

# Aerodinamičke karakteristike strujanja plina kroz nadzvučnu mlaznicu

---

Cvek Šekuljica, Ian

Master's thesis / Diplomski rad

2022

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Transport and Traffic Sciences / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:119:048982>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-08-01**



*Repository / Repozitorij:*

[Faculty of Transport and Traffic Sciences - Institutional Repository](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**FAKULTET PROMETNIH ZNANOSTI**

**Ian Cvek Šekuljica**

**AERODINAMIČKE KARAKTERISTIKE STRUJANJA  
PLINA KROZ NADZVUČNU MLAZNICU**

**DIPLOMSKI RAD**

Zagreb, 2022.

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**FAKULTET PROMETNIH ZNANOSTI**  
**POVJERENSTVO ZA DIPLOMSKI ISPIT**

Zagreb, 4. svibnja 2022.

Zavod: **Zavod za aeronautiku**  
Predmet: **Teorija leta III**

DIPLOMSKI ZADATAK br. 6789

Pristupnik: **Ian Cvek Šekuljica (0135248510)**  
Studij: **Aeronautika**

Zadatak: **Aerodinamičke karakteristike strujanja plina kroz nadzvučnu mlaznicu**

Opis zadatka:

U radu je potrebno objasniti primjenu računalne dinamike fluida za određivanje karakteristika nadzvučne struje zraka. Na primjeru ranije dizajnirane nadzvučne mlaznice, metodama računalne dinamike fluida izračunati njezine karakteristike za različite uvjete strujanja. Dobivene rezultate potrebno je validirati pomoću metode karakteristika, te eventualne razlike komentirati i dati zaključke.

Mentor:

Predsjednik povjerenstva za  
diplomski ispit:



---

doc. dr. sc. Karolina Krajček Nikolić

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**FAKULTET PROMETNIH ZNANOSTI**

**DIPLOMSKI RAD**

**AERODINAMIČKE KARAKTERISRIKE STRUJANJA**  
**PLINA KROZ NADZVUČNU MLAZNICU**

**AERODYNAMIC CHARACTERISTICS OF GAS FLOW**  
**THROUGH A SUPERSONIC NOZZLE**

Mentor: doc. dr. sc. Karolina Krajček Nikolić

Student: Ian Cvek Šekuljica

JMBAG: 0135248510

Zagreb, rujan 2022.

## SAŽETAK

Za ubrzanje struje fluida sa podzvučne na nadzvučnu brzinu koristi se konvergentno-divergentna mlaznica. Takve vrste mlaznica prisutne su u raketnim motorima ili motorima nadzvučnih vojnih mlaznih zrakoplova. Definirano je i opisano kvazi-jednodimenzionalno strujanje koje je pogodno za razmatranje karakteristika strujanja kroz nadzvučnu mlaznicu i nadzvučne difuzore. Nakon definiranja osnova strujanja fluida kroz nadzvučnu mlaznicu i difuzor, definiran je model nadzvučne mlaznice korišten pri CFD analizi aerodinamičkih karakteristika strujanja plina. Dizajn nadzvučne mlaznice opisan je metodom karakteristika. Također, metoda karakteristika je opisana ukratko kao odličan alat pri izračunu kontura zidova nadzvučne mlaznice. Mlaznica koja je dizajnirana i korištena u radu spada pod vrstu mlaznica minimalnih duljina. Za kraj prikazani su rezultati CFD analiza strujanja u slučaju viskoznog i neviskoznog strujanja. Pojava graničnog sloja se lijepo vidi pri viskoznom strujanju, te porast temperature u blizini zidova mlaznica uslijed pojave trenja. Prikazan je i slučaj pojave normalnog udarnog vala unutar mlaznice. Rezultati su validirani pomoću metode karakteristika.

KLJUČNE RIJEČI: nadzvučna mlaznica; stlačivost; CFD; granični sloj; viskoznost

## SUMMARY

A convergent-divergent nozzle is used to accelerate the fluid flow from subsonic to supersonic speeds. Such types of nozzles are present in rocket engines or supersonic military jet aircraft. A quasi-one-dimensional flow is defined and described, which is convenient for considering the characteristics of flow through a supersonic nozzle and supersonic diffusers. After defining the basis of the fluid flow through the supersonic nozzle and the diffuser, the model of the supersonic nozzle used in the CFD analysis of the aerodynamic characteristics of the gas flow was defined. The design of the supersonic nozzle is described by the method of characteristics. Also, the method of characteristics is briefly described as an excellent tool for calculating the contours of supersonic nozzle walls. The nozzle that was designed and used in the work belongs to the category of minimum length nozzles. Finally, the results of the CFD flow analysis in the case of viscous and non-viscous flow are presented. The appearance of the boundary layer is visible during viscous flow, and the increase in temperature near the walls of the nozzles due to the appearance of friction.. Results are validated by the method of characteristics.

KEY WORDS: supersonic nozzle; compressibility; computational fluid dynamics; boundary layer; viscosity

# SADRŽAJ

|  |    |
|--|----|
| 1. UVOD.....   | 1  |
| 2. STLAČIVO STRUJANJE .....  | 3  |
| 2.1. UNUTARNJA ENERGIJA, ENTALPIJA I PRVI ZAKON TERMODINAMIKE ....         | 3  |
| 2.2. ENTROPIJA I DRUGI ZAKON TERMODINAMIKE.....                            | 5  |
| 2.3. IZENTROPSKE RELACIJE .....  | 6  |
| 2.4. DEFINICIJA STLAČIVOSTI I MACHOVOG BROJA .....                         | 7  |
| 3. STLAČIVO STRUJANJE KROZ MLAZNICE I DIFUZORE.....                        | 10 |
| 3.1. KVAZI-JEDNODIMENZIONALNO STRUJANJE .....                              | 10 |
| 3.2. STRUJANJE KROZ MLAZNICE.....  | 16 |
| 3.3. STRUJANJE KROZ DIFUZORE.....  | 25 |
| 4. VISKOZNO STRUJANJE .....  | 27 |
| 4.1. UTJECAJ VISKOZNOSTI .....   | 27 |
| 4.2. UTJECAJ TOPLINSKE VODLJIVOSTI .....                                   | 30 |
| 4.3. PRIJELAZ SA LAMINARNOG U TURBULENTNO STRUJANJE.....                   | 31 |
| 4.4. REYNOLDSOV BROJ .....   | 32 |
| 5. DIZAJN NADZVUČNE MLAZNICE.....  | 33 |
| 6. ANALIZA CFD SIMULACIJA STRUJANJA .....                                  | 40 |
| 6.1. GEOMETRIJA NADZVUČNE MLAZNICE.....                                    | 40 |
| 6.2. GENERIRANJE MREŽE ZA ANALIZU NEVISKOZNOG STRUJANJA .....              | 42 |
| 6.3. ANALIZA NEVISKOZNOG STRUJANJA KROZ NADZVUČNU MLAZNICU .45             |    |
| 6.4. GENERIRANJE MREŽE I ANALIZA VISKOZNOG STRUJANJA KROZ<br>MLAZNICU..... | 50 |
| 6.5. ANALIZA POD EKSPANDIRANE I PRE EKSPANDIRANE MLAZNICE .....            | 56 |
| 7. ZAKLJUČAK .....   | 58 |
| LITERATURA.....  | 59 |
| POPIS SLIKA .....  | 60 |
| POPIS TABLICA.....   | 62 |

# 1. UVOD

Konvergentno-divergentna mlaznica koristi se za ubrzanje strujanja fluida sa podzvučnih na nadzvučne brzine. One su prisutne kod raketnih motora, kao i mlaznih motora vojnih zrakoplova. Također, konvergentno-divergentni kanali koriste se i u zračnim tunelima za razna razna testiranja tijekom razvoja proizvoda.

U ovome radu definirani su bitni pojmovi i pojave, koji i koje se pojavljuju pri nadzvučnom strujanju fluida, kao i kod ubrzavanja struje podzvučnih brzina. Analizirano je strujanje kroz nadzvučne mlaznice i difuzore. Također, odabrani model nadzvučne mlaznice obrađen je u programu Ansys Fluent. Metodama računalne dinamike fluida (*CFD*) su analizirane karakteristike strujanja fluida kroz odabrani model nadzvučne mlaznice. Cilj diplomskog rada jest usporediti karakteristike strujanja fluida kroz nadzvučnu mlaznicu pri neviskoznom strujanju i pri viskoznom strujanju. Vizualizirati rezultate u navedenom programu, kao i grafički prikazati određene zanimljive parametre. Naslov diplomskog rada je: Aerodinamičke karakteristike strujanja plina kroz nadzvučnu mlaznicu. Rad je podijeljen u sedam cjelina:

1. Uvod
2. Stlačivo strujanje
3. Stlačivo strujanje kroz mlaznice i difuzore
4. Viskozno strujanje
5. Dizajn nadzvučne mlaznice
6. Analiza CFD simulacija strujanja
7. Zaključak

U drugom poglavlju definiran je pojam stlačivosti, te neke vrste stlačivosti koje se javljaju ovisno od uvjeta. Također, definirani su pojmovi entalpije, entropije i zakoni termodinamike. Uz sve to, definiran je Machov broj i veza između određivanja stlačivosti fluida i Machovog broja, odnosno brzine.

Kvazi-jednodimenzionalno strujanje je prvo objašnjeno u trećem poglavlju kao najjednostavniji model strujanja kroz mlaznice i difuzore. Nadalje, analizirane su karakteristike strujanja kroz nadzvučne mlaznice i difuzore.

Četvrto poglavlje obuhvaća viskozno strujanje, odnosno efekte toplinske vodljivosti, trenja i pojave graničnog sloja pri viskoznom strujanju. Dodatno je objašnjeno laminarno i turbulentno strujanje kao i Reynoldsov broj pri određivanju vrste strujanja.

Peto poglavlje govori o dizajnu nadzvučne mlaznice, na koji se način dizajnira konvergentni, a na koji način divergentni dio nadzvučne mlaznice. Također, navedeni su uvjeti koji pogoduju što boljoj ekspanziji plina u divergentnom dijelu mlaznice.

U šestom poglavlju detaljno su opisani koraci i priprema modela nadzvučne mlaznice za CFD analizu. Posebno je pojašnjeno generiranje mreže u neviskoznom i viskoznom slučaju strujanja kroz mlaznicu, te su prikazane karakteristike strujanja za oba slučaja. Na kraju su analizirane razlike i sličnosti u oba slučaja, sve analize su popraćene sa vizualizacijama i grafičkim prikazima.

U zaključku kao posljednjem poglavlju ovoga rada sažete su najbitnije teze diplomskog rada. Dan je osvrt na uspoređene karakteristike strujanja u slučajevima koji su bili simulirani.



## 2. STLAČIVO STRUJANJE

Davne 1935. godine, vodeći stručnjaci za aerodinamiku sa svih strana svijeta skupili su se u Rimu na konferenciji gdje je glavna tema bila „Velike Brzine u Avijaciji“. Iako tada još uvijek mlazni motori nisu bili dovoljno razvijeni, ti ljudi su bili uvjereni da će budućnost avijacije biti „brže i više“. Znanstvenici koji su pristupili konferenciji bili su sigurni da će razuvjeriti neke od inženjera koji su bili sigurni da zrakoplovi nikad neće letjeti brže od brzine zvuka, odnosno da će razbiti mit „zvučne barijere“. Individualci su prezentirali radove koji se bave letom na visokim podzvučnim, nadzvučnim, čak i hiperzvučnim brzinama. Puno diskusija se baziralo na utjecaj stlačivosti visokih podzvučnih brzina, odnosno utjecaji promjene gustoće, kao prvi problem koji će biti prisutan kod budućih zrakoplova velikih brzina. Strujanje fluida na velikim brzinama u kojima je gustoća promjenjiva naziva se stlačivim strujanjem [1] [2].

### 2.1. UNUTARNJA ENERGIJA, ENTALPIJA I PRVI ZAKON TERMODINAMIKE

Promatra se molekula plina, na primjer molekula kisika u zraku. Ova molekula se kreće kroz prostor, ponekad i sudara sa susjednim molekulama. Zbog brzine kroz prostor koju posjeduje, molekula ima translacijsku kinetičku energiju. Energija promatrane molekule je suma njene translacijske, rotacijske, vibracijske i elektronske energije. Nadalje, promatra se konačni volumen plina koji se sastoji od velikog broja molekula. Suma energija svih molekula u tom volumenu se definira kao unutarnja energija plina. Unutarnja energija po jedinici mase plina definira se kao specifična unutarnja energija, označena sa  $e$ . Povezana veličina je specifična entalpija, označena sa  $h$  i definirana kao

$$h = e + pv \quad (1)$$

Za savršeni plin,  $e$  i  $h$  su jedino funkcije temperature. Neka  $de$  i  $dh$  predstavljaju diferencijale od  $e$  i  $h$ . Vrijedi za savršeni plin,

$$de = c_v T \quad (2)$$

$$dh = c_p T \quad (3)$$

gdje su  $c_v$  i  $c_p$  specifične topline pri konstantnom volumenu i konstantnom tlaku. Savršeni plin gdje su specifične topline konstantne definira se kao kalorijski savršeni plin, pa onda jednadžbe (2) i (3) postaju

$$e = c_v T \quad (4)$$

$$h = c_p T \quad (5)$$

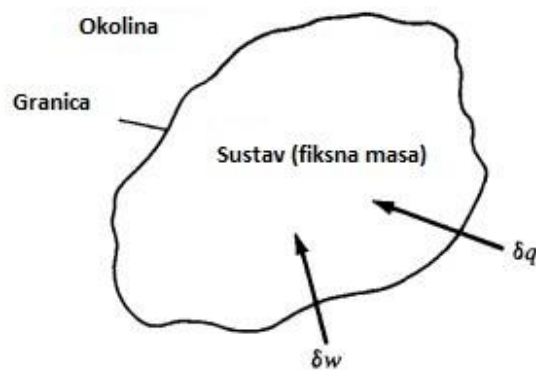
Za veliki broj praktičnih stlačivih problema strujanja plina, temperature su umjerene, iz tog razloga se plin u ovim slučajevima tretira kao kalorijski savršen, odnosno pretpostavlja se da su specifične topline konstantne.

Promatra se fiksna masa plina, koja je definirana kao sustav. Područje izvan sustava naziva se okolina. Sučelje između sustava i okoline naziva se granica, kako je prikazano na Slici 1. Pretpostavka je da je sustav stacionaran. Neka je  $\delta_q$  inkrement dodane topline sustavu preko granice. Također, neka je  $\delta_w$  izvršen rad na sustavu od strane okoline. Zbog molekularnog kretanja čestica plina, sustav ima unutarnju energiju  $e$ . Dodana toplina i izvršeni rad na sustavu uzrokuju promjenu energije, a kako je sustav stacionaran ova promjena u energiji je jednostavno  $de$ :

$$\delta_q + \delta_w = de \quad (6)$$

Ovo je Prvi zakon termodinamike. To je empirijski rezultat potvrđen iz iskustva. U jednadžbi (6)  $de$  predstavlja egzaktni diferencijal, te njegova vrijednost ovisi samo o inicijalnom i završnom stanju sustava. Sa druge strane,  $\delta_q$  i  $\delta_w$  ovise o procesu koji polazi od početne do završne faze. Za dani  $de$ , postoji beskonačan broj različitih načina na koji toplina može biti dodana i rad može biti izvršen na promatranom sustavu. Najčešće se razmatraju ova tri načina:

1. *Adijabatski proces*. Onaj proces u kojem toplina nije niti dodana niti oduzeta od sustava
2. *Reverzibilan proces*. Onaj u kojem nema disipacije, odnosno gdje nema utjecaja viskoznosti, termalne vodljivosti, i difuzije mase
3. *Izentropski proces*. Onaj koji je ujedno i adijabatski i reverzibilan [1].



Slika 1. Termodinamički sustav, [1]

## 2.2. ENTROPIJA I DRUGI ZAKON TERMODINAMIKE

Razmatra se komad leda u dodiru sa toplim željezom. Iskustveno može se reći da će se led zagrijati (vjerojatno otopiti) i željezo će se rashladiti. Međutim, jednadžba (7) ne tumači da će se svakako to dogoditi. Uistinu, prvi zakon dozvoljava da led može postajati hladniji, a željezo toplije, sve dok je energija očuvana tijekom procesa. Svakako, u stvarnom životu ovo se ne događa. Umjesto toga, priroda nameće drugo stanje procesa, stanje koje govori u kojem smjeru će se proces odvijati. Kako bi se ispravno utvrdio smjer odvijanja procesa, definira se novo stanje, entropija:

$$ds = \frac{\delta q_{rev}}{T} \quad (7)$$

gdje je  $s$  entropija sustava,  $\delta q_{rev}$  je inkrementalan iznos reverzibilno dodane topline sustavu, a  $T$  je temperatura sustava. Alternativna i možda preglednija relacija je

$$ds = \frac{\delta q}{T} + ds_{irrev} \quad (8)$$

U jednadžbi (8),  $\delta q$  je stvarna količina dodane topline sustavu tijekom stvarnog ireverzibilnog procesa, a  $ds_{irrev}$  je generiranje entropije zbog ireverzibilnog, disipativne pojave viskoznosti, termalne provodljivosti, i difuzije mase koja se pojavljuje unutar sustava. Pojava disipacije uvijek povećava entropiju:

$$ds_{irrev} \geq 0 \quad (9)$$

U jednadžbi (9) znak jednakosti označava reverzibilan proces, gdje po definiciji disipativne pojave nema unutar sustava. Kombinacijom jednadžbi (8) i (9) dobiva se

$$ds \geq \frac{\delta q}{T} \quad (10)$$

Nadalje, ako je proces adijabatski, odnosno  $\delta q = 0$ , jednadžba (10) postaje

$$ds \geq 0 \quad (11)$$

Jednadžbe (10) i (11) su oblici Drugog zakona termodinamike. Drugi zakon termodinamike govori u kojem će se smjeru proces odvijati. Proces se odvija u smjeru u kojem se entropija sustava i okoline uvijek povećava, ili u najboljem slučaju, ostaje ista. U primjeru leda i vrućeg željeza, simultano zagrijavanje leda i hlađenje željeza prinosi neto povećanju entropije sustava. Sa druge strane, nemoguća situacija gdje se led sve više hladi, a željezo grije, bi prineslo neto smanjenju entropije sustava, pojava koja je zabranjena drugim zakonom termodinamike. Zaključno, koncept entropije u kombinaciji sa drugim zakonom termodinamike omogućuje predviđanje smjera odvijanja procesa u prirodi [1] [2].

