2	209	88	∞	26	74	88	47	76	93
x_3	224	77	26	∞	63	75	34	65	70
x_4	267	33	74	63	∞	21	46	19	20
x_5	281	16	88	75	21	∞	60	13	12
x_6	221	60	47	34	46	60	∞	48	65
x_7	269	13	76	65	19	13	48	∞	22
x_8	287	27	93	70	20	12	65	22	∞

Uštede između vrhova izračunate prema formuli (4) nalaze se u tablici 29. Uštede se koriste za izračun najkraćeg puta kod *Clark-Wright-ovog algoritma* te *metode s indikatorom T*.

Tablica 29. Uštede za rutu HR-43960 rangirane prema veličini

Grana (*i,j*)	Ušteda *s*(*i,j*)	Grana (*i,j*)	Ušteda *s*(*i,j*)	Grana (*i,j*)	Ušteda *s*(*i,j*)
(5,8)	556	**(6,8)**	443	**(3,6)**	411
(1,5)	546	**(1,6)**	442	**(2,3)**	407
(1,8)	541	**(5,6)**	442	**(2,8)**	403
(1,7)	537	**(4,6)**	442	**(2,4)**	402
(5,7)	537	**(6,7)**	442	**(2,5)**	402
(4,8)	534	**(3,8)**	441	**(2,7)**	402
(7,8)	534	**(3,5)**	430	**(1,2)**	402
(4,5)	527	**(1,3)**	428	**(2,6)**	383
(4,7)	517	**(3,4)**	428		
(1,4)	515	**(3,7)**	428		

Clark-Wright-ov algoritam

Algoritam *Clark-Wright-a* nudi dva rješenja najkraćeg puta jednake udaljenosti:

1.)

(5,8) => 0 ↔ 5 ↔ 8 ↔ 0

(1,5) => 0 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 8 ↔ 0

(1,7) => 0 ↔ 7 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 8 ↔ 0

(4,8) => 0 ↔ 7 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 8 ↔ 4 ↔ 0

(4,6) => 0 ↔ 7 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 8 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 0

(3,7) => 0 ↔ 3 ↔ 7 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 8 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 0

(2,3) => 0 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 7 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 8 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 0 = 628 km.

2.)

(5,8) => 0 ↔ 5 ↔ 8 ↔ 0

(1,5) => 0 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 8 ↔ 0

(1,7) => 0 ↔ 7 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 8 ↔ 0

(4,8) => 0 ↔ 7 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 8 ↔ 4 ↔ 0

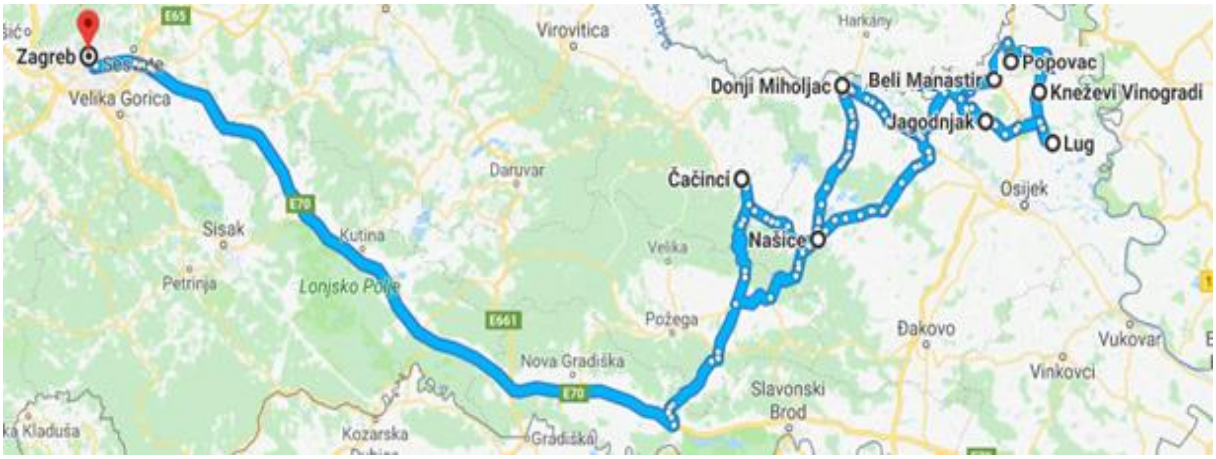
(6,7) => 0 ↔ 6 ↔ 7 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 8 ↔ 4 ↔ 0

(3,4) => 0 ↔ 6 ↔ 7 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 8 ↔ 4 ↔ 3 ↔ 0

(2,3) => 0 ↔ 6 ↔ 7 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 8 ↔ 4 ↔ 3 ↔ 2 ↔ 0 = 628 km.

Na slici 44. nalaze se oba rješenja *Clark-Wright-ovim algoritmom*. Rješenja se razlikuju ovisno o smjeru kretanja, odnosno o rasporedu obilaska lokacija, međutim rute između lokacija jednakog su izgleda u oba slučaja. Iako obje rute imaju jednaku duljinu, razlika može biti u vremenskom trajanju distribucije, tj. kod jedne rute vrijeme obilaska će biti veće u odnosu na drugu. Također, bitno je sagledati koja ruta sadrži više prometnica pogodnijih za distribuciju ovisno o korištenju tipa vozila.

1.) 0 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 7 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 8 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 0
2.) 0 ↔ 6 ↔ 7 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 8 ↔ 4 ↔ 3 ↔ 2 ↔ 0



Slika 44. Ruta HR-43960 kao rješenje CW-ovog algoritma ušteda

Metoda s indikatorom T

Obzirom da je za dobivanje rješenja najkraćeg puta pomoću *metode s indikatorom T*, potreban izračun ušteda, kao i kod metode *Clark-Wright-ovog algoritma*, stoga će i kod ove metode postojati dva rješenja, odnosno dvije rute jednakih udaljenosti, ali različitog obilaska lokacija. U nastavku je prikazana početna polu-matrica udaljenosti prema kojoj će se dobiti rješenja najkraćeg puta. Uštede koje se koriste pri izračunu najkraćeg puta kod *metode s indikatorom T*, izračunavaju se na jednak način kao i uštede kod metode *Clark-Wright-ovog algoritma*, odnosno korištenjem formule (4).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_0	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
	x_1	402	428	515	546	442	537	541
		x_2	407	402	402	383	402	403
			x_3	428	430	411	428	441
				x_4	527	442	517	534
					x_5	442	537	556
						x_6	442	443
							x_7	534

Razlog nastanka dva jednaka rješenja je taj što postoje dvije uštede jednakih vrijednosti koje se prema pravilima odabiru. U ovom primjeru, radi se o uštedama između čvorova x_4 i x_6 te između čvorova x_6 i x_7, a vrijednost uštede je 442 km. Prilikom odabira jedne od ušteda, mijenja se daljnji koncept rute, stoga nastaju dvije različite rute jednakih udaljenosti. U nastavku se nalazi završna polu matrica s rješenjima te prikaz koraka dobivanja rješenja.