### 2.3. IZENTROPSKE RELACIJE

Izentropski proces je ranije u radu definiran kao onaj proces koji je ujedno adijabatski i reverzibilan. Razmatra se jednadžba (8). Za adijabatski proces,  $\delta q = 0$ . Također, za reverzibilan proces,  $ds_{irrev} = 0$ . Prema tome, za adijabatski, reverzibilan proces, jednadžba (8) prinosi  $ds = 0$ , ili konstantnu entropiju, stoga riječ izentropski.

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\gamma = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (12)$$

Jednadžba (12) je vrlo važna, povezuje tlak, gustoću, i temperaturu izentropskog procesa, ona je važna izentropskom procesu koji je ograničavajući te zahtjeva ujedno adijabatske i reverzibilne uvjete zbog činjenice da je veliki broj problema praktičnih stlačivih strujanja, zapravo izentropsko. Na primjer, razmatra se strujanje preko aeroprofila, ili kroz raketni motor. U susjednim dijelovima površine aeroprofila i zida mlaznice rakete, granični sloj se formira pri čemu disipativni mehanizmi viskoznosti, termalne provodljivosti, i difuzije su vrlo izraženi. Stoga, dolazi do povećanje entropije u tim graničnim slojevima. Ovdje disipativni efekti

viskoznosti, i slično, su jako mali i mogu biti zanemareni. Nadalje, nema prenesene topline prema ili sa elementa fluida, tako da je strujanje izvan graničnog sloja adijabatsko. Posljedično tome, elementi fluida izvan graničnog sloja prolaze kroz adijabatsko reverzibilan proces, odnosno izentropsko strujanje. Viskozni granični sloj susjednim površinama je vrlo tanak ako se uspoređi sa cijelim poljem strujanja fluida, stoga veliki dijelovi strujanja se mogu smatrati izentropski. Zbog toga je studija izentropskog strujanja direktno povezana sa puno praktičnih stlačivih problema strujanja [1] [2].

#### 2.4. DEFINICIJA STLAČIVOSTI I MACHOVOG BROJA

Sve prave tvari su stlačive u nekoj većoj ili manjoj mjeri, odnosno kada se one pritisnu, mijenja im se gustoća. Ovo je izrazito točno kada je riječ o plinovima, a puno manje nego kada je riječ o tekućinama ili nekim čvrstim tvarima. Količina za koju tvar može biti komprimirana opisano je određenim svojstvom koje se naziva stlačivost. Razmatra se mali element fluida nekoga volumena  $v$ , kako je prikazano na Slici 2. Izvršeni pritisak na stranama elementa koji se promatra jest  $p$ . Nadalje, pretpostavlja se da se pritisak poveća za određenu vrijednost  $dp$ . Volumen promatranog elementa se mijenja za odgovarajuću vrijednost  $dv$ , ovdje dolazi do povećanja volumena, stoga  $dv$  prikazan na Slici 2. je negativne vrijednosti. Po definiciji, stlačivost  $\tau$  fluida jest

$$\tau = -\frac{1}{v} \frac{dv}{dp} \quad (13)$$

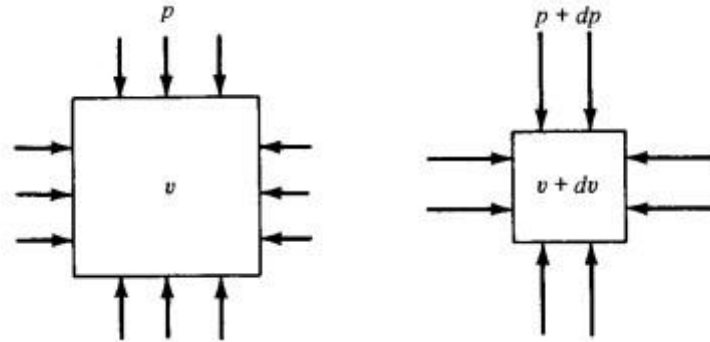
Fizički, stlačivost je frakcijska promjena u volumenu elementa fluida po jedinici promjene u tlaku. Svakako, jednadžba (13) nije potpuno točna. Iz iskustva je poznato da kada je plin stlačen, njegova temperatura se povećava, ovisno o količini prenesene topline u ili van plina preko granica sustava. Ako je temperatura elementa fluida prikazanog u Slici 2. održana konstantnom (zbog nekih toplinskih prijenosnih mehanizma), onda je  $\tau$  izotermalna stlačivost  $\tau_T$ , definirana iz jednadžbe (13) i glasi:

$$\tau_T = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \quad (14)$$

Sa druge strane, ako toplina nije dodana niti oduzeta od elementa fluida, uz to se zanemari i trenje, stlačivost elementa fluida odvija se izentropski, te je  $\tau$  onda izentropska stlačivost  $\tau_s$ , definirana iz jednadžbe (13) kao:

$$\tau_s = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_s \quad (15)$$

Gdje je indeks  $s$  označava da je parcijalna derivacija uzeta pri konstantnoj entropiji. Oboje  $\tau_s$  i  $\tau_T$  su precizna termodinamička svojstva fluida. Njihove vrijednosti za različite plinove ili tekućine mogu se dobiti iz različitih knjiga fizičkih svojstava. Općenito, stlačivost plinova je nekoliko redova veća nego ona od tekućina.



Slika 2. Definicija stlačivosti, [1]

Uloga stlačivosti  $\tau$  pri određivanju svojstva fluida u kretanju vidi se iz slijedećeg. Definiira se  $v$  kao specifični volumen. Stoga,  $v = 1/\rho$ . Zamjena ove definicije u jednadžbu (13) slijedi

$$\tau = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \quad (16)$$

Prema tome, kada god fluid iskusi promjenu tlaka  $dp$ , dogodi se odgovarajuća promjena u gustoći  $d\rho$  iz jednadžbe (16) slijedi da je

$$d\rho = \rho\tau dp \quad (17)$$

Razmatra se strujanje fluida, na primjer, strujanje fluida preko aeroprofila. Ako je fluid tekućina, gdje je stlačivost  $\tau$  vrlo mala vrijednost, onda za određenu promjenu u tlaku  $dp$  od jedne točke do druge u strujanju, jednadžba (17) govori da će  $d\rho$  biti zanemarivo mala. Zauzvrat, može se pretpostaviti da je  $\rho$  konstantna te da je strujanje tekućine nestlačivo. Sa druge strane, ako je fluid plin, gdje je stlačivost  $\tau$  velika vrijednost, onda je za promatranu promjenu tlaka  $dp$  od jedne točke do druge u strujanju, jednadžba (17) govori da će  $d\rho$  biti znatna. Stoga,  $\rho$  nije konstantna, pa je uobičajeno strujanje plina stlačivo strujanje.

Nadalje, biti će demonstrirano kako je najjednostavnije zaključiti je li se strujanje plina smatra nestlačivim, ili se ono tretira kao stlačivo strujanje. Veličina preko koje se najjednostavnije

određuje stlačivost strujanja plina jest Machov broj  $M$ , definiran kao omjer lokalne brzine strujanja fluida  $V$  i lokalne brzine zvuka  $a$ :

$$M \equiv \frac{V}{a} \quad (18)$$

Dakle, kada je  $M > 0.3$ , strujanje bi se trebalo smatrati stlačivim. Također, pokazano je da je brzina zvuka u plinu povezana sa izentropskom stlačivosti  $\tau_s$ , definirana u jednadžbi (15) [1] [2].

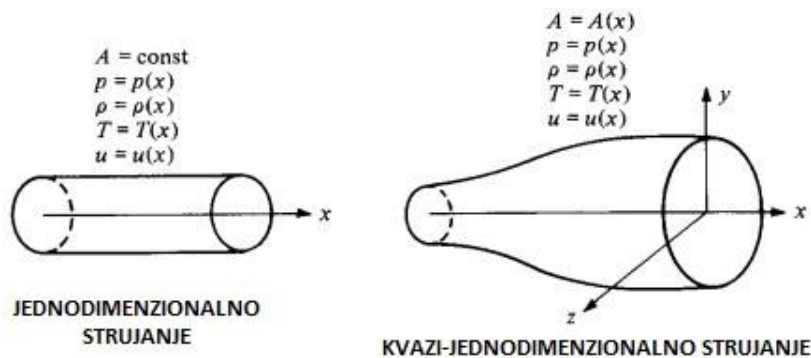
### 3. STLAČIVO STRUJANJE KROZ MLAZNICE I DIFUZORE

Ovo poglavlje govori o aerodinamičkim osnovama stlačivog strujanja plina kroz cijevi. Takve osnove su od iznimne važnosti za ispravan i kvalitetan dizajn tunela velikih brzina, raketnih motora, mlaznih motora, i slično. U prvom djelu govorit će se o kvazi-jednodimenzionalnom strujanju i povezanim jednadžbama za isto, zatim će naglasak biti na stlačivo strujanje kroz mlaznice, dok će ukratko biti razrađena i dotaknuta tematika strujanja kroz difuzore [1] [2] [3].

#### 3.1. KVAZI-JEDNODIMENZIONALNO STRUJANJE

Razmatraju se varijable polja jednodimenzionalnog strujanja, varijable su funkcija jedino od  $x$ , odnosno,  $p = p(x)$ ,  $u = u(x)$ , itd. Strogo rečeno, protočna cijev za takvo strujanje mora imati konstantnu površinu, kao što je prikazano na Slici 3.

Suprotno tome, promatra se površina protočne cijevi koja se mijenja kao funkcija od  $x$ ,  $A = A(x)$ , kao što je prikazano na Slici 4. Strogo rečeno, ovakvo strujanje je trodimenzionalno, varijable polja strujanja su funkcije od  $x$ ,  $y$ , i  $z$ , kao što se vidi sa priložene Slike 4. Brzina na granici promatrane površine mora biti tangenta na tu granicu, kao i njene komponente  $u$  y i  $z$  smjerovima. Međutim, ako je varijacija površine umjerena, komponente  $u$  y i  $z$  osima su male u usporedbi sa komponentom  $u$   $x$  osi. U tom slučaju, može se pretpostaviti da varijable polja strujanja variraju samo sa  $x$ . Takvo strujanje gdje,  $A = A(x)$ , ali  $p = p(x)$ ,  $\rho = \rho(x)$ ,  $u = u(x)$  itd., je definirano kao *kvazi-jednodimenzionalno strujanje*.



Slika 3. Jednodimenzionalno i kvazi-jednodimenzionalno strujanje, [1]



Iako je pretpostavka kvazi-jednodimenzionalnog strujanja aproksimacija stvarnom strujanju u kanalu varijabilne površine, integralni oblici konzervativnih jednažbi, jednažba kontinuiteta, momenta, i jednažba energije, mogu biti uzete kako bi se opisalo kvazi-jednodimenzionalno strujanje. Razmatra se kontrolni volumen koji je prikazan na Slici 4. Na položaju 1, strujanje kroz površinu  $A_1$  pretpostavlja se da je jednoliko sa svojstvima  $p_1, \rho_1, u_1$  itd. Na sličan način, na položaju 2, strujanje kroz površinu  $A_2$ , pretpostavlja se da je jednoliko sa svojstvima,  $p_2, \rho_2, u_2$  itd. Zatim, konačna jednažba za stalno kvazi-jednodimenzionalno strujanje glasi:

$$\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2 \quad (19)$$

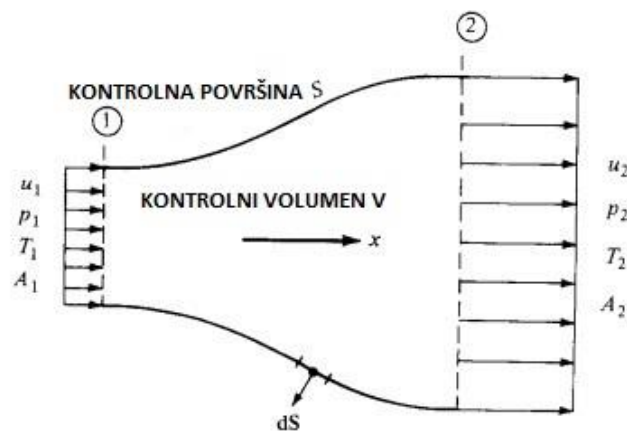
Razmatra se integralni oblik jednažbe momenta, koja za jednoliko, nevaskozno strujanje bez sila tijela glasi

$$\iint_S (\rho V \cdot dS) V = - \iint_S \rho dS \quad (20)$$

Kako je jednažba (20) vektorska jednažba, promatra se njena  $x$  komponenta:

$$\iint_S (\rho V \cdot dS) u = - \iint_S (\rho dS)_x \quad (21)$$

Gdje  $(\rho dS)_x$  označava  $x$  komponentu sile tlaka. Kako je jednažba (21) skalarnog oblika treba pripaziti sa  $x$  komponentama kada se razmatraju integrali površine. Sve komponente koje su usmjerene u desno, a prikazane na Slici 4. su pozitivne, a one koje su usmjerene u lijevo su negativne. Gornja i donja površina kontrolnog volumena su strujnice, stoga,  $V dS = 0$  duž tih površina. Također, treba se prisjetiti da preko  $A_1$ ,  $V$  i  $dS$  su u suprotnome smjeru, stoga,  $V dS$  je negativno. Dakle, integral sa lijeve strane jednažbe (21) postaje  $-\rho_1 u_1^2 A_1 + \rho_2 u_2 A_2$ . Interval tlaka sa desne strane jednažbe preko površina  $A_1$  i  $A_2$  kontrolnog volumena postaje  $-(p_1 A_1 + p_2 A_2)$ .



Slika 4. Konačni kontrolni volumen za kvazi-jednodimenzionalno strujanje, [1]

Integral tlaka promatran preko gornje i donje kontrolne površine može biti prikazan kao

$$-\int_{A_1}^{A_2} p dA = \int_{A_1}^{A_2} p dA \quad (22)$$

Gdje je  $dA$  jednostavno  $x$  komponenta od vektora  $dS$ , a to je površina  $dS$  projicirana na ravninu okomitu sa  $x$  osi. Negativan predznak unutar integrala sa lijeve strane jednadžbe (22) je zbog smjera  $dS$  uz gornju i donju kontrolnu površinu. Valja primijetiti da je  $dS$  usmjeren u negativnom smjeru uzduž kontrolnih površina. Stoga,  $x$  komponenta od  $p dS$  je u lijevo usmjerena, samim time se u jednadžbi pojavljuje sa negativnim predznakom. Sa dobivenim rezultatima jednadžba (21) postaje

$$p_1 A_1 + \rho_1 u_1^2 A_1 + \int_{A_1}^{A_2} p dA = p_2 A_2 + \rho_2 u_2^2 A_2 \quad (23)$$

Jednadžba (23) je jednadžba momenta za ustaljeno, kvazi-jednodimenzionalno strujanje. Jednadžba energije za neviskozno, adijabatsko, ustaljeno strujanje bez sila tijela glasi:

$$\iint_S \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) V \cdot dS = - \iint_S p V \cdot dS \quad (24)$$

Ukoliko vrijedi da je  $h = e + pv = e + p/\rho$  onda imamo jednadžbu energije za ustaljeno, adijabatsko, neviskozno kvazi-jednodimenzionalno strujanje. A ona glasi:

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (25)$$

Dakle, jednadžba (25) navodi da je totalna entalpija,  $h_0 = h + u^2/2$ , konstantna kroz kompletno strujanje. Jednadžba (25) je još jedan općeniti primjer i rezultat za jednoliko, neviskozno, adijabatsko strujanje. Stoga, jednadžba (25) se može zamijeniti sa

$$h_0 = const \quad (26)$$

Razmatraju se dobiveni rezultati, primijenjeni su integralni oblici konzervativnih jednadžbi kontrolnog volumena koji je prikazan na Slici 4. Kao rezultat dobivene su jednadžbe (19), (23) te (25) i (26) kao jednadžbe kontinuiteta, momenta, i jednadžbe energije, za kvazi-jednodimenzionalno strujanje. U Slici 4. razmatraju se ulazni uvjeti  $\rho_1$ ,  $u_1$ ,  $p_1$ ,  $T_1$  i  $h_1$  i prezentirana je raspodjela površine kao  $A = A(x)$ . Također pretpostavlja se kalorijski savršen plin gdje vrijedi

$$p_2 = \rho_2 R T_2 \quad (27)$$

$$h_2 = c_p T_2 \quad (28)$$

Jednadžbe (19), (23), (25), (26), (27) i (28) sačinjavaju pet jednadžbi sa pet nepoznanica  $\rho_2$ ,  $u_2$ ,  $p_2$ ,  $T_2$ , i  $h_2$ . U principu ove jednadžbe bi se mogle riješiti za nepoznate vrijednosti na poziciji 2 prikazanoj na Slici 4. Prije samih rješenja svih jednadžbi valja obratiti pažnju i na fizikalne karakteristike kvazi-jednodimenzionalnog strujanja. Razmatra se jednadžba (19) koja govori da

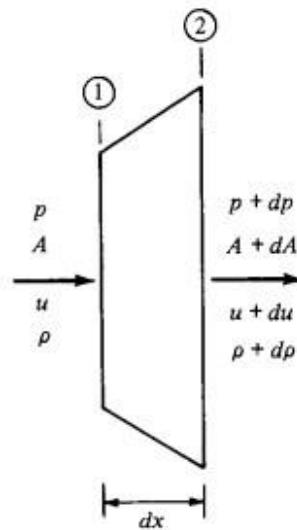
$$\rho u A = \text{const} \quad (29)$$

Kroz grlo promjenjive površine. Razlikujući jednadžbu (29) dobiva se

$$d(\rho u A) = 0 \quad (30)$$

što je diferencijalan oblik jednadžbe kontinuiteta za kvazi-jednodimenzionalno strujanje.

Kako bi se dobio diferencijalan oblik jednadžbe momenta, aplicira se jednadžba (23) do inkrementalnog kontrolnog volumena koji je prikazan na Slici 5.



Slika 5. Inkrementalni kontrolni volumen, [1]

Strujanje koje ulazi na stanici 1, gdje površina  $A$ , ima svojstva  $p$ ,  $u$ , i  $\rho$ . U prelaženju duljine  $dx$ , gdje se površina mijenja sa  $dA$ , svojstva strujanja se mijenjaju za određene iznose  $dp$ ,  $d\rho$ , i  $du$ . Stoga, strujanje koje prolazi kroz stanicu 2 ima svojstva  $p + dp$ ,  $u + du$  i  $\rho + d\rho$ .

$$dp = -\rho u du \quad (31)$$

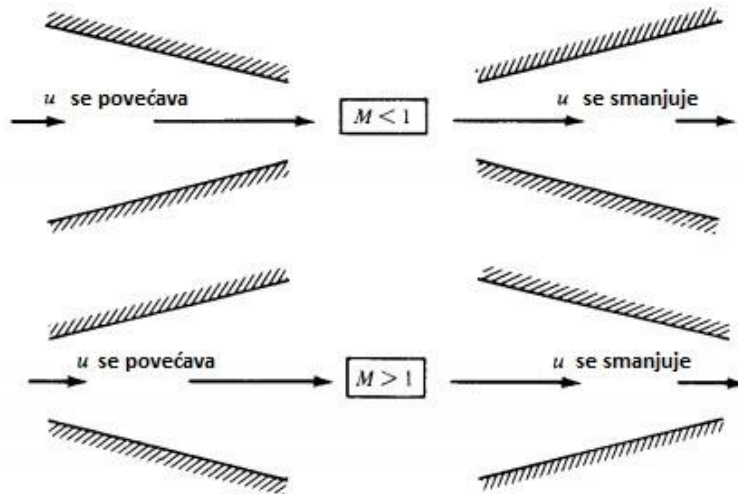
Je diferencijalni oblik jednadžbe momenta za jednoliko, neviskozno, kvazi-jednodimenzionalno strujanje. Jednadžba (31) se naziva *Eulerova jednadžba*.

Nadalje, cilj je dobiti jednadžbu koja povezuje promjenu brzine  $du$  sa promjenom površine  $dA$ . Treba imati na umu da je riječ o neviskoznom, adijabatskom strujanju. Štoviše, pretpostavlja se da u strujanju nema udarnih valova, te su oni isključeni u razmatranju. Stoga, strujanje je izentropsko.

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{du}{u} \quad (32)$$

Jednadžba (32) je željena jednadžba koja povezuje promjenu brzine sa promjenom površine, naziva se *odnos površine i brzine*. Jednadžba (32) je jako važna, na primjer, pozitivan iznos  $du$  sugerira *povećanje brzine*, a negativan iznos  $du$  sugerira  *smanjenje brzine*. Stoga, jednadžba (32) govori slijedeće:

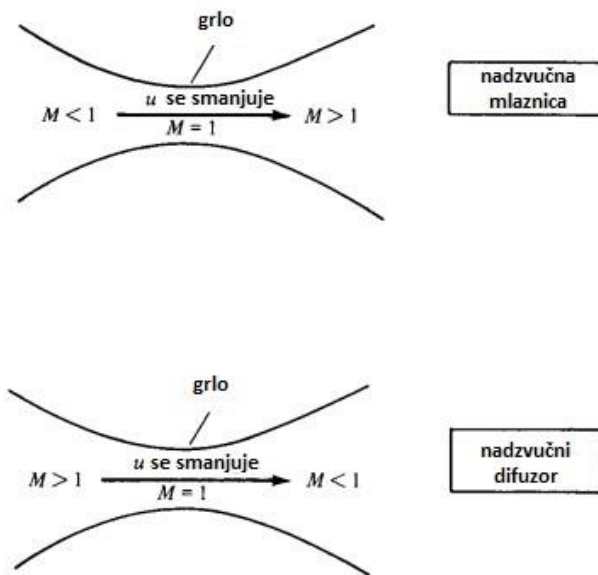
1. Za  $0 \leq M < 1$  (podzvučno strujanje), vrijednost u zagradama jednadžbe (32) je negativan. Onda je *povećanje* brzine (pozitivan  $du$ ) povezano sa  *smanjenjem* površine (negativan  $dA$ ). Shodno tome, smanjenje brzine (negativan  $du$ ) je povezano sa povećanjem površine (pozitivan  $dA$ ). Logično je da za podzvučno stlačivo strujanje za povećanje brzine potrebno je imati konvergentni kanal, a za smanjiti brzinu potrebno je imati divergentni kanal. Prethodno navedeno je ilustrirano na Slici 6.
2. Za  $M > 1$  (nadzvučno strujanje), vrijednost u zagradama jednadžbe (32) je pozitivno. Stoga, *povećanje* brzine (pozitivan  $du$ ) je povezano sa povećanjem površine (pozitivan  $dA$ ). Shodno tome, smanjenje brzine (negativan  $du$ ) je povezano sa smanjenjem površine (negativan  $dA$ ). Kod nadzvučnog strujanja za povećanje brzine potrebno je imati divergentni kanal, a za smanjenje brzine potrebno je imati konvergentni kanal. Također ovi rezultati su prikazani na Slici 6. Rezultati pod ovom točkom su direktno obrnuti od trendova za podzvučno strujanje.
3. Za  $M = 1$  (zvučno strujanje) jednadžba (32) pokazuje da je  $dA = 0$ , čak i ako postoji konačan  $du$ . Matematički, ovo odgovara lokalnom maksimumu ili minimumu u distribuciji površine. Fizički, to odgovara minimalnom presjeku površine.



Slika 6. Stlačivo strujanje u konvergentnom i divergentnom kanalu, [1]

Cilj je ubrzati plin u mirovanju izentropski do nadzvučne brzine. Prethodno navedeni rezultati sugeriraju na to da je prvo potrebno ubrzati plin podzvučno u konvergentnom kanalu. Međutim, čim su postignuti zvučni uvjeti, potrebno je ubrzati struju zraka nadzvučno, a to se čini divergentnim kanalom. Stoga, mlaznica koja je dizajnirana za nadzvučno strujanje plina na svojem izlazu je konvergentno-divergentna, kako je prikazano na Slici 7. Minimalna površina kanala naziva se grlo. Kada god izentropsko strujanje ubrzava od podzvučne do nadzvučne brzine, strujanje mora proći kroz grlo, štoviše, u tom slučaju je  $M = 1$  u grlu. Obrnuti slučaj je također postojan, ako se želi uzeti nadzvučna struja zraka te se usporiti na podzvučno strujanje, prvo je potrebno usporiti strujanje u konvergentnom kanalu, a onda se postižu zvučni uvjeti u grlu te nakon toga podzvučno strujanje se usporava dalje u divergentnom kanalu. U ovom slučaju, konvergentno-divergentni kanal na donjem prikazu Slike 7. služi kao difuzor. Valja primijetiti da kada je god izentropsko strujanje usporeno sa nadzvučne na podzvučnu brzinu, strujanje mora proći kroz grlo, štoviše, u tom slučaju  $M = 1$  u grlu.

Zaključno, razmatra se jednačba (32) u slučaju kada je  $M = 0$ . Onda je  $dA/A = -du/u$ , što se integrira u  $Au = \text{constant}$ . To je poznata jednačba kontinuiteta za nestlačivo strujanje [1] [3].

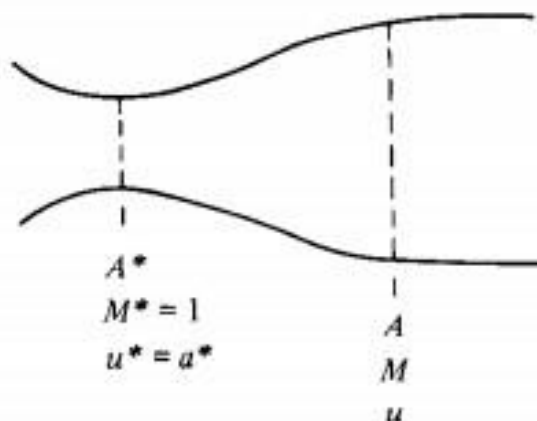


Slika 7. Ilustracija i usporedba nadzvučne mlaznice i nadzvučnog difuzora, [1]

### 3.2. STRUJANJE KROZ MLAZNICE

U ovom djelu govoriti će se detaljno o stlačivom strujanju kroz mlaznice. Kako bi se ubrzala ova analiza, potrebno je prvo definirati važnu jednadžbu koja povezuje Machov broj sa omjerom površine kanala i površine zvučnog grla.

Razmatra se kanal prikazan na Slici 8. Pretpostavlja se strujanje u grlu zvučno, gdje je površina  $A^*$ . Machov broj i brzina u grlu se označeni sa  $M^*$  i  $u^*$ . Kako je strujanje kroz grlo zvučno,  $M^* = 1$  te je  $u^* = a^*$ . U svakom drugom području, odnosno sekciji, Machov broj, površina kanala i brzina su označeni sa  $M$ ,  $A$  i  $u$ .



Slika 8. Geometrija za definiranje odnosa površine i Machovog broja, [1]

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \quad (33)$$

Jednadžba (33) je vrlo važna, naziva se *odnos površine i Machovog broja*, i sadržava bitan rezultat. „Okrenuta naopako“ jednadžba (33) govori da je  $M = f(A/A^*)$ , odnosno da je Machov broj na bilo kojoj lokaciji u kanalu funkcija odnosa površine grla i lokalne površine kanala. Valja se prisjetiti iz jednadžbe (25) da  $A$  mora biti veće ili barem jednako  $A^*$ , slučaj da je  $A < A^*$  je nemoguć za izentropsko strujanje. Stoga, u jednadžbi (33)  $A/A^* \geq 1$ . Također, jednadžba (33) donosi dva rješenja za  $M$  pri danim  $A/A^*$  podzvučnim iznosom i nadzvučnim iznosom. Koja vrijednost  $M$  vrijedi u datom slučaju ovisi o tlaku na ulazu i izlazu iz kanala, o tome nešto kasnije. Kada se govori o podzvučnom strujanju i vrijednostima  $M$ , kako se ono povećava,  $A/A^*$  se smanjuje (kanal konvergira). Kada je  $M = 1$ ,  $A/A^* = 1$ . Napokon, za nadzvučne vrijednosti  $M$ , kako se ono povećava,  $A/A^*$  se također povećava (kanal divergira).

Razmatra se konvergentno-divergentna mlaznica, kako je prikazano na Slici 9. Pretpostavka je da je odnos površina na ulazu  $A_i/A^*$  vrlo velik te da je strujanje na ulazu potaknuto iz vrlo velikog spremnika sa plinom, u kojem je plin stacionaran. Tlak spremnika i temperatura spremnika su  $p_0$  i  $T_0$ . Kako je  $A_i/A^*$  vrlo velikog iznosa, podzvučni Machov broj na ulazu je vrlo maloga iznosa,  $M \approx 0$ . Distribucija površine mlaznice je naznačena sa  $A = A(x)$ , tako da je vrijednost  $A/A^*$  poznata na svakom položaju uzduž mlaznice. Površina grla je naznačena sa  $A_t$ , a izlaza sa  $A_e$ . Machov broj i statički tlak na izlazu su označeni sa  $M_e$  i  $p_e$ . Pretpostavlja se da se radi o izentropskoj ekspanziji plina kroz mlaznicu do nadzvučnog Machovog broja  $M_e = M_{e,6}$  na izlazu. Odgovarajući tlak na izlazu je  $p_{e,6}$ . Za ovu ekspanziju, strujanje je zvučno u grlu, stoga,  $M = 1$ , a  $A_t = A^*$  u grlu. Karakteristike strujanja plina kroz mlaznicu su funkcija lokalnog odnosa  $A/A^*$  te se dobivaju na slijedeći način:

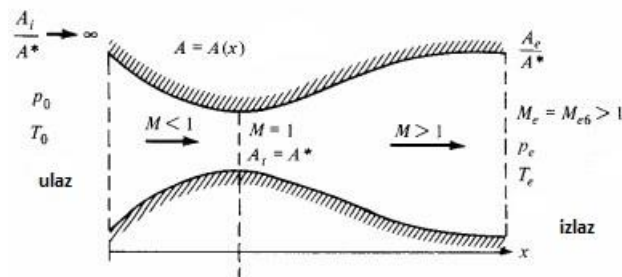
1. Lokalni Machov broj kao funkcija od  $x$  je dobiven iz jednadžbe (33), ili još direktnije iz tabličnih vrijednosti Dodatka A. Za određeni  $A = A(x)$ , poznato je  $A/A^* = f(x)$ . Zatim se očita srodni Machov broj za podzvučno strujanje u konvergentnom dijelu mlaznice iz prvog dijela Dodatka A (za  $M < 1$ ), a onda srodni nadzvučni Machov broj u divergentnom dijelu mlaznice iz drugog dijela Dodatka A (za  $M > 1$ ). Distribucija Machovog broja kroz cijelu mlaznicu je prikazana na Slici 10.

2. Kada je poznata distribucija Machovog broja, onda se iz jednažbi (34), (35) i (36) može pronaći odgovarajuća varijacija temperature, tlaka i gustoće. Distribucije  $p/p_0$  i  $T/T_0$  su prikazane redosljedom na Slici 11. i Slici 12.

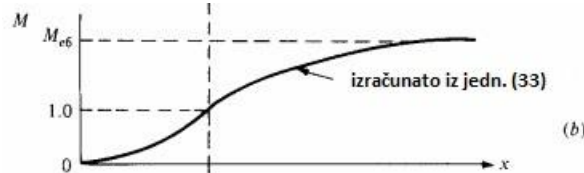
$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \quad (34)$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (35)$$

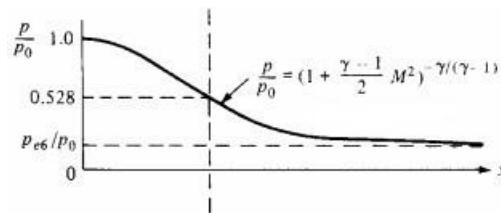
$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{1/(\gamma-1)} \quad (36)$$



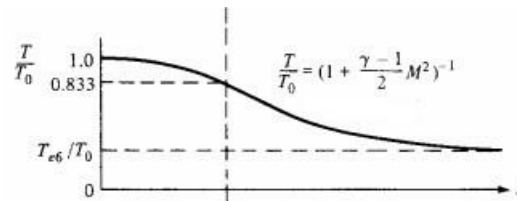
Slika 9. Konvergentno-divergentna mlaznica, [1]



Slika 10. Distribucija Machovog broja kroz mlaznicu, [1]



Slika 11. Distribucija tlaka kroz mlaznicu, [1]

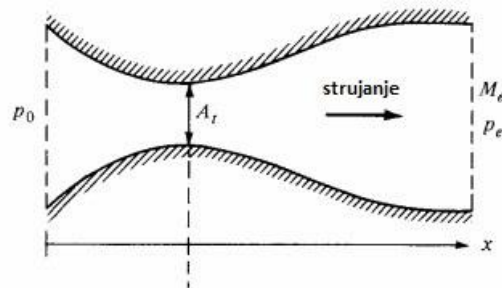


Slika 12. Distribucija temperature kroz mlaznicu, [1]