(1)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_0	**(0)**	**(1)**	**(0)**	**(0)**	**(0)**	**(1)**	**(0)**	**(0)**
	x_1	402	428	515	(1) 546	442	(1) 537	541
		x_2	(1) 407	402	402	383	402	403
			x_3	428	430	411	(1) 428	441
				x_4	527	(1) 442	517	(1) 534
					x_5	442	537	(1) 556
						x_6	442	443
							x_7	534

$5 \rightarrow 8$

$1 \rightarrow 5 \Rightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 8$

$1 \rightarrow 7 \Rightarrow 7 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 8$

$4 \rightarrow 8 \Rightarrow 7 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 4$

$4 \rightarrow 6 \Rightarrow 7 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6$

$3 \rightarrow 7 \Rightarrow 3 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6$

$2 \rightarrow 3 \Rightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6$

$0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 0 = 628$ km.

Nakon izračuna prvog rješenja, prikazano je drugo rješenje najkraćeg puta, odnosno primjer druge rute jednake udaljenosti, ali različitog obilaska lokacija. Prikazani su koraci dobivanja rješenja gdje se može uočiti navedena razlika koja utječe na razliku obilasku lokacija.

2.)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_0	**(0)**	**(1)**	**(0)**	**(0)**	**(0)**	**(1)**	**(0)**	**(0)**
	x_1	402	428	515	(1) 546	442	(1) 537	541
		x_2	(1) 407	402	402	383	402	403
			x_3	(1) 428	430	411	428	441
				x_4	527	442	517	(1) 534
					x_5	442	537	(1) 556
						x_6	(1) 442	443
							x_7	534

$5 \rightarrow 8$

$1 \rightarrow 5 \Rightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 8$

$1 \rightarrow 7 \Rightarrow 7 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 8$

$4 \rightarrow 8 \Rightarrow 7 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 4$

$6 \rightarrow 7 \Rightarrow 6 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 4$

$3 \rightarrow 4 \Rightarrow 6 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3$

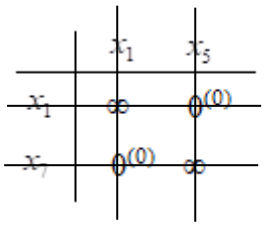
$2 \rightarrow 3 \Rightarrow 6 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 2$

$0 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0 = 628$ km.

Metoda grananja i ograničavanja

Metoda grananja i ograničavanja za rutu HR-43960 daje jedno rješenje najkraćeg puta, odnosno minimalnu udaljenost prema navedenoj metodi.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_0	∞	281	209	224	267	281	221	269	287
x_1	281	∞	88	77	33	16	60	13	27
x_2	209	88	∞	26	74	88	47	76	93
x_3	224	77	26	∞	63	75	34	65	70
x_4	267	33	74	63	∞	21	46	19	20
x_5	281	16	88	75	21	∞	60	13	12
x_6	221	60	47	34	46	60	∞	48	65
x_7	269	13	76	65	19	13	48	∞	22
x_8	287	27	93	70	20	12	65	22	∞



$0 \rightarrow 2$

$3 \rightarrow 6$

$2 \rightarrow 3 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6$

$4 \rightarrow 0$

$6 \rightarrow 7 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 7$

$5 \rightarrow 8$

$8 \rightarrow 4 \Rightarrow 5 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0$

$1 \rightarrow 5 \Rightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0$

$7 \rightarrow 1 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0 = 645$ km.

Metoda najbližeg susjeda

Kao i u prethodnim primjerima, na isti način dobiveno je rješenje najkraćeg puta prema *metodi najbližeg susjeda*. *Metoda najbližeg susjeda* za navedenu rutu također daje jedno rješenje najkraćeg puta. U nastavku su prikazani koraci izračuna najkraćeg puta za navedenu metodu te kompletna ruta sa svojim iznosom.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_0	∞	281	209	224	267	281	221	269	287
x_1	281	∞	88	77	33	16	60	13	27
x_2	209	88	∞	26	74	88	47	76	93
x_3	224	77	26	∞	63	75	34	65	70
x_4	267	33	74	63	∞	21	46	19	20
x_5	281	16	88	75	21	∞	60	13	12
x_6	221	60	47	34	46	60	∞	48	65
x_7	269	13	76	65	19	13	48	∞	22
x_8	287	27	93	70	20	12	65	22	∞

$0 \rightarrow 2$

$2 \rightarrow 3 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3$

$3 \rightarrow 6 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6$

$6 \rightarrow 4 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4$

$4 \rightarrow 7 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 7$

$7 \rightarrow 1 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 1$

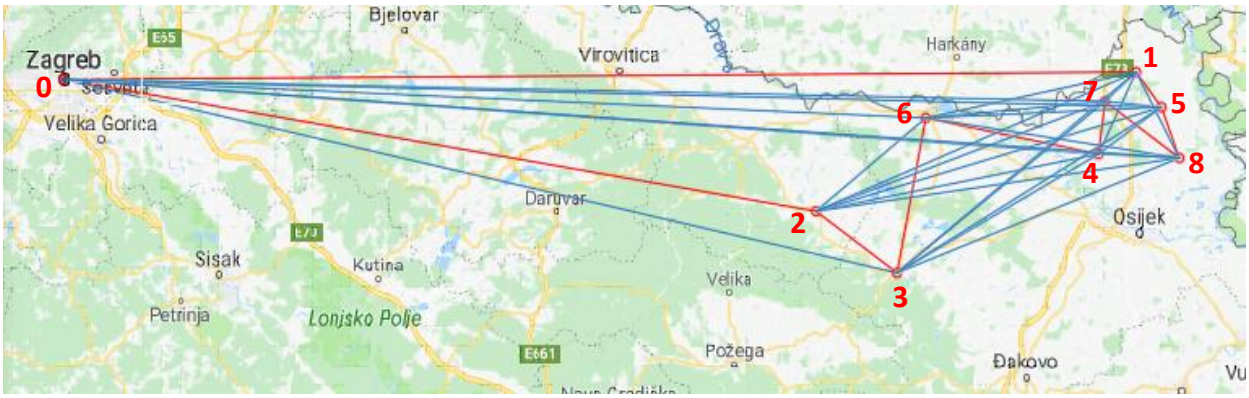
$1 \rightarrow 5 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5$

$5 \rightarrow 8 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 8$

$8 \rightarrow 0 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 0 = 662$ km.

Christofides-ov algoritam

Prema izračunu kao i u prethodnim primjerima, rješenje najkraćeg puta prema *Christofides-ovom algoritmu* prikazano je crvenim linijama, dok plave linije označavaju međusobne udaljenosti između gradova. Kao i prethodne dvije metode, *Christofides-ov algoritam* također daje jedno rješenje najkraćeg puta, odnosno dobije se jedna ruta. Rješenje je prikazano na slici 45. Rješenje *Christofides-ovog algoritma* glasi: 0 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 8 ↔ 7 ↔ 4 ↔ 6 ↔ 3 ↔ 2 ↔ 0 = 665 km.



Slika 45. Ruta HR-43960 kao rješenje Christofides-ovog algoritma

6. REZULTAT ISTRAŽIVANJA

Nakon projektiranja svih ruta i izračuna najkraćeg puta za sve rute te prema svim metodama, dobiveni rezultati će se usporediti te će se izdvojiti najbolje rješenje, odnosno najkraći dobiveni put za svaku rutu. Dobiveno rješenje će se koristiti za definiranje cijene transporta, odnosno kao trošak distribucije na način da se odabere tip vozila ovisno o količini tereta za pojedinu rutu te se unaprijed utvrđena cijena prijevoza po kilometru za određeno vozilo uračuna u najbolje rješenje dobiveno prema ranije navedenim matematičkim metodama. U tablici 30. prikazana su rješenja svake od navedenih metoda za pojedinu rutu. Prvih šest ruta pripada području Sjeverne Hrvatske, dok sljedećih šest ruta pripada Slavoniji. Ruta HR-43365 podijeljena je na dva dijela prvenstveno radi svoje veličine te radi vremena dostave, kao što je vidljivo u tablici 21. Kod nekih lokacija je datum 06.03.2017. kao rok dostave, dok ostale lokacije imaju rok dostave 07.03.2017. Kod izračuna najkraćeg puta pomoću matematičkih metoda, oba dijela rute HR-43365 nalaze se pod istom šifrom radi jednostavnijeg prikaza.

Tablica 30. Rezultati najkraćeg puta prema matematičkim metodama

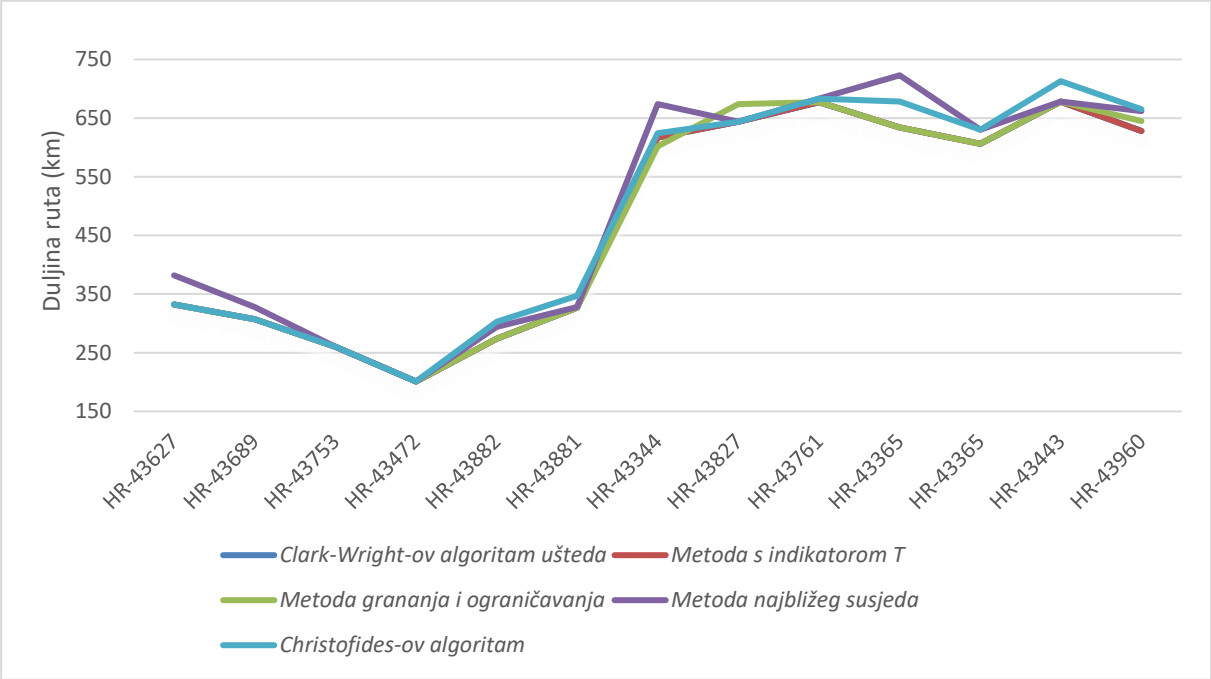
Ruta	***Clark-Wright-ov algoritam ušteda* (km)**	***Metoda s indikatorom T* (km)**	***Metoda grananja i ograničavanja* (km)**	***Metoda najbližeg susjeda* (km)**	***Christofides-ov algoritam* (km)**	**Najbolje rješenje (km)**
HR-43627	332	332	332	382	332	**332**
HR-43689	307	307	307	328	307	**307**
HR-43753	260	260	260	260	260	**260**
HR-43472	201	201	201	201	201	**201**
HR-43882	274	274	274	294	303	**274**
HR-43881	327	327	327	328	347	**327**
HR-43344	617	617	602	674	624	**602**
HR-43827	644	644	674	644	644	**644**
HR-43761	677	677	677	683	683	**677**
HR-43365	634	634	634	723	678	**634**
	606	606	606	630	630	**606**
HR-43443	678	678	678	678	713	**678**
HR-43960	628	628	645	662	665	**628**