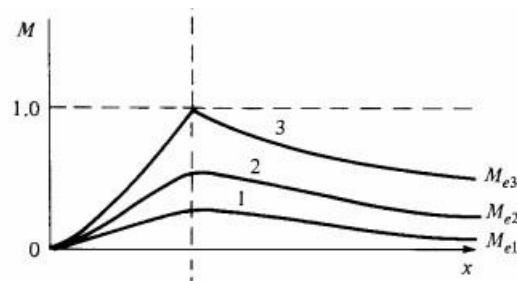


Iznad navedene jednadžbe omogućuju izračun karakteristika izentropskog strujanja plina. Razmatraju se varijacije prikazane na Slikama 9., 10., 11. i 12. Za izentropsku ekspanziju plina kroz konvergentno-divergentnu mlaznicu, Machov broj se monotono povećava od blizu 0 na ulazu do  $M = 1$  u grlu, te onda do nadzvučne vrijednosti  $M_{e,6}$  na izlazu. Tlak se monotono smanjuje od  $p_0$  na ulazu do  $0.528p_0$  u grlu te na izlazu poprima vrijednost  $p_{e,6}$ . Na sličan način, temperatura se monotono smanjuje od  $T_0$  na ulazu do  $0.833T_0$  u grlu, te na izlazu poprima vrijednost  $T_{e,6}$ . Za izentropsko strujanje prikazano na Slikama 9., 10., 11. i 12. Valja naglasiti da je distribucija Machovog broja, a stoga i rezultati distribucije od  $p$  i  $T$ , kroz mlaznicu ovisi jedino o lokalnom odnosu  $A/A^*$ . To je ključ za analizu karakteristika izentropskog, nadzvučnog, kvazi-jednodimenzionalnog strujanja plina kroz mlaznicu. Jedini mehanizam koji može proizvesti silu za ubrzanje plina jest gradijent tlaka. Stoga, razlika tlakova mora biti postojana između ulaza i izlaza iz mlaznice, jedino u tom slučaju će plin početi strujati kroz mlaznicu. Tlak na izlazu iz mlaznice mora biti manji od tlaka na ulazu u mlaznicu, odnosno  $p_e < p_0$ . Štoviše, ako je cilj proizvesti izentropsko nadzvučno strujanje koje je prikazano na Slici 9. tlak  $p_e/p_0$  mora točno biti vrijednost propisana Dodatkom A za poznati Machov broj  $M_{e,6}$ , odnosno,  $p_e/p_0 = p_{e,6}/p_0$ . Ako je odnos tlakova različit od gore navedenih vrijednosti, strujanje unutar ili vani mlaznice razlikovati će se od onoga prikazanog na Slici 9. Nadalje, razmatra se tip strujanja kroz mlaznicu koje se pojavljuje kada  $p_e/p_0$  nije jednako izentropskoj vrijednosti za  $M_{e,6}$ , odnosno kada vrijedi  $p_e/p_0 \neq p_{e,6}/p_0$ . Za početak se razmatra konvergentno-divergentna mlaznica prikazana na Slici 13. Ako je  $p_e = p_0$ , ne postoji razlika tlakova, samim time ne dolazi do strujanja unutar mlaznice. Nadalje, pretpostavlja se da se  $p_e$  smanji ispod  $p_0$ , recimo  $p_e = 0.999p_0$ . Ova mala razlika u tlakovima će proizvesti vrlo slabo podzvučno strujanje unutar mlaznice. Lokalni Machov broj će malo porasti kroz konvergentni dio te dostići maksimalnu vrijednost u grlu, navedeno je prikazano na Slici 14. kao krivulja broj 1. Taj Machov broj neće biti zvučni, nego će imati vrijednost malog podzvučnog broja. Niz grlo lokalni Machov broj će se smanjivati u divergentnom dijelu, te dostići vrlo malu ali konačnu vrijednost  $M_{e,1}$  na izlazu. Prema tome, tlak u konvergentnom dijelu će se postupno smanjivati od  $p_0$  na ulazu do minimalne vrijednosti u grlu, a zatim će se rasti do vrijednosti  $p_{e,1}$  na izlazu. Ova varijacija je prikazana na Slici 15. Valja zamijetiti da u ovoj situaciji strujanje nije zvučno u grlu pa u ovom slučaju  $A_t$  nije jednako  $A^*$ . Treba se prisjetiti da je  $A^*$  koje se pojavljuje u jednadžbi (33), zvučna površina grla, dakle površina grla kada strujanje dostigne brzinu zvuka. U ovom slučaju kada je strujanje podzvučno,  $A^*$  poprima karakter referentne površine u konvergentno-divergentnoj mlaznici te ono nije jednako stvarnoj geometriji površine grla mlaznice  $A_t$ . Razmatra se daljnje smanjenje tlaka na izlazu  $p_e = p_{e,2}$ . Strujanje je sada označeno sa krivuljama

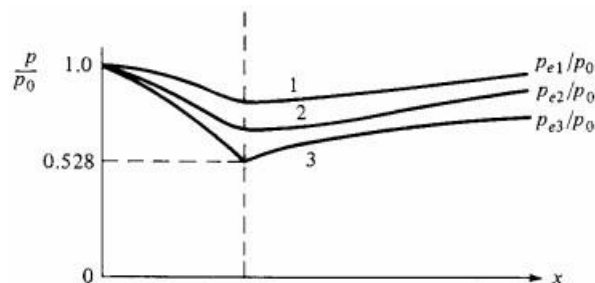
brojem 2. Strujanje je sada brže kroz mlaznicu, a maksimalni Machov broj u grlu se povećava, ali dalje ne dostiže 1. Nadalje, smanjuje se  $p_e$  na vrijednost  $p_e = p_{e,3}$ , tako da strujanje u grlu dostigne zvuče uvjete. To je prikazano krivuljom broj 3. Machov broj u grlu je 1, a tlak u grlu je  $0.528p_0$ . Strujanje dalje niz grlo je podzvučno. Ako se usporede rezultati blokova Slika 9, 10, 11 i 12 sa Slikama 13, 14 i 15 valja zamijetiti uočljivu fizičku razliku. Za dati oblik mlaznice, postoji samo *jedno* rješenje za izentropsko strujanje u slučaju nadzvučnog strujanja u prvom navedenom bloku slika. Sa druge strane, postoji beskonačan broj rješenja za izentropsko podzvučno strujanje, svako odgovara nekoj vrijednosti  $p_e$ , gdje je  $p_0 \geq p_e \geq p_{e,3}$ . U drugom bloku slika prikazana su samo tri rješenja od beskonačno mnogo. Stoga, ključni faktori za analizu čistog podzvučnog strujanja u konvergentno-divergentnoj mlaznici su  $a/A^*$  i  $p_e/p_0$ .



Slika 13. Konvergentno-divergentna mlaznica, [1]



Slika 14. Krivulje Machovog broja kroz mlaznicu, [1]



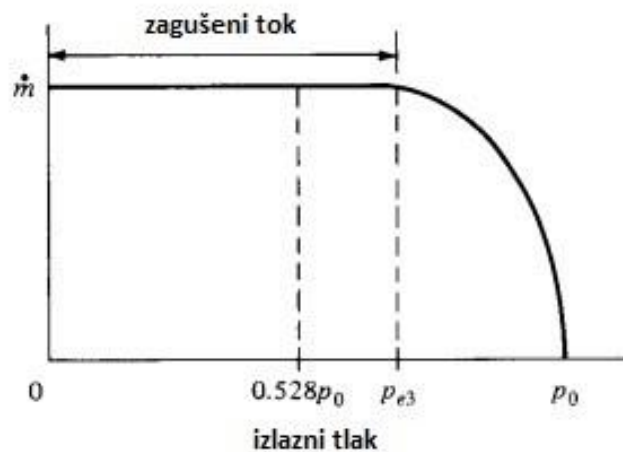
Slika 15. Krivulje odnosa tlaka na ulazu i izlazu u mlaznici, [1]

Razmatra se maseni protok kroz konvergentno-divergentnu mlaznicu prikazanu na Slici 13. Kako se tlak na izlazu iz mlaznice smanjuje, brzina strujanja plina u grlu se povećava, samim

time se povećava i maseni protok. Maseni protok može se izračunati pomoću jednadžbe (37) koja glasi:

$$\dot{m} = \rho_t u_t A_t \quad (37)$$

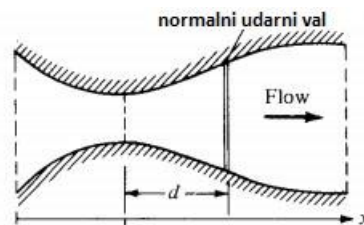
Kako se  $p_e$  smanjuje,  $u_t$  se povećava, a  $\rho_t$  se smanjuje. Kako god, postotak povećanja  $u_t$  je puno veći od postotka smanjenja  $\rho_t$ . Kao rezultat toga,  $\dot{m}$  se povećava kako je prikazano na Slici 16. Kada je  $p_e = p_{e,3}$ , zvučno strujanje se pojavljuje u grlu te je  $\dot{m} = \rho^* u^* A^* = \rho^* u^* A_t$ . Nadalje, ako se  $p_e$  i dalje smanjuje ispod vrijednosti  $p_{e,3}$  uvjeti u grlu se mijenjaju, odnosno ostaju *nepromijenjeni*. Machov broj u grlu ne može prijeći vrijednost 1. stoga, kako se  $p_e$  i dalje smanjuje,  $M$  ostaje jednak vrijednosti 1 u grlu. Posljedično tome, maseni protok ostaje konstantan kako se  $p_e$  smanjuje ispod vrijednosti  $p_{e,3}$  te je to prikazano na Slici 16. U tom smislu riječi, strujanje u grlu postaje „smrznuto“. Jednom kada strujanje dostigne brzinu zvuka u grlu, smetnje ne mogu djelovati uzvodno uz grlo. Stoga, strujanje u konvergentnom dijelu mlaznice više nije povezano sa izlaznim tlakom niti to strujanje može znati da se tlak smanjuje na izlazu iz mlaznice. Ova situacija, kada je strujanje zvučno u grlu, a maseni protok ostaje konstantan bez obzira koliko je smanjen  $p_e$ , naziva se zagušeni tok (engl. *Choked flow*). Vrlo važan pojam za stlačivo strujanje kroz mlaznice.



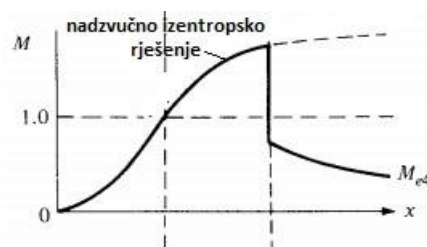
Slika 16. Ilustracija zagušenog toka, [1]

Promatra se podzvučno strujanje u mlaznici prikazanoj na Slici 13. Zanimljivo je što se događa u kanalu kada se  $p_e$  smanji ispod vrijednosti  $p_{e,3}$ , u konvergentnom dijelu kako je i prethodno opisano, ne događa se ništa. Karakteristike strujanja ostaju fiksne u uvjetima prikazanim na krivulji 3 u konvergentnom dijelu mlaznice (lijeva strana Slike 14. i 15.). Sa druge strane, u divergentnom dijelu mlaznice puno se toga u ovom slučaju događa. Kako se izlazni tlak

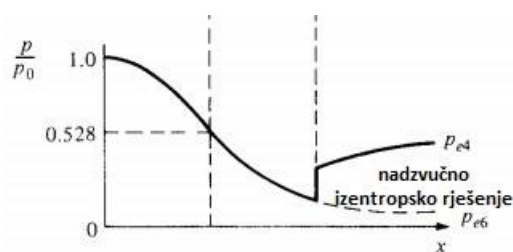
smanjuje ispod vrijednosti  $p_{e,3}$ , dolazi do dijela nadzvučnog strujanja nizvodno u grlu. Međutim, izlazni tlak je preveliki da dopusti izentropsko nadzvučno strujanje kroz cijelu divergentnu sekciju mlaznice. Dalje niz grlo zbog toga dolazi do pojave normalnog udarnog vala. Ova situacija je prikazana na Slici 17. Tlak na izlazu se smanjuje do  $p_{e,4}$ , gdje je  $p_{e,4} < p_{e,3}$ , ali gdje je  $p_{e,4}$  supstacionarno veći od  $p_{e,6}$ . Ovdje se razmatra normalni udarni val koji je postojan unutar mlaznice na udaljenosti  $d$  niz grlo. Između grla i udarnog vala, rješenje je dano kao nadzvučno izentropsko strujanje, prikazano na Slikama 18. i 19. Iza udarnog vala, strujanje je podzvučno. Ovo podzvučno strujanje izentropski usporava dodatno kroz divergentni kanal kako struji prema izlazu iz mlaznice. Izentropsko strujanje vrijedi i sa lijeve i sa desne strane udarnog vala. Naravno, entropija se povećava kroz udarni val. Stoga, strujanje sa lijeve strane je izentropsko sa jednom vrijednosti entropije  $s_1$ , a strujanje sa desne strane udarnog vala je također izentropsko sa gdje je vrijednost entropije  $s_2$ , pa vrijedi da je  $s_2 > s_1$ . Lokacija udarnog vala unutar mlaznice označena sa udaljenosti  $d$  je određena kao zahtjev da se statički tlak poveća unutar udarnog vala te da se na izlazu postigne tlak vrijednosti  $p_{e,4}$ . Kako se  $p_e$  dalje smanjuje, normalni udarni val se pomiče niz mlaznicu prema izlazu. Pri određenoj vrijednosti izlaznog tlaka,  $p_e = p_{e,5}$ , normalni udarni val je pozicioniran točno na izlazu mlaznice. Ovo je prikazano na Slici 20.a do 20.c. U ovoj fazi, kada je  $p_e = p_{e,5}$ , strujanje kroz cijelu mlaznicu je izentropsko osim točno na izlazu, gdje to nije tako.



Slika 17. Udarni val formiran niz grlo mlaznice, [1]

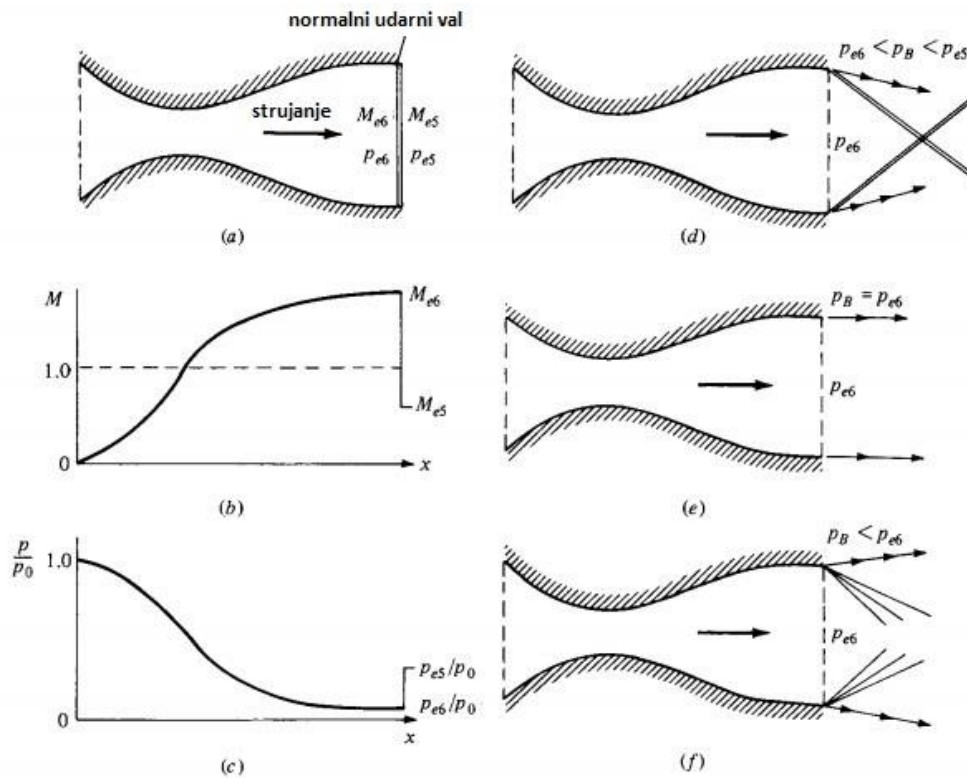


Slika 18. Nadzvučno izentropsko rješenje, odnos  $M$  sa duljinom mlaznice, [1]



Slika 19. Nadzvučno izentropsko rješenje, odnos razlike tlakova sa duljinom mlaznice, [1]

Do ovoga trenutka tematika se bavila promatranjem i analizom  $p_e$ , što je tlak točno na izlazu iz mlaznice. Sada je pretpostavka da mlaznica prikazana na Slici 20a ima ispuh direktno u okolinu niz njen izlaz. Okolina na primjer može biti atmosfera u ovom slučaju. Kako god, tlak okoline iza izlaza iz mlaznice je definiran kao *vanjski tlak* (engl. *back pressure*), označen sa  $p_B$ . Kada je strujanje na izlazu iz mlaznice podzvučno, izlazni tlak mora biti jednak vanjskom tlaku,  $p_e = p_B$ , zato što se diskontinuitet ne može održati postojanim podzvučnim strujanjem. Dakle, zato vrijedi da je  $p_B = p_{e,5}$  na Slici 20. Stoga, umjesto da se razmatraju posljedice kada se smanjuje  $p_e$ , može se isto tako smanjivati  $p_B$  te bi analizirani rezultati bili podjednaki. Nadalje, zamišlja se da se može kontrolirati  $p_B$  te da se ono nastavlja smanjivati. Razmatra se slučaj kada je vanjski tlak smanjen ispod vrijednosti  $p_{e,5}$ . Kada vrijedi  $p_{e,6} < p_B < p_{e,5}$ , onda je vanjski tlak još uvijek veći od izentropskog tlaka na izlazu iz mlaznice. Stoga, mlaz na izlazu u okolinu mora biti nekako stlačen na taj način da je tlak mlaza kompatibilan sa  $p_B$ . Ta stlačivost se događa preko kosog udarnog vala koji se pojavljuje na izlazu, prikazano na Slici 20d. Kada se  $p_B$  smanji na vrijednost tako da odgovara  $p_B = p_{e,6}$ , ne postoji razlika između izlaznog tlaka i vanjskog tlaka, samim time mlaznica glatko tjera mlaz u okolinu bez prolaska kroz ikakve udarne valove. To je prikazano na Slici 20e. Napokon, kako se  $p_B$  smanjuje ispod vrijednosti  $p_{e,6}$  mlaz plina iz mlaznice mora proći dodatnu ekspanziju kako bi se tlak izjednačio sa vanjskim tlakom. Ova ekspanzija se događa kroz centralne ekspanzijske valove na izlazu mlaznice, prikazani na Slici 20f. Kada se pojavi situacija prikazana na Slici 20d, kaže se da je mlaznica *preekspandirana* (engl. *overexpanded*), zato što je tlak na izlazu ekspandiran ispod vrijednosti vanjskog tlaka,  $p_{e,6} < p_B$ . Odnosno, ekspanzija mlaznice otišla je predaleko, samim time mlaz mora prolaziti kroz koze udarne valove kako bi se vratio na veće vrijednosti vanjskih tlakova. Obrnuto vrijedi za situaciju na Slici 20f, u ovom slučaju mlaznica je *podekspandirana* (engl. *underexpanded*), zato što izlazni tlak je veći od vanjskog tlaka,  $p_{e,6} > p_B$ , stoga strujanju je omogućena dodatna ekspanzija nakon prolaska kroz mlaznicu.

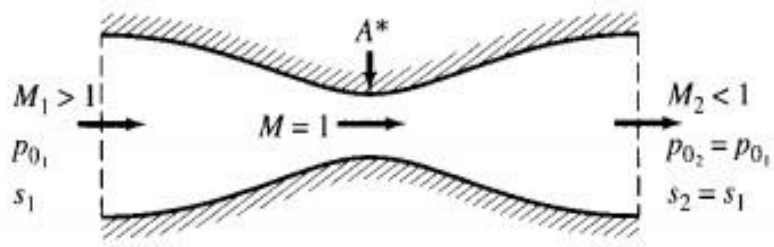


Slika 20. Nadzvučno strujanje u mlaznici sa udarnim valovima na izlazu mlaznice: (a), (b), i (c) odnose se na normalni udarni val na izlazu, (d) preekspandirana mlaznica, (e) izentropska ekspanzija kod jednakosti izlaznog tlaka i vanjskog tlaka, (f) podekspandirana mlaznica, [1]

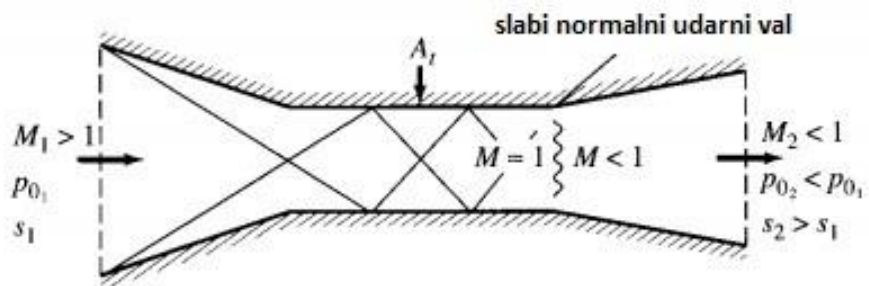
Valja zaključiti da je cijela analiza strujanja kroz mlaznice u ovom poglavlju na osnovi datog oblika mlaznice. Pretpostavka je da je  $A = A(x)$  propisano. Kada je to slučaj, kvazi-jednodimenzionalna teorija strujanja daje uvid razumnih pretpostavki oko strujanja kroz mlaznice, gdje su rezultati interpretirani kao prosjek istih kroz cijeli presjek mlaznice. Ova teorija ne daje rješenje za dizajn mlaznice. U stvarnosti zidovi mlaznice nisu zaobljeni kada unutar njih dolazi do kosih udarnih valova. Kako bi se dobila solidna kontura za nadzvučnu mlaznicu, koja bi proizvela izentropsko strujanje bez udarnih valova unutar kontura mlaznice, mora se uzeti u obzir trodimenzionalnost stvarnog strujanja. To je jedna od zadaća i svrha metode karakteristika, tehnike za analiziranje dvodimenzionalnog i trodimenzionalnog nadzvučnog strujanja. Ona će biti spomenuta u naknadnim poglavljima [1] [2] [3] [4].

### 3.3. STRUJANJE KROZ DIFUZORE

Općenito, difuzor se može definirati kao kanal koji je dizajniran da uspori brzinu nadolazeće struje nekoga plina na svojem izlazu. Nadolazeće strujanje može biti podzvučno ili nadzvučno. Međutim, oblik difuzora se očigledno razlikuje ovisno o tome je li nadolazeća struja podzvučne ili nadzvučne brzine. Nadalje, definicija difuzora može se malo i proširiti. Difuzor je naravno cijev, ili kanal dizajniran da uspori nadolazeću struju nekoga plina na svojem izlazu, ali sa što je moguće manjim gubitkom totalnog tlaka. Posljedično tome, idealan difuzor bi bio okarakteriziran sa izentropskom stlačivosti na manje brzine, to je prikazano na Slici 21., gdje nadzvučno strujanje ulazi u difuzor pri  $M_1$ , te je izentropski stlačeno u konvergentnom kanalu do Macha 1 u grlu, gdje je površina  $A^*$  te je dalje izentropski stlačeno u divergentnom dijelu difuzora do manjeg podzvučnog Machovog broja na izlazu iz difuzora. Zapravo,  $p_0$  je konstanta kroz cijeli difuzor, to je karakteristika izentropskog strujanja. Međutim, u stvarnom svijetu i zdrav razum nalaže na to da je idealan difuzor koji je prikazan na Slici 21. nemoguće ostvariti. Jako je teško usporiti nadzvučno strujanje bez generiranja udarnih valova u tom procesu. Na primjer, razmatra se konvergentni dio idealnog difuzora. Valja primijetiti da će konvergentno strujanje samo po sebi generirati kose udarne valove, koji će narušiti prirodu izentropskog strujanja. Štoviše, u stvarnom svijetu, strujanje je viskozno, dolazi do povećanja entropije u graničnim slojevima na zidovima difuzora. Iz tih razloga, idealni difuzor ne može biti dizajniran. Stvarni nadzvučni difuzor je prikazan na Slici 22. U ovom slučaju, nadolazeće strujanje je usporeno sa serijom reflektiranih kosih udarnih valova, prvo u konvergentnoj sekciji, obično se sastoji od ravnih zidova, a zatim u konstantnom području grla. Zbog interakcije udarnih valova sa viskoznom strujanjem blizu zidova, reflektirajući krug udarnih valova slabi i ponekad završava sa normalnim udarnim valom na kraju konstantnog područja grla. Napokon, podzvučno strujanje se i dalje usporava kako prolazi kroz divergentnu sekciju difuzora. Umijeće dizajna difuzora je dobiti što manji mogući gubitak totalnog tlaka, odnosno dizajnirati konvergentno, divergentno, konstantno područje grla sekciju tako da  $p_{0,2}/p_{0,1}$  jest što je moguće bliže jednakosti. Nažalost, u puno slučajeva ne uspije se u tom naumu. Valja još zamijetiti da zbog povećanja entropije kroz udarne valove i u slojevima granica, stvarno područje grla difuzora  $A_t$  je veće od  $A^*$ , odnosno u Slici 21. i 22.  $A_t > A^*$  [1] [4].



Slika 21. Idealni (izentropski) nadzvučni difuzor, [1]



Slika 22. Stvarni nadzvučni difuzor, [1]

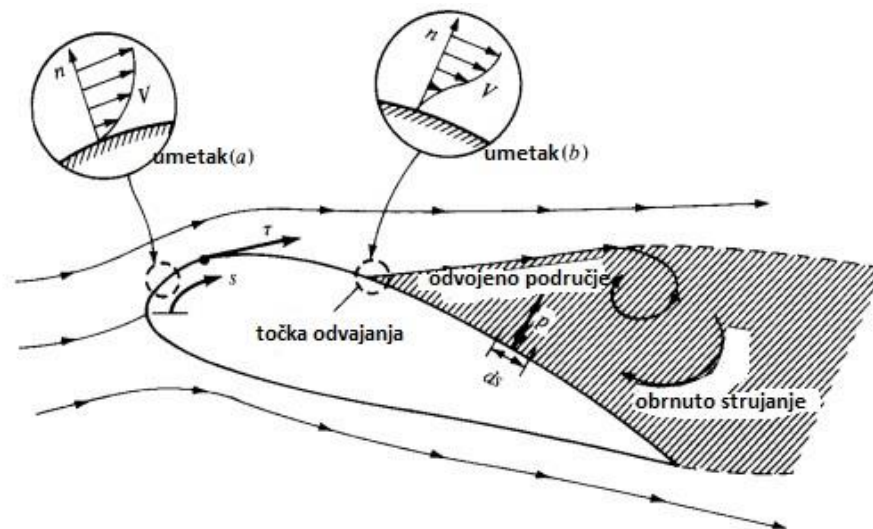


## 4. VISKOZNO STRUJANJE

Viskozno strujanje je strujanje u kojem se u obzir uzimaju utjecaji viskoznosti, toplinskog provođenja i difuzije mase. Za potrebe ovoga rada difuzija mase biti će zanemarena, te će jedino utjecaj viskoznosti i toplinskog provođenja biti od važnosti. Prethodno obrađene teme i jedinice su se odnosile iznimno na strujanje koje nije viskozno, dakle neviskozno strujanje se razmatralo u svim primjerima u radu do ove cjeline gdje će se ukratko obraditi karakteristike viskoznog strujanja. Sve to iz razloga gdje će na kraju rada biti uspoređene karakteristike strujanja plina kroz nadzvučnu mlaznicu za slučaj viskoznog i neviskoznog strujanja [1] [5] [5].

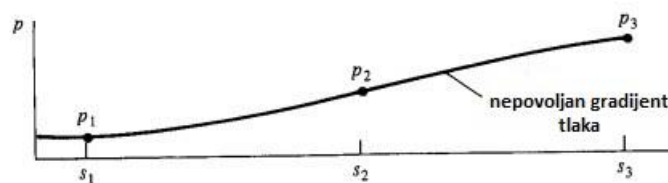
### 4.1. UTJECAJ VISKOZNOSTI

Zamišljaju se dvije čvrste površine koje kližu jedna po drugoj, kao na primjer knjiga koja kliže po stolu. Očito je da će između tih promatranih objekata biti sile trenja koja će usporiti kretanje. Isto vrijedi za strujanje plina preko čvrste površine, međudjelovanje plina koji struji preko površine stvara silu trenja koja usporava strujanje. To ima utjecaj i na površinu i na fluid koji struji oko nje. Površina osjeća silu „povlačenja“ u smjeru strujanja, kao tangenta na površinu. Ova tangencijalna sila po jedinici površine je definirana kao *smično naprezanje*  $\tau$ . Kao jednaku i suprotnu reakciju, fluid uz površinu osjeća usporavajuću silu koja smanjuje brzinu strujanja, kako je prikazano na Slici 23. u umetku *a*. Zapravo, utjecaj trenja ima zadaću stvoriti  $V = 0$  točno na površini tijela. To se naziva *stanje bez klizanja* (engl. *no-slip condition*) koje dominira viskozno strujanje. U bilo kojem stvarnom kontinuiranom strujanju fluida preko čvrste površine, brzina strujanja je jednaka nuli točno na površini. Odmah iznad površine, brzina strujanja je postojana i konačna, ali usporena, kako je prikazano umetkom *a*. Ako  $n$  predstavlja koordinatu kao normalu na površinu, tada vrijedi da je u području blizu površine,  $V = V(n)$ , gdje je  $V = 0$  pri  $n = 0$ , te se  $V$  povećava kako se  $n$  povećava. To je prikazano na umetku *a* te se naziva *profilom brzine*. Logično je da blizu površine postoje gradijenti brzine, koji su zbog sile trenja između fluida i površine.

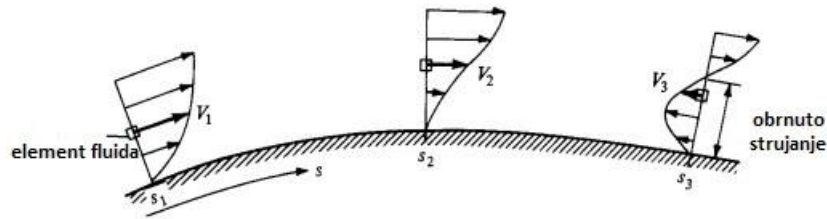


Slika 23. Utjecaj viskoznosti na tijelo u strujanju fluida: smično naprezanje i odvojeno strujanje, [1]

Kao dodatak generiranju smičnog naprezanja, trenje igra još jednu ulogu u diktiranju strujanja preko tijela u Slici 23. Razmatra se element fluida koji se kreće u viskoznom strujanju blizu površine kako je prikazano na Slici 24. Pretpostavlja se da je strujanje tek započelo. Na postaji  $s_1$ , brzina elementa fluida jest  $V_1$ . Nadalje se pretpostavlja da strujanje preko površine proizvodi rastuću distribuciju tlaka u smjeru kretanja strujanja. (pretpostavka  $p_3 > p_2 > p_1$ ). Takvo područje rastućeg tlaka naziva se *nepovoljan gradijent tlaka* (engl. *adverse pressure gradient*). Dalje se promatra strujanje elementa fluida, kretanje elementa je već usporeno zbog trenja, a kao dodatak tome strujanje mora savladati dodatni rastući tlak, što još više smanjuje brzinu strujanja. Kao posljedica toga, na stanici 2  $V_2$  je manja od  $V_1$ . Element fluida nastavlja strujati niz tijelo te može doći do potpunog zastoja, a onda, pod djelovanjem nepovoljnog gradijenta tlaka, može krenuti strujati u suprotnome smjeru. Ovo obrnuto strujanje je prikazano na Slici 25. gdje se element fluida vraća uz površinu tijela u suprotnome smjeru pri brzini  $V_3$ . Na Slikama 24. i 25. prikazani su detalji strujanja elementa fluida u tek započetom strujanju. Fenomen obrnutog strujanja uzrokuje da se struja fluida odvoji od površine te stvori rotirajuće strujanje niz površinu tijela, što se vidi na Slici 23.

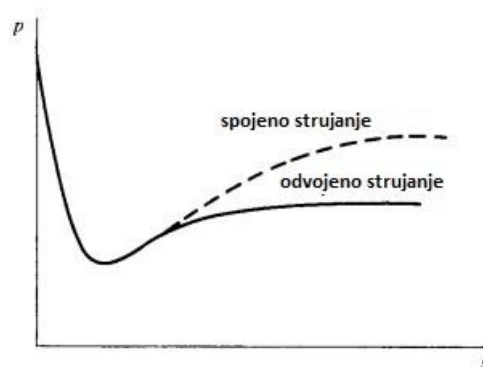


Slika 24. Nepovoljan gradijent tlaka, [1]



Slika 25. Obrnuto strujanje elementa fluida, [1]

Međutim, kao dodatak stvaranja smičnog naprezanja, utjecaj trenja može uzrokovati odvajanje fluida koji struji preko tijela. To se događa na točki separacije prikazanoj na Slici 23. Kada dođe do tog odvojenog strujanja distribucija tlaka po površini je uvelike izmijenjena. Zbog toga primarni strujanje fluida preko tijela nastavlja strujati, ali ne preko cijelog tijela, već od točke separacije strujanje zamisli nekakav deformirani oblik kojim nastavlja strujanje, zbog tog velikog dijela u kojem se strujanje odvojilo. Efekt toga je stvaranje raspodjele tlaka preko stvarne površine tijela, što rezultira integriranom silom koja se stvori u smjeru strujanja fluida, a to je sila otpora. Kako bi se to još bolje pojasnilo, razmatra se raspodjela tlaka preko gornje površine tijela. Za odvojeno strujanje, tlak niz donji dio tijela je manji, što je prikazano punom krivuljom na Slici 26. Sada se potrebno vratiti i promatrati Sliku 23. Valja primijetiti da tlak preko gornje površine tijela zadnjeg dijela proizvodi silu u negativnom smjeru sile otpora, odnosno  $p$  djeluje preko elementa površine  $ds$  te ima horizontalnu komponentu u uzvodnom smjeru. Da je strujanje neviskozno, podzvučno te ne odvojeno, uz to da je tijelo dvodimenzionalno, naprijed djelujuće komponente raspodjele tlaka bi poništile nazad djelujuće komponente, pa bi samim time raspodjela tlaka dala silu otpora jednaku nuli. Međutim, za viskozno, odvojeno strujanje, vidi se da je  $p$  smanjeno u odvojenom dijelu, stoga nije moguće da poništi raspodjelu tlaka koja je preostala na tijelu. Rezultat toga je stvaranje sile otpora. Ovo se naziva *sila otpora zbog odvojenog strujanja* (engl. *pressure drag due to flow separation*) te je označena sa  $D_p$ .



Slika 26. Raspodjela tlaka za spojeno i odvojeno strujanje, [1]

Zaključno, vidi se da utjecaj viskoznosti proizvodi dvije vrste otpora:

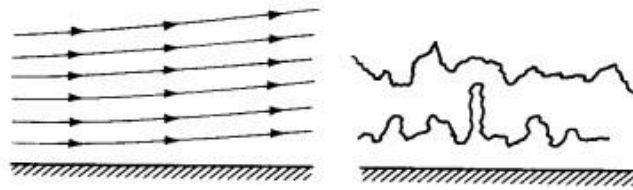
- $D_f$  sila trenja na površini, odnosno komponenta integrala smičnog naprezanja  $\tau$  u smjeru sile otpora, preko tijela.
- $D_p$  sila otpora tlaka zbog odvajanja strujanja, odnosno komponenta sile otpora integrala raspodjele tlaka preko površine tijela.

$D_p$  se ponekad naziva *otpor oblika* (engl. *form drag*). Suma navedenih otpora se naziva *otpor profila* (engl. *profile drag*) za dvodimenzionalno tijelo. Za trodimenzionalno tijelo kao naprimjer kompletni zrakoplov, suma tih dvaju otpora naziva se *parazitni otpor* (engl. *parasite drag*) [1] [3] [5].

#### 4.2. UTJECAJ TOPLINSKE VODLJIVOSTI

Sada se skreće pažnja na utjecaj toplinske vodljivosti, još jedne fizikalne karakteristike viskoznog strujanja kao dodatak sili trenja. Analogno sa klizanjem čvrstih tijela jedno preko drugih, razmatra se klizanje knjige preko stola. Ukoliko se knjiga jako pritisne i kliže po stolu naprijed pa natrag, vrlo brzo će se korica knjige zagrijati, kao i površina stola po kojoj se klizala. Isto se događa sa strujanjem fluida uz površinu čvrstog tijela. Fluid koji se kreće ima određenu količinu kinetičke energije, zbog trenja dolazi do usporavanja fluida, a samim time i dolazi do smanjenja kinetičke energije. Gubitak kinetičke energije pojavljuje se u obliku unutarnje energije fluida, uzrokujući povećanje temperature. To se naziva *viskozna disipacija* (engl. *viscous dissipation*) unutar fluida. Za uzvrat, kada temperatura fluida naraste, postojana je razlika u temperaturi između toplijeg fluida i hladnijeg tijela, odnosno površine tijela. Iz iskustva je poznato da se toplina prenosi sa toplijeg na hladnije tijelo, međutim, u ovom slučaju toplina će biti prenesena sa toplijeg fluida na hladniju površinu tijela. To je mehanizam *aerodinamičkog zagrijavanja* tijela. Aerodinamičko zagrijavanje postaje istaknutije sa povećanjem brzine strujanja fluida, zbog veće disipacije kinetičke energije, samim time je i razlika temperatura fluida i površine tijela veća. Sa svim aspektima navedenima prethodno, kao što su: smično naprezanje, odvojeno strujanje, aerodinamičko zagrijavanje, itd. pitanje je slijedeće, a to je u viskoznom strujanju, je li strujanje laminarno ili turbulentno? Razmatra se viskozno strujanje fluida preko površine kao što je prikazano na Slici 27. Ukoliko su strujnice fluida glatke i konstantne, kako je prikazano na lijevoj strani Slike 27., onda se radi o laminarnom strujanju. Sa desne strane iste slike vidi se turbulentno strujanje. Zbog nepravilnog strujanja u turbulentnom strujanju, elementi više energije su prebačeni iz vanjskih dijelova bliže

površini, stoga prosječna brzina strujanja blizu površine tijela je veća za turbulentno strujanje u odnosu na laminarno.