Početnih šest ruta u tablici obuhvaća distribuciju gradova i mjesta Sjeverne Hrvatske, dok je sljedećih šest uključeno u distribuciju po Slavoniji. Izračunom najkraćeg puta pomoću osnovnih metoda, odnosno *Clark-Wright-ovog algoritma ušteda* i *metode s indikatorom T* dobiveno je najbolje rješenje u 92,3% slučajeva, odnosno kod 12 od mogućih 13 ruta. Rješenje je jednako kod obje metode iako su izračuni različiti, odnosno temelj *metode s indikatorom T* i *Clark-Wright-ovog algoritma* su uštede koje se za obje metode izračunavaju prema formuli (4), što je razlog jednakih rješenja. *Metoda grananja i ograničavanja* treća je po redoslijedu učinkovitosti, odnosno dobivenih najboljih rješenja. Njen učinak iznosi 84,6%, što predstavlja najbolje rješenje u 11 od mogućih 13 slučajeva. *Metoda najbližeg susjeda* prema učinkovitosti pripada posljednjem mjestu jer se najbolje rješenje prema toj metodi nalazi u četiri od mogućih 13 ruta, što iznosi 30,7%. Posljednjom metodom, *Christofides-ovim algoritmom*, najbolje rješenje dobiveno je kod pet od mogućih 13 ruta, što znači da je metodom izračuna najkraćeg puta *Christofides-ovim algoritmom* najbolje rješenje dobiveno kod 38,4% ruta.

Za rute u Sjevernoj Hrvatskoj, HR-43753 i HR-43472, svih pet metoda dalo je najbolja (jednaka) rješenja, odnosno 260 i 201 kilometar dužine najkraćeg puta. Također je vidljivo kako četiri od pet metoda za izračun najkraćeg puta daju najbolje rješenje za rute: HR-43627, HR-43689, HR-43827 i HR-43443. Ruta HR-43344 je jedina ruta gdje je najbolje rješenje dobiveno samo jednom metodom (*metodom grananja i ograničavanja*), dok su u ostalim rutama, najbolja rješenja dobivena od strane dviju ili više metoda.

Grafikon 3. prikazuje odnos rješenja svih matematičkih metoda korištenih u radu, odnosno najkraći put dobiven pomoću svake od navedenih metoda. Odstupanja su veća na području Slavonije, dok su linije približno jedna uz drugu na području Sjeverne Hrvatske, što znači da su odstupanja manja, odnosno rješenja su približno jednaka. Razlog tome su manje ukupne udaljenosti ruta na području Sjeverne Hrvatske u odnosu na rute kod Slavonije. Također bitan faktor je i udaljenost početne točke od ostalih lokacija, čvorišta na ruti, gdje je navedena udaljenost znatno veća kod ruta na području Slavonije. Kao što je vidljivo na grafikonu 3. *metoda najbližeg susjeda* je metoda s najmanjim postotkom najboljeg rješenja, stoga je i odstupanje u odnosu na ostale rute veće. Metode *Clark-Wright-ov algoritam ušteda* i *metoda s indikatorom T* ponudile su jednaka rješenja kod svih ruta, stoga se njihove linije na grafikonu nalaze jedna preko druge, dok su rješenja *metode grananja i ograničavanja* približno jednaka

rješenjima dviju navedenih metoda pa se linija te metode nalazi preko linija dviju metoda u većini slučajeva.



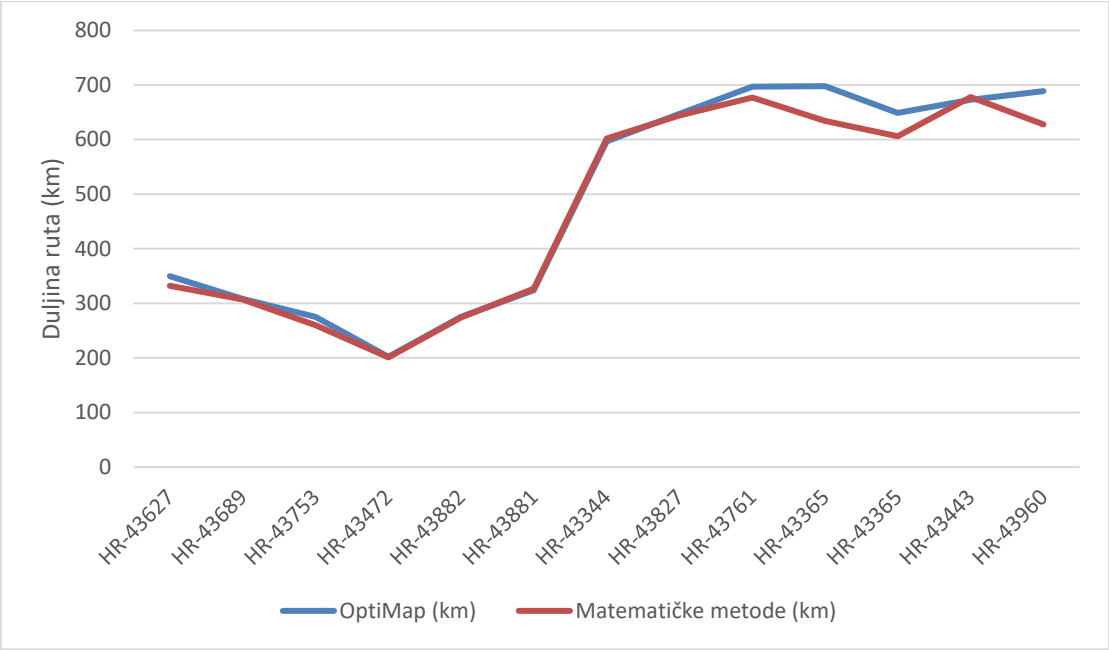
Grafikon 3. Odnos rješenja matematičkih metoda

U tablici 31. nalazi se usporedba rezultata najkraćeg puta za sve rute dobivenih pomoću softvera *OptiMap* kojem je svrha planiranje ruta i matematičkih metoda navedenih u radu. *OptiMap* je ponudio bolje rješenje u tri slučaja, kod ruta HR-43881, HR-43344 i HR-43443. Posljednji stupac u tablici predstavlja uštedu, odnosno razliku između dva načina izračuna najkraćeg puta. Vrijednost najkraćeg puta jednaka je za oba načina kod rute HR-43882, stoga ušteda iznosi nula. Također vidljivo je da su uštede u donjem dijelu tablice, odnosno kod područja Slavonije znatno veće u odnosu na uštede na području Sjeverne Hrvatske jer je udaljenost svake od ruta daleko veća prema Slavoniji, nego prema Sjevernoj Hrvatskoj. Matematičke metode ponudile su bolje rješenje u 76,92% slučajeva, stoga se može zaključiti kako su metode učinkovite.