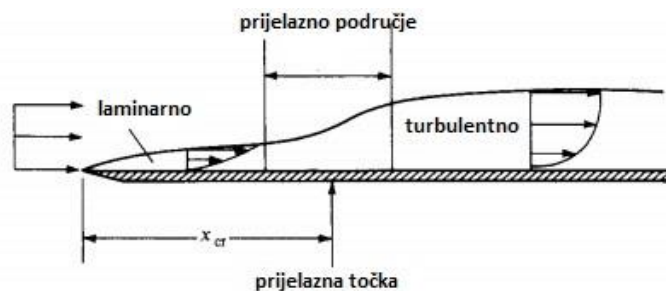


Slika 27. Strujnice laminarnog i turbulentnog strujanja, [1]

Profili brzina za laminarno i turbulentno strujanje prikazani su na Slici 28. Valja primijetiti da odmah iznad površine, brzine turbulentnog strujanja su puno veće nego one od laminarnog strujanja. Zbog te razlike u brzinama, efekti trenja u turbulentnom strujanju su više izraženi. Međutim, turbulentno strujanje ima veliku pogodnost, zato što energija elementa fluida blizu površine je veća kod turbulentnog strujanja, onda se ono ne odvaja od površine brzo kao laminarno strujanje. Ukoliko dođe do odvajanja strujanja u turbulentnom strujanju, do toga će doći kasnije i odvojeno područje će biti manje. Kao rezultat toga, sila otpora zbog odvajanja struje fluida  $D_p$  će biti manja za turbulentno strujanje [1] [5] [5].

#### 4.3. PRIJELAZ SA LAMINARNOG U TURBULENTNO STRUJANJE

Promatra se viskozno strujanje preko ravne ploče kako je prikazano na Slici 28. Struja fluida uz prednji brid je jednolika u brzini slobodne struje. Međutim, dalje niz prednji brid utjecaj sile trenja će usporavati struju te će samim time se strujanje niz ravnu ploču se uzdizati što ide dalje po površini ravne ploče. Za početak, strujanje uz napadni brid biti će laminarno. Međutim, kako se strujanje udaljava od napadnog brida dolazi do nestabilnosti, što je veća udaljenost nestabilnosti rastu, te uzrokuju prijelaz u turbulentno strujanje. Prijelaz sa laminarnog u turbulentno strujanje događa se u konačnom području, međutim za potrebe analize kao prijelaz koristi se jedna točka, naziva se *prijelazna točka* (engl. *transition point*). Udaljenost od napadnog brida do prijelazne točke je označena sa  $x_{cr}$ .



Slika 28. Prijelaz sa laminarnog u turbulentno strujanje, [1]

Vrijednost  $x_{cr}$  ovisi o puno faktora, na primjer neke karakteristike koje potiču prijelaz iz laminarnog u turbulentno strujanje, a time i smanjuju vrijednost  $x_{cr}$  su:

1. *Povećana hrapavost površine.* Kako bi se poguralo laminarno strujanje preko tijela, hrapavi dio se može postaviti na napadni rub kako bi se „poguralo“ laminarno strujanje u turbulentno. Ova se tehnika uvelike koristi u testiranjima u zračnim tunelima.
2. *Povećane turbulencije u slobodnoj struji zraka.* Ovo je osobito problem u zračnim tunelima, ukoliko dva zračna tunela imaju različitu razinu turbulencije u slobodnoj struji zraka, generirane podatke u jednom tunelu nije moguće ponoviti u drugom.
3. *Nepovoljan gradijent tlaka.* Nepovoljan gradijent tlaka jako pogoduje prijelazu u turbulentno strujanje. U suprotnom slučaju, povoljan gradijent tlaka (gdje se  $p$  smanjuje niz smjer strujanja) nastoji sačuvati inicijalno laminarno strujanje.
4. *Grijanje fluida od strane površine.* Ukoliko je temperatura površine veća od fluida koji struji preko nje, onda se toplina prenosi sa površine na fluid. U tom slučaju nestabilnosti u laminarnom strujanju će biti pojačane te će biti pogodovati ranijem prijelazu. U suprotnom, hladna površina, odnosno zid tijela, pogoduje laminarno strujanje [1].

#### 4.4. REYNOLDSOV BROJ

Postoji puno parametara koji utječu na prijelaz, odnosno tranziciju strujanja iz laminarnog u turbulentno. Neki od njih su Machov broj i Reynoldsov broj. Velike vrijednosti  $M_\infty$  te male vrijednosti  $Re$  potiču laminarno strujanje. Reynoldsov broj je dominantni faktor u prijelazu iz laminarnog u turbulentno strujanje. Referirajući se na Sliku 28. definira se kritični Reynoldsov broj,  $Re_{cr}$  kao

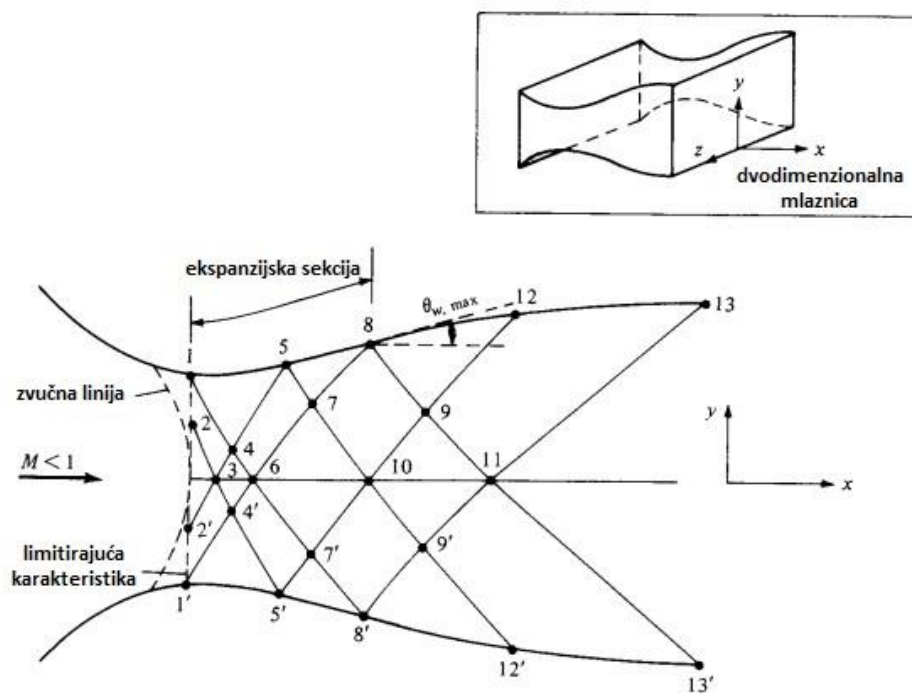
$$Re_{cr} \equiv \frac{\rho_\infty V_\infty x_{cr}}{\mu_\infty} \quad (38)$$

Vrijednost  $Re_{cr}$  za određeno tijelo pod specifičnim uvjetima je vrlo teško za pretpostaviti, ili odrediti. Zapravo, analiza tranzicije je još uvijek vrlo aktivno područje istraživanja moderne aerodinamike. Kao pravilo palca u praksi, uzima se  $Re_{cr} \approx 500,000$ . To je okvirna vrijednost uz koju je lakše pretpostaviti je li strujanje laminarno ili turbulentno. Ukoliko je vrijednost izračunata pomoću jednadžbe (38) osjetno ispod 500,000 strujanje će biti laminarno, a ako je vrijednost  $Re$  puno veća od 500,000 onda će strujanje biti turbulentno [1] [5] [5].

## 5. DIZAJN NADZVUČNE MLAZNICE

Ranije u radu je demonstrirano kako dizajn nadzvučne mlaznice mora imati konvergentno-divergentan oblik. Razlog tome je kako bi se uspješno ubrzala struja plina sa podzvučne na nadzvučnu brzinu. U poglavlju 3 analizirano je kvazi-jednodimenzionalno strujanje, odnosno pretpostavka karakteristika strujanja kao funkcije od  $x$  kroz mlaznicu nekog određenog oblika. Karakteristike strujanja na bilo kojoj  $x$  stanici dobivene od analize kvazi-jednodimenzionalnog strujanja predstavljaju prosjek strujanja kroz određeni poprečni presjek mlaznice. Velika prednost kvazi-jednodimenzionalnog strujanja jest jednostavnost. Sa druge strane, ono ima i neke nedostatke, a to su da (1) ne može pretpostaviti detalje stvarnog trodimenzionalnog strujanja u konvergentno-divergentnoj mlaznici i (2) ne daje nikakve informacije o konkretnom obliku zida za takvu vrstu mlaznice.

Svrha ovog poglavlja jest opisati kako se metodom karakteristika može doći do informacija koje fale u kvazi-jednodimenzionalnoj analizi strujanja. Zbog jednostavnosti pretpostavlja se dvodimenzionalno strujanje, kako je prikazano na Slici 29. Ovdje su karakteristike strujanja funkcije od  $x$  i od  $y$ . Takvo dvodimenzionalno strujanje je primjenjivo za nadzvučne mlaznice pravokutnog poprečnog presjeka, kako je prikazano na vrhu Slike 29. Dvodimenzionalne mlaznice su korištene u mnogo nadzvučnih zračnih tunela, a čak se i istražuje primjena pravokutnih mlaznica na napredne vojne mlazne zrakoplove za budućnost.



Slika 29. Shematski prikaz dizajna nadzvučne mlaznice metodom karakteristika, [1]

Dakle, cilj je dizajnirati konvergentno-divergentnu mlaznicu kako bi ubrzali struju plina od stanja mirovanja do određene vrijednosti nadzvučne brzine, zapravo Machovog broja na izlazu mlaznice  $M_e$ . Za konvergentnu sekciju mlaznice u kojoj je strujanje podzvučno, nema specifičnog oblika koji je bolji od nekog drugog. Postoje pravila palca koja su iskustveno bazirana na teoriji podzvučnog strujanja. Međutim, ovdje se pretpostavlja da je podzvučna sekcija zadovoljavajuća, te se detaljnije valja razmotriti ostatak dizajna mlaznice.

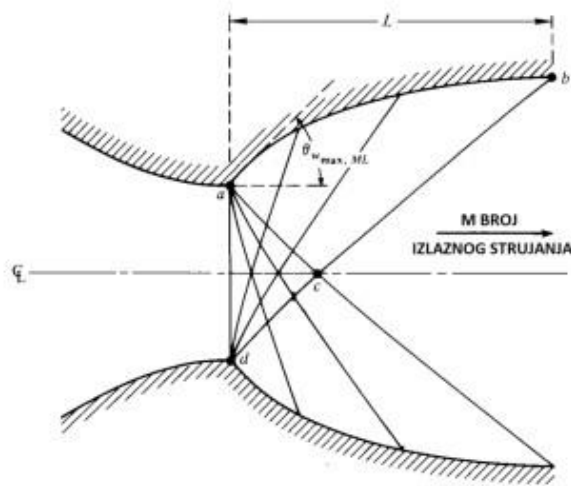
Zbog dvodimenzionalne prirode strujanja u području grla, zvučna linija je u principu zakrivljena, kako je prikazano na Slici 29. Linija koja je nazvana limitirajuća karakteristika je nacrtana odmah iza zvučne linije. Limitirajuća ili ograničavajuća karakteristika je definirana na način da bilo koja karakteristična crta koja potječe niz graničnu karakteristiku ne siječe zvučnu liniju. Nasuprot tome, karakteristična linija koja potječe iz malog područja između zvučne linije i granične karakteristike može presijecati zvučnu liniju. Nadalje, pretpostavka je da su poznate karakteristike strujanja na svim točkama limitirajuće karakteristike, odnosno koristi se limitirajuća karakteristika kao linija inicijalnih podataka. Na primjer, poznate su karakteristike strujanja na točkama 1 i 2 limitirajuće karakteristike. Štoviše, razmatra se dio mlaznice niz grlo, odnosno nakon najmanjeg poprečnog presjeka mlaznice. Neka  $\theta_w$  označava kut između tangente na zid mlaznice i horizontale, područje divergentne mlaznice gdje se  $\theta_w$  povećava naziva se ekspanzijska sekcija, kako je prikazano na Slici 29. Kraj ekspanzijske sekcije se pojavljuje kada je  $\theta_w = \theta_{wmax}$  (točka 8). Dalje od te točke,  $\theta$  se smanjuje dok se ne izjednači sa nulom na izlazu iz mlaznice. Dio mlaznice gdje se  $\theta_w$  smanjuje naziva se ravnajuća sekcija. Oblik ekspanzijske sekcije je donekle proizvoljan, tipično, kružni luk velikog radijusa se koristi za ekspanzijsku sekciju puno zračnih tunela.

Za simetrične mlaznice, karakteristike nastale na gornjem zidu mlaznice, promatrani su na način da se reflektiraju od središnje linije mlaznice. Iz tog razloga može se zanemariti jedna polovica mlaznice pri izračunima. Mlaznice koje imaju izraženu ekspanzijsku sekciju, kao one što je prikazana na Slici 29., upotrebljava se kao što je prije navedeno najviše u zračnim tunelima. U zračnim tunelima je strujanje iznimno jednoliko u ispitnoj sekciji, te je od velike važnosti. Mlaznice zračnih tunela su duge jer vrše polaganu ekspanziju.

Sa druge strane, mlaznice za raketne motore moraju biti što kraće je moguće, razlog je ušteda na masi, stoga se takve mlaznice projektiraju na minimalnu duljinu  $L$ , s kojom je moguće ostvariti željeni Machov broj na izlazu mlaznice bez pojave udarnih valova. Kada se priča o mlaznicama minimalne duljine, ekspanzijska sekcija svodi se na ekspanzijski kut u grlu



mlaznice, se te ekspanzija odvija kroz Prantl-Meyerov ekspanzijski val sa izvorom u ekspanzijskom kutu grla mlaznice (točka *a* slika 30.).



Slika 30. Mlaznica minimalne duljine, [6]

Prantl-Meyerov val koji nastaje u kutu grla mlaznice mijenja smjer strujanja za kut  $\theta_{wmax, ML}$  gdje indeks *ML* označava mlaznicu minimalne duljine (engl. *Minimum Length*). Duljina mlaznice *L* je minimalna potrebna za postizanje izentropskog strujanja bez udarnih valova. Kada se govori o mlaznici minimalne duljine, nema pojave višestrukih refleksija, pa element fluida susreće se sa samo dvije vrste udarnih valova. Desne karakteristike iz kuta grla mlaznice označenog točkom *a* i lijeve karakteristike iz kuta grla mlaznice u točki *d*. radi toga mlaznice minimalne duljine vrše ekspanziju kroz veći ekspanzijski kut od mlaznica sa izraženom ekspanzijskom sekcijom, odnosno vrijedi  $\theta_{wmax, ML} > \theta_{wmax}$ .

Fizički uvjeti jednolikog, dvodimenzionalnog, izentropskog strujanja mogu biti izraženi matematički pomoću nelinearnih diferencijalnih jednadžba od potencijala brzine. Metoda karakteristika jest matematički izračun koji se koristi da bi se pronašla rješenja za potencijal brzine, uz to zadovoljavajući dane granične uvjete u kojima parcijalne diferencijalne jednadžbe postaju obične diferencijalne jednadžbe. Karakteristike su „linije“ nadzvučnog strujanja orijentirane u određenim smjerovima duž kojih se šire smetnje (tlačni valovi). Metoda karakteristika jest numerička procedura koja je sposobna za ispravno rješavanje, između ostalog, problema dvodimenzionalnog stlačivog strujanja. Koristeći ovu tehniku karakteristike strujanja kao što su smjer i brzina, mogu biti izračunate na različitim točkama kroz polje strujanja fluida.

Slijede tri svojstva karakteristika:

1. Karakteristika u dvodimenzionalnom nadzvučnom strujanju jest krivulja ili linija duž koje se šire fizičke smetnje pri brzini zvuka u odnosu na plin kroz koji se širi.
2. Karakteristika jest krivulja preko koje su svojstva strujanja neprekidna, iako mogu imati diskontinuitet u prvim izvodima, duž kojih su oni isprekidani.
3. Karakteristika je krivulja duž koje postojeće parcijalne diferencijalne jednačbe mogu biti manipulirane u obične diferencijalne jednačbe.