Tablica 31. Usporedba rješenja OptiMap-a i matematičkih metoda

Ruta	OptiMap (km)	Matematičke metode (km)	Ušteda (km)
HR-43627	350	332	**18**
HR-43689	308	307	**1**
HR-43753	275	260	**15**
HR-43472	202	201	**1**
HR-43882	274	274	**0**
HR-43881	324	327	**-3**
HR-43344	597	602	**-5**
HR-43827	647	644	**3**
HR-43761	697	677	**20**
HR-43365	698	634	**64**
	649	606	**43**
HR-43443	673	678	**-5**
HR-43960	689	628	**61**

Grafikon 4. prikazuje grafički prikaz rješenja najkraćeg puta dobivenih *OptiMap-om* i ranije navedenim matematičkim metodama. Obzirom da su rješenja najkraćeg puta na području Sjeverne Hrvatske dobivenih *OptiMap-om* i matematičkim metodama približno jednaka, tako se i linije na grafikonu 4. nalaze jedna preko druge, odnosno uštede su minimalne, stoga odstupanja nisu vidljiva. Odstupanja postaju vidljiva na području Slavonije jer su i uštede izraženije, što znači da su razlike u dobivenim rješenjima znatno veće, razlog tome su veće udaljenosti od centralnog skladišta do lokacija i ukupna duljina ruta na području Slavonije. Rješenja matematičkih metoda označena su crvenom bojom, dok su rješenja *OptiMap-a* označena plavom bojom.



Grafikon 4. Odnos rješenja OptiMap-a i matematičkih metoda

Najbolje rješenje, posljednji stupac iz tablice 30. koristiti će se u izračunu troškova distribucije, na način da se prema količini i masi tereta odredi tip vozila koji će distribuirati robu na određenoj ruti te se dužina rute (najbolje rješenje) za koju se izvodi izračun, pomnoži s cijenom odabranog vozila.

U tablici 2. u poglavlju 5. nalaze se podaci za rutu HR-43627. Za početak odredi se ukupna količina pakiranja, odnosno koliki je broj paleta i ukupna masa za transport. Za ovu rutu potrebno je distribuirati osam euro-paleta koje zajedno s teretom imaju ukupnu masu od 2803 kilograma. Za jednostavniji pregled rezultata u nastavku je ponovno prikazana tablica 2.

Tablica 2. Podaci o ruti HR-43627

Vrijeme dostave	**Skladišni centar**	**Odredište**	**Količina Pakiranja**	**Bruto masa (kg)**	**Šifra rute**
10.3.2017 0:00	Zagreb	Kapela	2	1245	HR-43627
10.3.2017 0:00	Zagreb	Pitomača	1	100	HR-43627
10.3.2017 0:00	Zagreb	Drnje	1	75	HR-43627
10.3.2017 0:00	Zagreb	Donji Kraljevec	1	212	HR-43627
10.3.2017 0:00	Zagreb	Ludbreg	1	250	HR-43627
10.3.2017 0:00	Zagreb	Koprivnica	1	142	HR-43627
10.3.2017 0:00	Zagreb	Križevci	1	779	HR-43627

Zatim, potrebno je odabrati tip vozila koje zadovoljava uvjete volumena i mase, odnosno da može prevesti osam euro-paleta mase 2803 kg. Za distribuciju tereta na ruti HR-43627 odabire se dostavno vozilo nosivost 3,5 tona (slika 4.), koji ima kapacitet 14 euro-paleta. Obzirom da su oba uvjeta zadovoljena, cijena najma vozila iznosi 4 kn/km, a najbolje rješenje, odnosno dužina rute iznosi 332 km. Trošak prijevoza je umnožak cijene najma vozila i dužine rute te za ovu rutu iznosi 1328 kn. Tablica 32. prikazuje cijene, odnosno iznos koji tvrtka plaća po pojedinoj ruti. Tvrtka je distribuciju na navedenoj ruti platila 1800 kn. Nakon svih izračuna, dobivena je ušteda od 472 kn za rutu HR-43627.

Na jednak način računaju se troškovi za ostale rute. U tablici 30. nalazi se prikaz troškova distribucije za sve rute prema najmu vozila, odnosno prijeđenom kilometru te pritom iskazane uštede ili dodatni troškovi. Obzirom da je način plaćanja prema prijeđenom kilometru, potrebno je prema količini tereta za svaku rutu odrediti tip dostavnog vozila kojim će se roba distribuirati. Prilikom odabira vozila, potrebno je paziti na volumenski i maseni udio tereta. Nakon odabira vozila, pomoću matematičkih metoda, projektiraju se rute te se odredi najkraći put. Zatim se formira nova cijena na način da se cijena najma pojedinog vozila pomnoži s duljinom rute (najboljim rješenjem), odnosno brojem kilometara. Ušteda predstavlja razliku nove cijene, odnosno izračuna nakon odabira vozila i projektiranja rute te troška distribucije koji je tvrtka Quehenberger Hrvatska d.o.o. platila prijevozniku.

Tablica 32. Troškovi distribucije prema najmu vozila

Ruta	Trošak distribucije (kn)	Način plaćanja	Tip vozila	Nova cijena (kn)	Ušteda (kn)
HR-43627	1800	Najam vozila	2	1328	**472**
HR-43689	1700	Najam vozila	2	1228	**472**
HR-43753	1350	Najam vozila	1	650	**700**
HR-43472	1000	Najam vozila	2	804	**196**
HR-43882	1200	Najam vozila	2	1096	**104**
HR-43881	1600	Najam vozila	2	1308	**292**
HR-43344	2700	Najam vozila	5	3612	**-912**
HR-43827	2150	Najam vozila	3	2576	**-426**
HR-43761	4150	Najam vozila	5	4062	**88**
HR-43365	2300	Najam vozila	2	2536	**-360**
			2	2424	
HR-43443	1950	Najam vozila	2	2712	**-762**
HR-43960	1540	Najam vozila	2	2512	**-972**

Obzirom da je pomoću matematičkih metoda za svaku rutu izračunata nova udaljenost, odnosno najkraći put, proporcionalno tome smanjuje se i trošak distribucije koja se plaća po prijeđenom kilometru, iako se za neke rute trošak povećava. Razlog tome je dogovor o količinskom popustu između prijevoznika i tvrtke za distribuciju.

Nakon izračuna troška distribucije prema prijeđenom kilometru, računa se trošak distribucije po paletnom mjestu za sve rute, odnosno za distribuciju na području Sjeverne Hrvatske i na području Slavonije. Nakon izračuna usporedit će se troškovi te će se ustvrdit koji način prijevoza je optimalniji, te samim time isplativiji.

U tablici 2. prikazana je količina tereta za rutu HR-43627. Potrebno je distribuirati 12 paleta, gdje trošak po paleti iznosi 180 kn te stoga ukupni trošak distribucije po paletnom mjestu za rutu HR-43627 iznosi 1440 kn. Veća količina pošiljka manje mase za istu lokaciju može se složiti na jednu paletu ili s komadnim teretom, paketima se popunjava prazan teretni prostor vozila, kako bi već samim time nastala ušteda. Primjerice u tablici 5., količina tereta za prvo

dostavno mjesto iznosi pet komada pakiranja, mase 50 kg. Nosivost jedne euro-palete iznosi 800-1000 kg. Navedenih pet komada pakiranja moguće je složiti na jednu paletu, umjesto da se koristi više paleta ili obzirom na manju masu pojedinačnog paketa, teret se može složiti s drugim teretom na palete radi uštede prostora. Jednako tako se slaže teret i za ostale rute. U tablici 33. nalaze se izračunati troškovi distribucije po paletnom mjestu na jednak način kako je ranije navedeno. Trošak distribucije označava cijenu koju je tvrtka platila prijevoznicima za pojedinu rutu. Obzirom da se u ovom primjeru, distribucija plaća po paletnom mjestu, odnosno po količini prevezenih paleta, cijena jedne palete iznosi 180 kn, stoga nova cijena predstavlja umnožak cijene palete i količine paleta koje je potrebno prevesti po pojedinoj ruti. Posljednji stupac u tablici označava dobivenu uštedu prema izračunu ili u drugom slučaju, nastali trošak. U tablici 34. usporediti će se rezultati iz tablice 32. i tablice 33. te će se odabrati optimalnije rješenje.

Tablica 33.Troškovi distribucije po paletnom mjestu

Ruta	**Trošak distribucije (kn)**	**Način plaćanja**	**Broj paleta**	**Nova cijena (kn)**	**Ušteda (kn)**
HR-43627	1800	Po paletnom mjestu	8	1440	**360**
HR-43689	1700	Po paletnom mjestu	12	2160	**-460**
HR-43753	1350	Po paletnom mjestu	5	900	**450**
HR-43472	1000	Po paletnom mjestu	7	1260	**-260**
HR-43882	1200	Po paletnom mjestu	7	1260	**-60**
HR-43881	1600	Po paletnom mjestu	9	1620	**-20**
HR-43344	2700	Po paletnom mjestu	21	3780	**-1080**
HR-43827	2150	Po paletnom mjestu	11	1980	**170**
HR-43761	4150	Po paletnom mjestu	19	3420	**730**
HR-43365	2300	Po paletnom mjestu	8	1440	**-40**
			5	900	
HR-43443	1950	Po paletnom mjestu	10	1800	**150**
HR-43960	1540	Po paletnom mjestu	8	1440	**100**

Prilikom izračuna troška distribucije po paletnom mjestu cijene mogu varirati ovisno o količinskom popustu ili slaganju tereta unutar vozila, čak i radi dogovora tvrtke s

prijevoznikom. Tablica 34. prikazuje odnos troškova prema najmu vozila (NV) i po paletnom mjestu (PM).

Tablica 34. Usporedba troškova i ušteda

Ruta	Trošak distribucije (kn)	PM (kn)	Ušteda-PM (kn)	NV (kn)	Ušteda-NV (kn)
HR-43627	1800	1440	**360**	1328	**472**
HR-43689	1700	2160	**-460**	1228	**472**
HR-43753	1350	900	**450**	650	**700**
HR-43472	1000	1260	**-260**	804	**196**
HR-43882	1200	1260	**-60**	1096	**104**
HR-43881	1600	1620	**-20**	1308	**292**
HR-43344	2700	3780	**-1080**	3612	**-912**
HR-43827	2150	1980	**170**	2576	**-426**
HR-43761	4150	3420	**730**	4062	**88**
HR-43365	2300	1440	**-40**	2536	**-360**
		900		2424	
HR-43443	1950	1800	**150**	2712	**-762**
HR-43960	1540	1440	**100**	2512	**-972**

U tablici 34. uspoređeni su troškovi i uštede dobiveni po principu izračuna troška za najam vozila (NV) i izračun troška po paletnom mjestu (PM) kako je ranije opisano. Uštede su značajno veće kod ruta za Sjeverni dio Hrvatske (gornji dio tablice), po principu izračuna troškova za najam vozila (NV), odnosno po prijeđenom kilometru. Donji dio tablice prikazuje rute po Slavoniji, gdje su uštede veće pri izračunu troška po paletnom mjestu, iako ušteda kod rute HR-43344 odstupa od ostatka. Razlog ovakvom odnosu ušteda je taj što je broj lokacija kod Sjeverne Hrvatske veći u odnosu na broj lokacija u Slavoniji, stoga je i dužina ruta veća. Prosjek dužine ruta kod Sjeverne Hrvatske iznosi 283,5 kilometara, dok prosjek dužine ruta na području Slavonije iznosi 638,4 kilometara. Može se zaključiti kako je za Sjeverni dio Hrvatske isplativije plaćati najam vozila, odnosno plaćati vozilo po prijeđenom kilometru, a za Slavoniju plaćati prijevoz po prevezenoj paleti. Razlog je količina tereta koja je veća kod distribucije na području Slavonije nego kod područja Sjeverne Hrvatske, a i mogućnosti dogovora oko količinskog popusta prilikom plaćanja prijevoza po paleti su veće u odnosu na najam vozila.

8. ZAKLJUČAK

Distribucija obuhvaća tijek gotovih proizvoda, od završetka procesa proizvodnje do konačne potrošnje. Distribucijom se funkcionalno i djelotvorno povezuju svi djelomični procesi svladavanja prostornih i vremenskih transformacija gotovih proizvoda od proizvođača do kupca ili krajnjeg korisnika, odnosno potrošača. Sustav distribucije jest ukupnost svih gospodarskih jedinica koje su povezane s distribucijom i koje sudjeluju u tokovima realnih dobara, nominalnih dobara i informacija. Cilj distribucije je povećanje vrijednosti robe na način da troškovi vezani uz proizvodnju i distribuciju budu što niži u odnosu na prodajnu cijenu..

Projektiranje ruta transportnih sredstava koje se koriste za distribuciju izvodi se pomoću matematičkih metoda. Kao osnovne metode za projektiranje ruta korištene su *Clark-Wright-ov algoritam ušteda, Clark-Wright-ov algoritam ušteda-metoda s indikatorom T,* te *metoda grananja i ograničavanja, metoda najbližeg susjeda* i *Christofides-ov algoritam* za usporedbu dobivenih rezultata. Inače, za projektiranje ruta postoji velik broj matematičkih metoda, ovdje su navedene samo neke od brojnih.