U području odmah nakon zvučnog grla strujanje plina je okrenuto od sebe tako da se radi ekspanzija plina u nadzvučnu struju. Ova ekspanzija odvija se u inicijalnom ekspanzijskom području. U scenariju Prandtl-Meyerove ekspanzije, pretpostavlja se da se ekspanzija odvija kroz središnji val koji potječe iz oštrog kuta. Ova pojava je tipično modelirana kao serija kontinuiranih ekspanzijskih valova, gdje svaki val okreće struju plina za inkrementalnu vrijednost duž konture zidova kanala mlaznice. Ovi ekspanzijski valovi mogu biti zamišljeni kao suprotno od udarnih kompresijskih valova, koji usporavaju strujanje. To je opisano sa Prandtl-Meyerovom funkcijom prikazanom jednačbom (39):

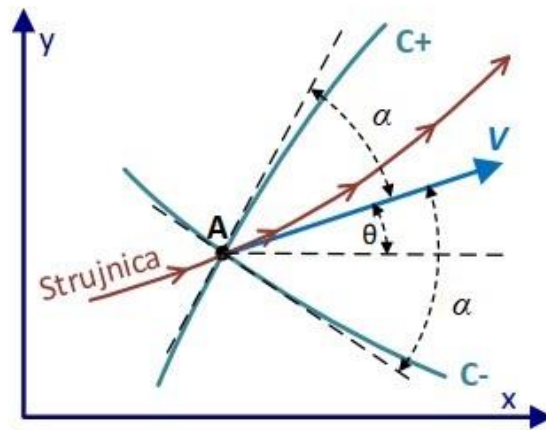
$$d\theta = \pm \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} \quad (39)$$

Gdje je promjena u kutu strujanja označena sa  $d\theta$ . Integrirajući danu jednačbu dobiva se slijedeće:

$$v(M) = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (M^2 - 1)} - \tan^{-1} \sqrt{M^2 - 1} \quad (40)$$

Parametar  $v$  je poznat kao Prandtl-Meyerov kut.

U jednačbama metode karakteristika kut strujanja u odnosu na horizontalu je označen simbolom  $\theta$ . Machov kut  $\alpha$  jest definiran kao  $\alpha = \arcsin (1/M)$ . jednačbe su referirane Slikom 31.



Slika 31. Prikaz karakterističnih linija pod Machovim kutom na strujnicu, [6]

Prema tome vrijedi:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{-} = \tan(\theta - \alpha) \quad (41)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{+} = \tan(\theta + \alpha) \quad (42)$$

$$\theta + v(M) = \text{constant} = K_{-}(\text{uzduž } C_{-}\text{ karakteristike}) \quad (43)$$

$$\theta - v(M) = \text{constant} = K_{+}(\text{uzduž } C_{+}\text{ karakteristike}) \quad (44)$$

$K_{-}$  i  $K_{+}$  su konstante duž njihovih pripadajućih karakteristika te su poznate kako Riemannove invarijante. Gdje vrijedi:

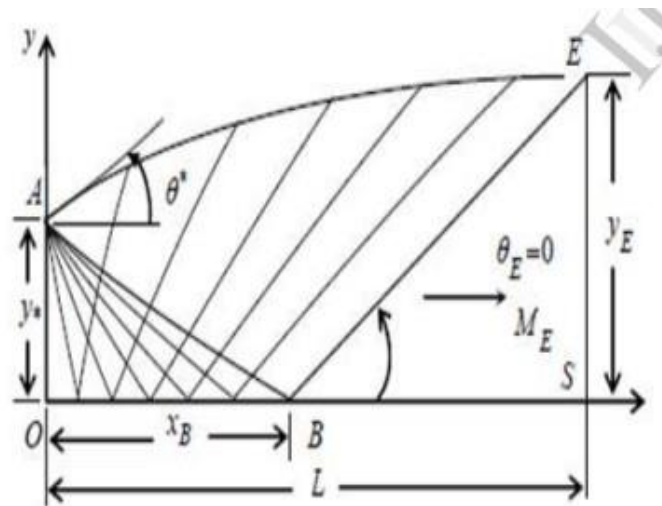
$$\theta = \frac{1}{2}(K_{-} + K_{+}) \quad (45)$$

$$v = \frac{1}{2}(K_{-} - K_{+}) \quad (46)$$

Metoda karakteristika omogućuje tehniku pravilnog dizajniranja konture nadzvučne mlaznice za izentropsko strujanje koje nema udarnih valova, uzimajući u obzir višedimenzionalno strujanje unutar kanala. Kao što je ranije spomenuto, raketne mlaznice su kratke kako bi se smanjila njihova masa. U takvim mlaznicama minimalne dužine, ekspanzijska sekcija je skraćena te se ekspanzija odvija kroz centralni Prandtl-Meyereov ekspanzijski val koji je

rezultat oštrog kuta grla u odnosu na kut  $\theta_{Wmax,ML}$  kako je prikazano na Slici 30. Duljina nadzvučne mlaznice, označena sa  $L$ , je minimalna vrijednost duljine kako bi strujanje bilo izentropsko, bez udarnih valova. Ukoliko je kontura kraća od izračunate duljine  $L$ , doći će do pojave udarnih valova unutar mlaznice.

Element fluida koji se kreće uzduž strujnice konstantno ubrzava prolazeći kroz reflektirajuće valove. Za mlaznicu minimalne duljine, kontura ekspanzije jest oštri kut na poziciji a, prikazan na Slici 30. Nema višestrukih refleksija valova te je element fluida izložen dvaju sustava valova. Desno proizlazeći valovi iz točke a i lijevo proizlazeći valovi iz točke d. Neka je  $v_M$  Prandtl-Meyerova funkcija povezana sa dizajnom za izlazni Machov broj. Stoga, uzduž  $C_+$  karakteristike „cb“,  $v = v_M = v_c = v_b$ . Nadalje, razmatra se  $C_-$  karakteristika kroz točke a i c.



Slika 32. Shema karakterističnih linija za mlaznicu minimalne duljine, [7]

U točki c, iz jednadžbe (43),

$$\theta_c + v_c = (K_-)_c \quad (47)$$

Međutim,  $\theta_c = 0$  i  $v_c = v_M$ . Stoga, iz gornje jednadžbe

$$(K_-)_c = v_M \quad (48)$$

U točki a, uzduž  $C_-$  karakteristike ac, iz jednadžbe (43),

$$\theta_{Wmax,ML} + v_M = (K_-)_a \quad (49)$$

Kako se radi o Prandtl-Meyerovoj ekspanziji u točki a sa početnim zvučnim uvjetima, poznato je da vrijedi  $\nu_a = \theta_{Wmax,ML}$ . Stoga, vrijedi:

$$\theta_{Wmax,ML} = \frac{1}{2}(K_-)_a \quad (50)$$

Također, uzduž karakteristike  $C_-$ ,  $(K_-)_a = (K_-)_c$ , stoga, jednačba (50) postaje

$$\theta_{Wmax,ML} = \frac{1}{2}(K_-)_c \quad (51)$$

Kombinacijom jednačbi (48) i (51) konačno se dobiva

$$\theta_{Wmax,ML} = \frac{\nu_M}{2} \quad (52)$$

Jednačba (52) ukazuje na to da za mlaznicu minimalne duljine, ekspanzijski kut zida niz grlo mlaznice je jednak polovini Prandtl-Meyerove funkcije za dizajnirani izlazni Machov broj. Ranije je spomenuto da je mlaznica dizajnirana na određeni optimalni izlazni Machov broj. Nadzvučna mlaznica preuzeta iz [6] dizajnirana je na izlazni Machov broj 2.4, konture zidova mlaznice dobivene su putem metode karakteristika koja je sažeto opisana u ovom poglavlju, a iznimno je važna pri projektiranju nadzvučne mlaznice [1] [6] [7] [8] [7].

## 6. ANALIZA CFD SIMULACIJA STRUJANJA

Računalna dinamika fluida (engl. *Computational Fluid Dynamics – CFD*) jest istovremeno korištenje primijenjene matematike, fizike i računalnih sustava, odnosno software-a kako bi se vizualiziralo strujanje fluida, kao i na koji način taj fluid utječe na objekt oko ili kroz kojeg struji. Računalna dinamika fluida bazirana je na Navier-Stokes-ovim jednadžbama. Za potrebe ovoga rada korišten je program Ansys Fluent, točnije Ansys Fluent Student koja je besplatna verzija programa, sa nešto manje alata, ali za potrebe simulacija strujanja kroz nadzvučnu mlaznicu u ovom radu je bio i više nego dovoljan. U ovom poglavlju biti će analizirani koraci pri korištenju programa, postavka sustava i alata za dobivene rezultate strujanja kroz nadzvučnu mlaznicu. Kao cilj, za kraj biti će uspoređeni rezultati strujanja u idealnom slučaju, te u slučaju gdje je utjecaj viskoznosti uzeta u obzir [9].

### 6.1. GEOMETRIJA NADZVUČNE MLAZNICE

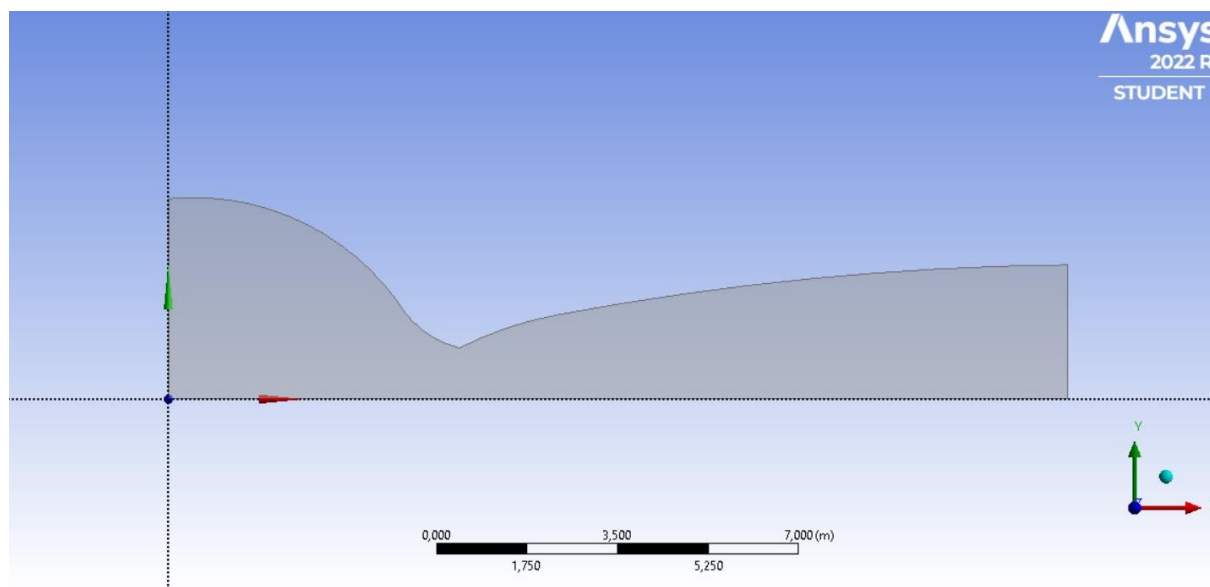
Model nadzvučne mlaznice korišten u ovome radu je modificiran i doraden koristeći već unaprijed izračunate koordinate divergentnog dijela mlaznice. Koordinate navedenog dijela mlaznice preuzete su iz [6]. Kako i sam naslov rada govori, metodom karakteristika izračunate su koordinate nadzvučne mlaznice, točnije, divergentnog dijela nadzvučne mlaznice. Koordinate i rezultati su izvedeni iz Matlab datoteke, te nakon modifikacije spremljene kao tekstualni dokument u kojem su bili definirani svi dijelovi mlaznice u obliku koordinata. Definicija svih dijelova mlaznice u dokumentu može se vidjeti na Slici 33. i 34. U prvom stupcu brojem 1 definiran je zid mlaznice, brojem 2 ulaz u mlaznicu, brojem 3 izlaz iz mlaznice, a brojem 4 definirana je simetrična os mlaznice. U drugom stupcu se može vidjeti broj točaka po određenom dijelu mlaznice, dok treći, četvrti i peti stupac čine redom  $x$ ,  $y$  i  $z$  os, odnosno vrijednosti točaka (u metrima) po tim osima. Tako je bilo potrebno definirati tekstualni dokument kako bi se isti mogao uvesti u Ansys geometriju, točnije u alat naziva *Design Modeler*. Nakon uvoza podataka generira se geometrija koja je vidljiva na Slici 35. Kao što je ranije navedeno, mlaznica je modificirana, odnosno divergentni dio mlaznice je proizvoljno dizajniran. Kako je ranije u radu navedeno divergentni dio mlaznice je manje bitan pri dizajnu te je on proizvoljno dizajniran, u obliku nekog kružnog luka koji se blagim prijelazom spaja sa grlom mlaznice.

|   |    |        |        |   |
|---|----|--------|--------|---|
| 1 | 1  | 0      | 3,8723 | 0 |
| 1 | 2  | 0,7680 | 3,8713 | 0 |
| 1 | 3  | 0,8775 | 3,8706 | 0 |
| 1 | 4  | 0,9870 | 3,8657 | 0 |
| 1 | 5  | 1,0965 | 3,8574 | 0 |
| 1 | 6  | 1,2058 | 3,8459 | 0 |
| 1 | 7  | 1,3150 | 3,8311 | 0 |
| 1 | 8  | 1,4240 | 3,8130 | 0 |
| 1 | 9  | 1,5328 | 3,7916 | 0 |
| 1 | 10 | 1,6413 | 3,7670 | 0 |
| 1 | 11 | 1,7496 | 3,7390 | 0 |
| 1 | 12 | 1,8576 | 3,7079 | 0 |
| 1 | 13 | 1,9651 | 3,6735 | 0 |
| 1 | 14 | 2,0723 | 3,6358 | 0 |
| 1 | 15 | 2,1791 | 3,5950 | 0 |
| 1 | 16 | 2,2854 | 3,5509 | 0 |
| 1 | 17 | 2,3912 | 3,5037 | 0 |
| 1 | 18 | 2,4965 | 3,4532 | 0 |
| 1 | 19 | 2,6013 | 3,3996 | 0 |
| 1 | 20 | 2,7054 | 3,3429 | 0 |
| 1 | 21 | 2,8089 | 3,2830 | 0 |
| 1 | 22 | 2,9117 | 3,2201 | 0 |
| 1 | 23 | 3,0138 | 3,1540 | 0 |
| 1 | 24 | 3,1152 | 3,0849 | 0 |
| 1 | 25 | 3,2159 | 3,0128 | 0 |
| 1 | 26 | 3,3157 | 2,9376 | 0 |
| 1 | 27 | 3,4147 | 2,8594 | 0 |
| 1 | 28 | 3,5129 | 2,7783 | 0 |
| 1 | 29 | 3,6101 | 2,6943 | 0 |
| 1 | 30 | 3,7064 | 2,6073 | 0 |
| 1 | 31 | 3,8018 | 2,5174 | 0 |
| 1 | 32 | 3,9025 | 2,4206 | 0 |
| 1 | 33 | 4,0123 | 2,3186 | 0 |
| 1 | 34 | 4,1158 | 2,2098 | 0 |
| 1 | 35 | 4,2096 | 2,1236 | 0 |
| 1 | 36 | 4,3102 | 2,0089 | 0 |
| 1 | 37 | 4,4099 | 1,9091 | 0 |
| 1 | 38 | 4,5164 | 1,8132 | 0 |
| 1 | 39 | 4,6078 | 1,7034 | 0 |

Slika 34. Drugi dio koordinata nadzvučne mlaznice, [9]

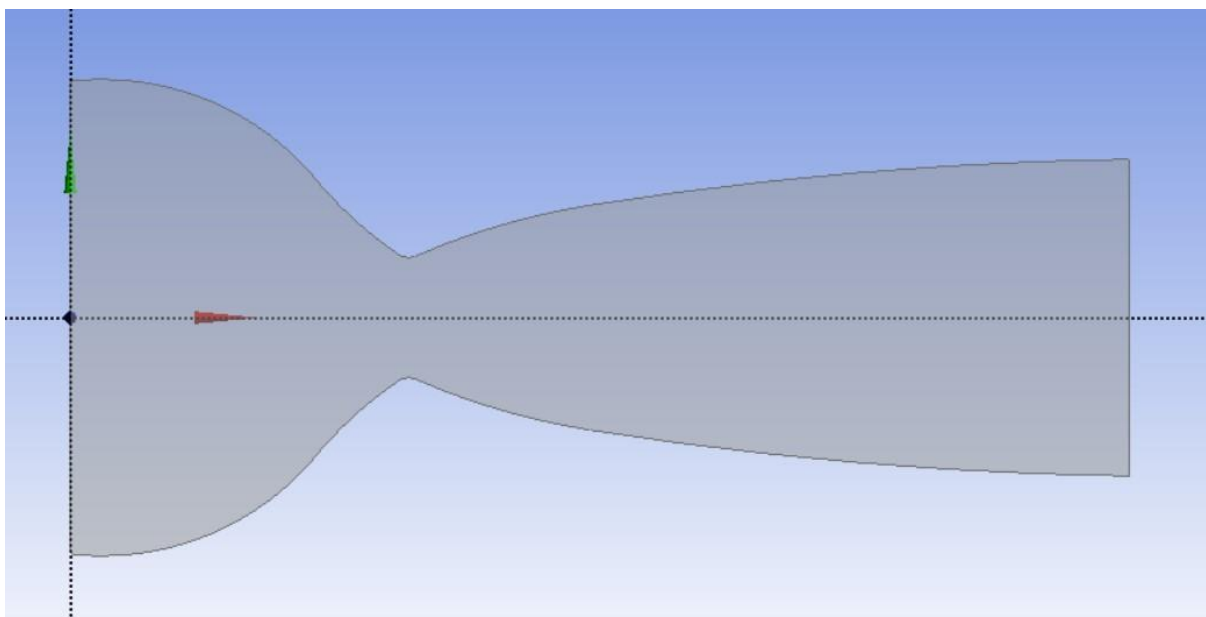
|   |    |         |        |   |
|---|----|---------|--------|---|
| 1 | 48 | 5,2373  | 1,1372 | 0 |
| 1 | 49 | 5,2513  | 1,1251 | 0 |
| 1 | 50 | 5,2654  | 1,1135 | 0 |
| 1 | 51 | 5,2796  | 1,1022 | 0 |
| 1 | 52 | 5,2939  | 1,0914 | 0 |
| 1 | 53 | 5,3084  | 1,0811 | 0 |
| 1 | 54 | 5,3229  | 1,0712 | 0 |
| 1 | 55 | 5,3376  | 1,0617 | 0 |
| 1 | 56 | 5,3524  | 1,0526 | 0 |
| 1 | 57 | 5,3672  | 1,0440 | 0 |
| 1 | 58 | 5,3822  | 1,0359 | 0 |
| 1 | 59 | 5,3972  | 1,0282 | 0 |
| 1 | 60 | 5,4123  | 1,0210 | 0 |
| 1 | 61 | 5,4275  | 1,0142 | 0 |
| 1 | 62 | 5,4428  | 1,0078 | 0 |
| 1 | 63 | 5,4581  | 1,0020 | 0 |
| 1 | 64 | 5,4654  | 1,0000 | 0 |
| 1 | 65 | 6,4578  | 1,4192 | 0 |
| 1 | 66 | 7,4956  | 1,6246 | 0 |
| 1 | 67 | 7,9157  | 1,7425 | 0 |
| 1 | 68 | 8,5374  | 1,8426 | 0 |
| 1 | 69 | 9,1550  | 1,9340 | 0 |
| 1 | 70 | 9,6989  | 2,0195 | 0 |
| 1 | 71 | 10,3385 | 2,1006 | 0 |
| 1 | 72 | 10,9974 | 2,1775 | 0 |
| 1 | 73 | 11,6799 | 2,2503 | 0 |
| 1 | 74 | 12,3896 | 2,3187 | 0 |
| 1 | 75 | 13,1302 | 2,3820 | 0 |
| 1 | 76 | 13,7701 | 2,4395 | 0 |
| 1 | 77 | 14,4217 | 2,4901 | 0 |
| 1 | 78 | 15,1437 | 2,5325 | 0 |
| 1 | 79 | 15,8323 | 2,5652 | 0 |
| 1 | 80 | 16,5744 | 2,5865 | 0 |
| 1 | 81 | 17,3800 | 2,5942 | 0 |
| 2 | 1  | 0       | 0      | 0 |
| 2 | 2  | 0       | 3,8723 | 0 |
| 3 | 1  | 0       | 0      | 0 |
| 3 | 2  | 17,3800 | 0      | 0 |
| 4 | 1  | 17,3800 | 0      | 0 |
| 4 | 2  | 17,3800 | 2,5942 | 0 |

Slika 33. Prvi dio koordinata nadzvučne mlaznice, [9]



Slika 35. Generirana geometrija u Design Modeler-u, [9]

Nakon generiranja geometrije, potrebno je napraviti jednoliku površinu omeđenu sa zidom, ulazom, izlazom i simetrijom mlaznice. Kako bi naredna analiza i vizualizacija strujanja kroz mlaznicu izgledala bolje, iskoristio se još jedan alat naziva *Mirror* te se time preko osi simetrije mlaznica precrtala i može se reći kompletirala. Konačna mlaznica nakon korištenja alata *Mirror* vidi se na Slici 36.