Optimizacijom distribucijske mreže, primjerice odabirom optimalnog transportnog sredstva i prijevoznog puta, mogu se smanjiti troškovi distribucije, kao što su: troškovi kvara i loma, troškovi goriva, troškovi kašnjenja, trošak najma za veće vozilo, itd.

Kako bi se smanjili troškovi tvrtke Quehenberger Hrvatska d.o.o., u svrhu procesa optimizacije distribucijske mreže projektirano je dvanaest ruta na području Sjeverne Hrvatske i Slavonije pomoću ranije navedenih matematičkih metoda te je usporedbom dobivenih rezultata prema svakoj od metoda, dobiven najkraći put za svaku rutu. Tvrtka koristi usluge vozila u najmu, odnosno distribuciju obavlja preko vanjskog pružatelja usluga. Ovisno o narudžbi, tj. količini tereta koju je potrebno distribuirati, odabire se optimalno vozilo kako bi trošak bio što niži. Za potrebe distribucije, postoji pet tipova vozila, sukladno tome, svako vozilo sadrži cijenu najma ovisno o količini tereta koju može prevesti. Nakon dobivenog najkraćeg puta, odabire se optimalno vozilo za distribuciju, obzirom da je cijena vozila prema prijeđenom kilometru, trošak distribucije je umnožak najkraćeg puta i cijene odabranog vozila.

Za sve navedene rute, također je prikazan i izračun troška distribucije prema paletnom mjestu, odnosno, tvrtka može plaćati prijevoz i po paletnom mjestu tj. količini prevezenog tereta. Izračunima oba načina distribucije, dobiveni rezultati pokazali su rješenja za svako

područje. Prema dobivenim podacima tvrtki je isplativije transport plaćati prema najmu vozila, odnosno prijeđenom kilometru na području Sjeverne Hrvatske. Razlog su manje udaljenosti od centralnog skladišta do lokacija koje je potrebno opskrbiti, ali i ukupne dužine ruta na području Sjeverne Hrvatske u odnosu na područje Slavonije.

Na području Slavonije situacija je drugačija. Projektiranjem ruta i izračunom najkraćeg puta primijenjenim matematičkim metodama, distribucija na području Slavonije isplativija je po paletnoj jedinici, zbog većih udaljenosti. Obzirom da se prema narudžbama veća količina tereta prevozi u Slavoniju u odnosu na područje Sjeverne Hrvatske, mogući su dogovori oko količinskog popusta s prijevoznikom i drugih pogodnosti.

Cilj svake tvrtke je ostvarivanje zarade i zadovoljstvo korisnika, a da bi se to postiglo, potrebno je pratiti distribucijska načela: u pravo vrijeme, na pravom mjestu u optimalnim količinama, u odgovarajućem asortimanu i uz najniže troškove.

LITERATURA

[1] Rogić, K., Autorizirana predavanja iz kolegija Distribucijska logistika 1, predavanje 2017.

[2] Ivaković, Č., Stanković, R., Šafran, M., Špedicija i logistički procesi, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 2010.

[3] Šamanović, J., Prodaja, distribucija, logistika, Ekonomski fakultet u Splitu, Split, 2009. [http://www.teretna-vozila.com]

[4] Rožić, T.: Autorizirana predavanja iz kolegija Distribucijska logistika I, Fakultet prometnih znanosti, Akademska godina 2017/2018, Zagreb

[5] URL: http://www.teretna-vozila.com/ (pristupljeno: siječanj 2018.)

[6] Teodorović, D., Transportne mreže, Saobraćajni fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd 2007.

[7] Golden B.L., Magnanti T.L., Nguyen H.Q.: Implementing Vehicle Routing Algorithms, Networks 7, 1997.

[8] URL: http://laboi.fon.bg.ac.rs/wp-content/uploads/2014/12/AlgoritamUsteda.pdf (pristupljeno: studeni 2017.) []

[9] Toth, P., Vigo, D., Vehicle Routing problems, methods and applicatons, Second Edition, 2014.

[10] Optimizacija prometnih procesa, nastavni tekst, Carić, T., Fakultet prometnih znanosti, 2014.

[11] David P. Williamson, The subtour LP for the Traveling Salesman Problem, Cornell University, 2011.

[12] Goval, S., A Survey on Travelling Salesman Problem, Department of Computer Science, University of North Dakota, 2010.)

[13] Perić, T., Problem trgovačkog putnika, Nastavni tekst, Ekonomski fakultet Zagreb, 2015.

[14] D. Applegate, R. Bixby, V. Chvátal, W. Cook, The travelling Salesman Problem, Princeton University Press, New Jersey, 2006.

[15] Lenore Cowen, T., Travelling Salesman Problem, Jisoo Park University, 2011.

POPIS KRATICA

3PL	(Third Party Logistics) logistika treće strane
EUP	Euro-paleta
VRP	(Vehicle Routing Problem) problem usmjeravanja vozila
CVRP	(Capacitated Vehicle Routing Problem) Problem usmjeravanja vozila s ograničenjima kapaciteta
TSP	(Traveling Salesman Problem) problem trgovačkog putnika
BnB	(Branch & Bound) algoritam grananja i ograničavanja
NNH	(Nearest Neighbour Heuristic) heuristika najbližeg susjeda

POPIS SLIKA

Slika 1. Prikaz neposredne (direktne) distribucije 5
Slika 2. Prikaz posredne (indirektne) distribucije 6
Slika 3. Kombi vozilo 10
Slika 4. Dostavno vozilo (3,5 tona) 11
Slika 5. Dostavno vozilo (5 tona) 11
Slika 6. Dostavno vozilo (7 tona) 12
Slika 7. Dostavno vozilo (12 tona) 12
Slika 8. Izračunavanje ušteda 18
Slika 9. Rješenje Clark-Wright-ovog algoritma 24
Slika 10. Metoda s indikatorom T, primjer 1. 25
Slika 11. Metoda s indikatorom T, primjer 2. 26
Slika 12. Distribucijska mreža 1. 27
Slika 13. Ruta 0-2-3-0 29
Slika 14. Ruta 0-4-2-3-0 30
Slika 15. Kompletirana ruta 30
Slika 16. Rješenje problema trgovačkog putnika s 24978 gradova 31
Slika 17. Ruta HR-43627 kao rješenje Clark-Wright-ovog algoritma ušteda 53
Slika 18. Razapinjuće stablo 65
Slika 19. Sparivanje neparnih vrhova 66
Slika 20. Kombinacija povezivanja vrhova 67
Slika 21. Ruta HR-43627 kao rješenje Christofides-ovog algoritma 68
Slika 22. Ruta HR-43689 kao rješenje CW-ovog algoritma 71
Slika 23. Ruta HR-43689 kao rješenje Christofides-ovog algoritma 74
Slika 24. Ruta HR-43753 kao rješenje CW-ovog algoritma 76
Slika 25. Ruta HR-43753 kao rješenje Christofides-ovog algoritma 80
Slika 26. Ruta HR-43472 kao rješenje CW-ovog algoritma 82
Slika 27. Ruta HR-43472 kao rješenje Christofides-ovog algoritma 85
Slika 28. Ruta HR-43882 kao rješenje CW-ovog algoritma 87
Slika 29. Ruta HR-43882 kao rješenje Christofides-ovog algoritma 90
Slika 30. Ruta HR-43881 kao rješenje CW-ovog algoritma 93
Slika 31. Ruta HR-43881 kao rješenje Christofides-ovog algoritma 98

Slika 32. Ruta HR-43344 kao rješenje CW-ovog algoritma 100
Slika 33. Ruta HR-43827 kao rješenje Christofides-ovog algoritma 104
Slika 34. Ruta HR-43827 kao rješenje CW-ovog algoritma 106
Slika 35. Ruta HR-43827 kao rješenje Christofides-ovog algoritma 110
Slika 36. Ruta HR-43761 kao rješenje CW-ovog algoritma 113
Slika 37. Ruta HR-43761 kao rješenje Christofides-ovog algoritma 118
Slika 38. Ruta HR-43365 kao rješenje CW-ovog algoritma (rok dostave 06.03.) 121
Slika 39. Ruta HR-43365 kao rješenje Christofides-ovog algoritma (rok dostave 06.03.) 125
Slika 40. Ruta HR-43365 kao rješenje CW-ovog algoritma (rok dostave 07.03) 127
Slika 41. Ruta HR-43365 kao rješenje Christofides-ovog algoritma (rok dostave 07.03.) 130
Slika 42. Ruta HR-43443 kao rješenje CW-ovog algoritma 132
Slika 43. Ruta HR-43443 kao rješenje Christofides-ovog algoritma 137
Slika 44. Ruta HR-43960 kao rješenje CW-ovog algoritma ušteda 140
Slika 45. Ruta HR-43960 kao rješenje Christofides-ovog algoritma 146

POPIS TABLICA

Tablica 1. Lista rangiranih ušteda prema veličini 22
Tablica 2. Podaci o ruti HR-43627 49
Tablica 3. Uštede za rutu HR-43627 prema redoslijedu vrhova 51
Tablica 4. Lista ušteda za rutu HR-43627 rangirana prema veličini 51
Tablica 5. Podaci o ruti HR-43689 69
Tablica 6. Uštede za rutu HR-43689 rangirane prema veličini 70
Tablica 7. Podaci o ruti HR-43753 75
Tablica 8. Uštede za rutu HR-43753 rangirane prema veličini 76
Tablica 9. Podaci o ruti HR-43472 80
Tablica 10. Uštede za rutu HR-43472 rangirane prema veličini 81
Tablica 11. Podaci o ruti HR-43882 86
Tablica 12. Uštede za rutu HR-43882 rangirane prema veličini 86
Tablica 13. Podaci o ruti HR-43881 91
Tablica 14. Uštede za rutu HR-43881 rangirane prema veličini 92
Tablica 15. Podaci o ruti HR-43344 99
Tablica 16. Uštede za rutu HR-43344 rangirane prema veličini 100
Tablica 17. Podaci o ruti HR-43827 104
Tablica 18. Uštede za rutu HR-43827 rangirane prema veličini 105
Tablica 19. Podaci za rutu HR-43761 111
Tablica 20. Uštede za rutu HR-43761 rangirane prema veličini 112
Tablica 21. Podaci za Rutu HR-43365 119
Tablica 22. Podaci o ruti HR-43365 za rok dostave 06.03. 119
Tablica 23. Uštede za rutu HR-43365 rangirane prema veličini (rok dostave 06.03) 120
Tablica 24. Podaci o ruti HR-43365 za rok dostave 07.03. 125
Tablica 25. Uštede za rutu HR-43365 rangirane prema veličini (rok dostave 07.03.) 126
Tablica 26. Podaci o ruti HR-43443 130
Tablica 27. Uštede za rutu HR-43443 rangirane prema veličini 131
Tablica 28. Podaci za rutu HR-43960 138
Tablica 29. Uštede za rutu HR-43960 rangirane prema veličini 139
Tablica 30. Rezultati najkraćeg puta prema matematičkim metodama 148
Tablica 31. Usporedba rješenja OptiMap-a i matematičkih metoda 151

Tablica 32. Troškovi distribucije prema najmu vozila 154
Tablica 33.Troškovi distribucije po paletnom mjestu 155
Tablica 34. Usporedba troškova i ušteda 156

POPIS GRAFIKONA

Grafikon 1. Odnos troškova neposredne i posredne distribucije 6
Grafikon 2. Složenost problema trgovačkog putnika 32
Grafikon 3. Odnos rješenja matematičkih metoda 150
Grafikon 4. Odnos rješenja OptiMap-a i matematičkih metoda 152

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet prometnih znanosti
10000 Zagreb
Vukelićeva 4

IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI I SUGLASNOST

Izjavljujem i svojim potpisom potvrđujem kako je ovaj diplomski rad isključivo rezultat mog vlastitog rada koji se temelji na mojim istraživanjima i oslanja se na objavljenu literaturu što pokazuju korištene bilješke i bibliografija.

Izjavljujem kako nijedan dio rada nije napisan na nedozvoljen način, niti je prepisan iz necitiranog rada, te nijedan dio rada ne krši bilo čija autorska prava.

Izjavljujem također, kako nijedan dio rada nije iskorišten za bilo koji drugi rad u bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili obrazovnoj ustanovi.

Svojim potpisom potvrđujem i dajem suglasnost za javnu objavu diplomskog rada pod naslovom **Optimizacija distribucijske mreže primjenom matematičkih metoda**

na internetskim stranicama i repozitoriju Fakulteta prometnih znanosti, Digitalnom akademskom repozitoriju (DAR) pri Nacionalnoj i sveučilišnoj knjižnici u Zagrebu.

U Zagrebu, 08.05.2018.

Student/ica:

(potpis)

166