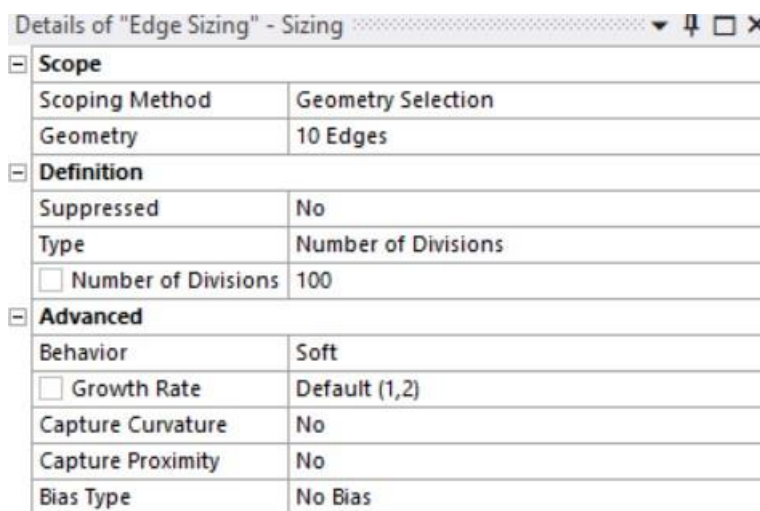


Slika 36. Konačna geometrija nadzvučne mlaznice, [9]

Nakon konačnog generiranja geometrije mlaznice, slijedeći korak je napraviti mrežu mlaznice, odnosno generirati mrežu u alatu za generiranje mreže (engl. *Meshing*). Mreža služi kako bi se vizualizirale karakteristike strujanja fluida u različitim dijelovima mlaznice, odnosno kako bi se određena svojstva prikazala kako se mijenjaju kroz mlaznicu [10] [9].

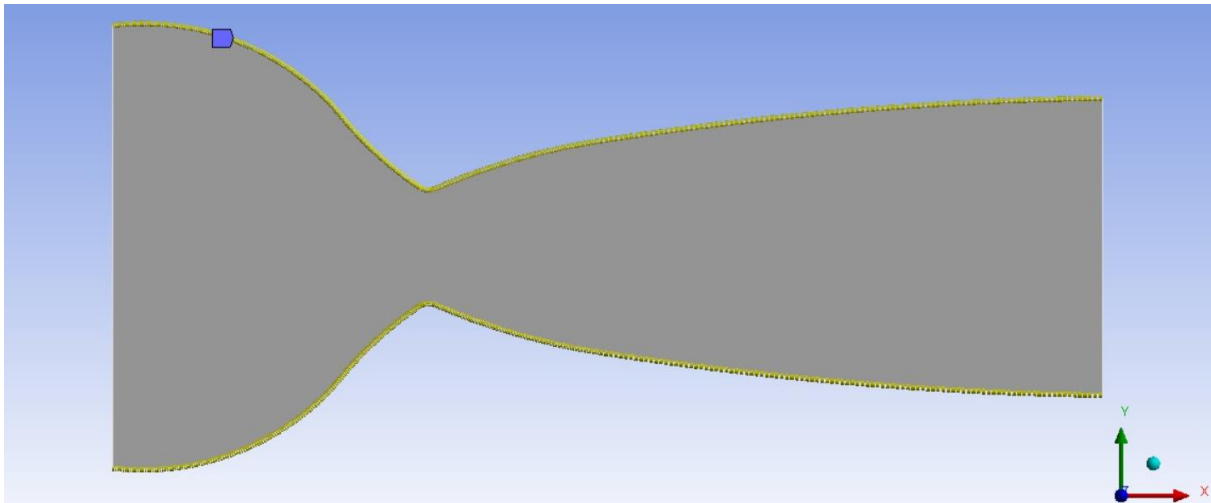
## 6.2. GENERIRANJE MREŽE ZA ANALIZU NEVISKOZNOG STRUJANJA

Za početak kako bi se pravilno generirala mreža, potrebno je napraviti dimenzioniranje rubova, odnosno dimenzioniranje zida mlaznice, te posebno ulaza i izlaza u, odnosno iz mlaznice. Podjela zidova mlaznice određena je na broj od 100 podjela, sučelje za dimenzioniranje rubova vidi se na Slici 37. Na Slici 38. vidi se kako se model mlaznice podijelio na 100 dijelova, točnije zidovi mlaznice.



Slika 37. Detalji dimenzioniranja rubova zida mlaznice, [9]



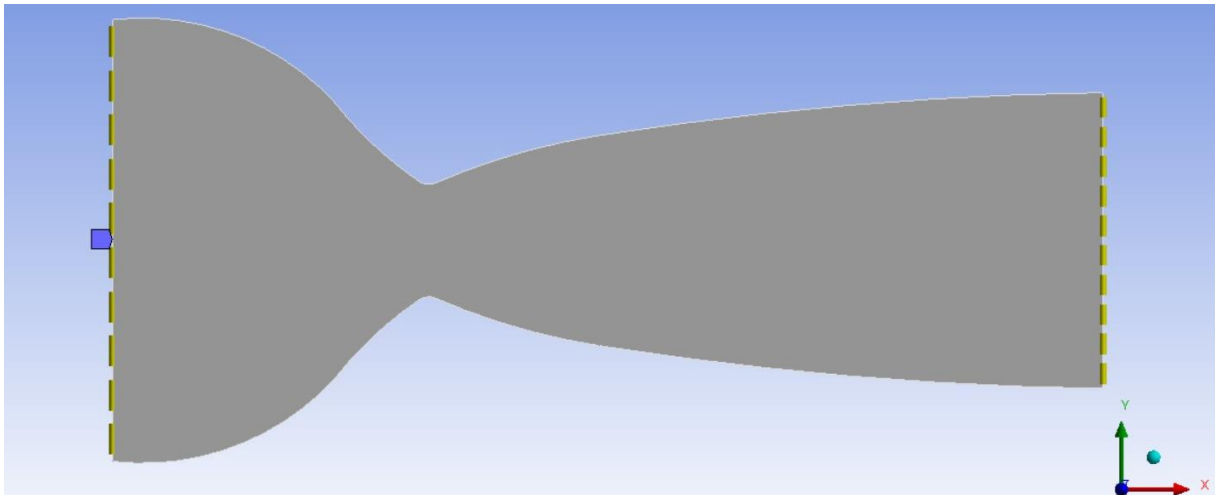


Slika 38. Zidovi mlaznice podijeljeni na 100 dijelova, [9]

Također, podjela je napravljena i za ulaz i izlaz iz mlaznice, u ovom slučaju podjela je napravljena na 10 dijelova kako bi se dobila jedna lijepo i blago distribuirana mreža. Ova podjela je napravljena standardno bez ikakvih dodataka i efekata jer se radi o neviskoznom strujanju. Kod vizualizacije viskoznog strujanja bilo je potrebno napraviti novu mrežu, što je analizirano nešto kasnije. Detalji dimenzioniranja i sama podjela ulaza i izlaza mlaznice može se vidjeti redom sa Slika 39. i 40.

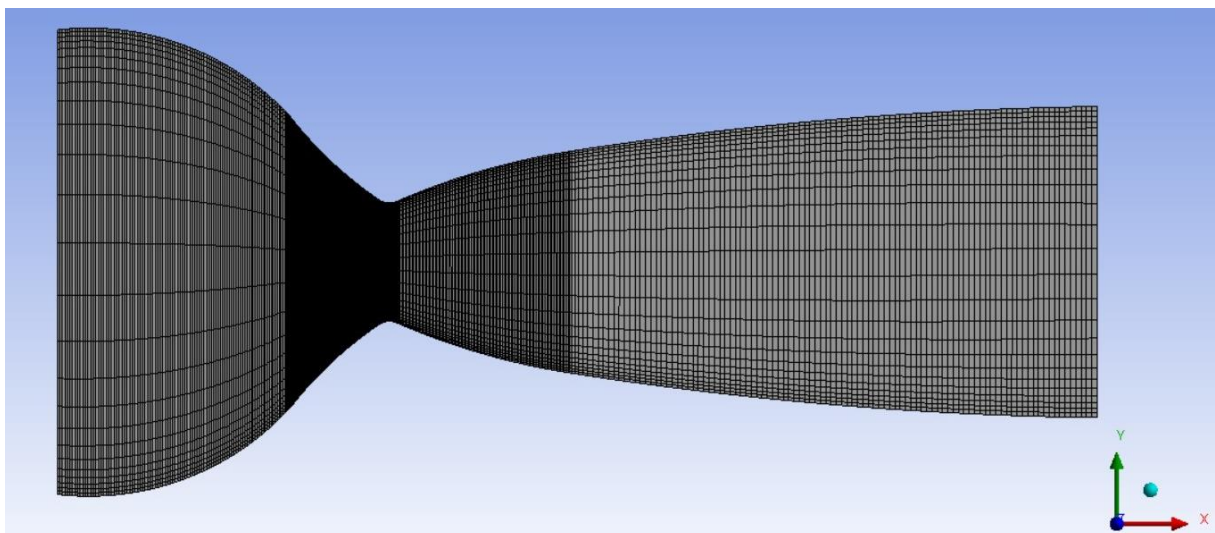
| Details of "Edge Sizing 2" - Sizing          |                     |
|--|---------------------|
| <b>Scope</b>                                 |                     |
| Scoping Method                               | Geometry Selection  |
| Geometry                                     | 2 Edges             |
| <b>Definition</b>                            |                     |
| Suppressed                                   | No                  |
| Type   | Number of Divisions |
| <input type="checkbox"/> Number of Divisions | 10                  |
| <b>Advanced</b>                              |                     |
| Behavior                                     | Soft                |
| <input type="checkbox"/> Growth Rate         | Default (1,2)       |
| Capture Curvature                            | No                  |
| Capture Proximity                            | No                  |
| Bias Type                                    | No Bias             |

Slika 39. Detalji dimenzioniranja ulaza i izlaza mlaznice, [9]



Slika 40. Ulaz i izlaz mlaznice podijeljeni na 10 dijelova, [9]

Nadalje, vidi se konačna generirana mreža nadzvučne mlaznice na Slici 41. U tom trenutku mlaznica je spremna za vizualizacije. Kako podzvučni dio mlaznice konvergira prema grlu, tu je koncentracija mreže, odnosno kvadratića i pravokutnika mreže veća, pa se samim time dio zacrnio kao što je vidljivo sa Slike 41. Međutim, kada bi se približio prikaz lijepo bi se raspoznala mreža na tom dijelu mlaznice [10].



Slika 41. Konačna generirana mreža mlaznice u slučaju neviskoznostrujanja, [9]

### 6.3. ANALIZA NEVISKOZNOG STRUJANJA KROZ NADZVUČNU MLAZNICU

Nakon uspješnog generiranja mreže nadzvučne mlaznice potrebno je odrediti početne uvjete, metode, vrstu strujanja, te tražene parametre prije nego se krene na samu vizualizaciju karakteristika strujanja kroz nadzvučnu mlaznicu. Za početak kao vrsta strujanja odabrano je neviskozno strujanje. Zatim, neki od parametara koji su bili definirani prikazani su u Tablici 1. Kao fluid za strujanje odabran je idealni plin čija su svojstva navedena u Tablici 2.

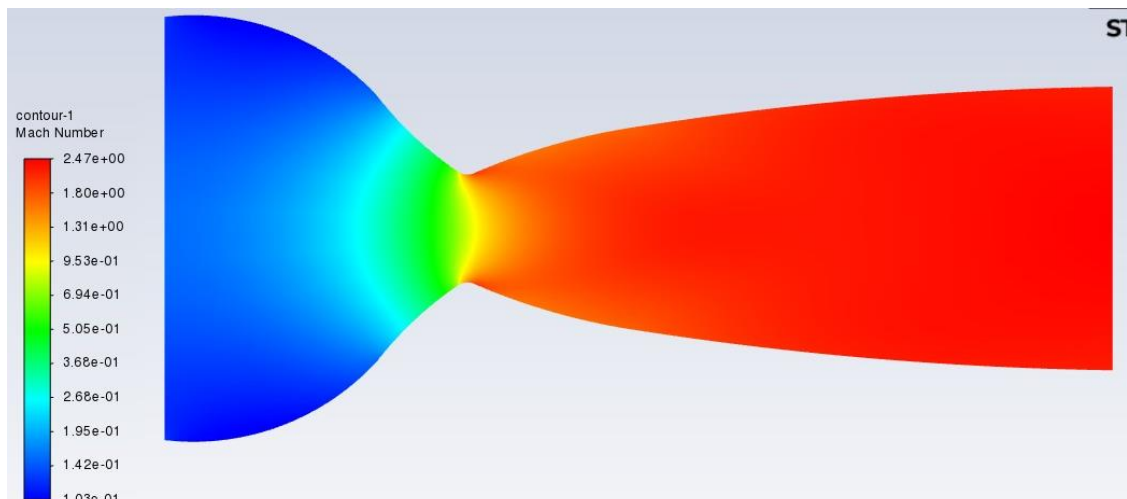
Tablica 1. Inicijalni uvjeti

| Inicijalni uvjeti                         | Vrijednost  |
|---|-------------|
| Tlak sustava pri inicijalizaciji rješenja | 50000 [Pa]  |
| Tlak na ulazu u mlaznicu                  | 101325 [Pa] |
| Brzina u smjeru osi $x$                   | 30 [m/s]    |
| Brzina u smjeru osi $y$                   | 0 [m/s]     |
| Temperatura                               | 288.15 [K]  |

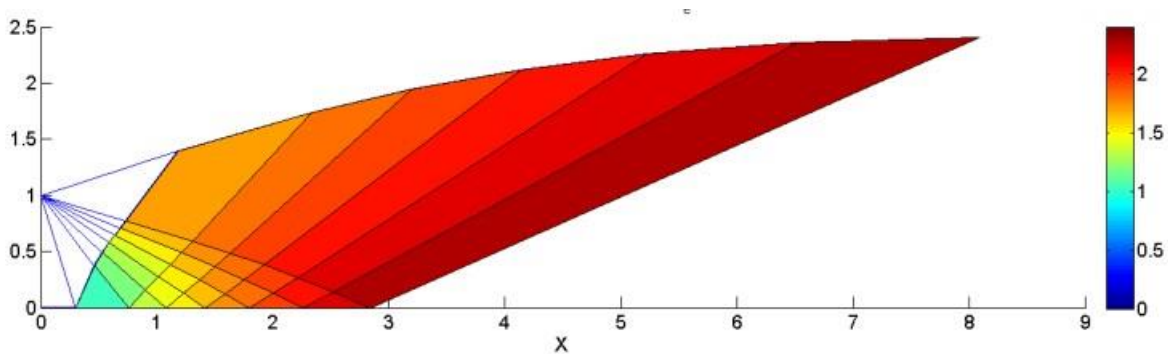
Tablica 2. Svojstva idealnog plina

| Svojstva idealnog plina    | Vrijednost       |
|----------------------------|------------------|
| $C_p$ (Specifična toplina) | 1006.43 [J/kg K] |
| Molekularna masa           | 28.966 [kg/kmol] |

Simulacija za neviskozno strujanje konvergirala je do određene tolerancije nakon nešto više od 2300 ponavljanja. Karakteristike strujanja plina kroz nadzvučni model mlaznice prikazane su u Slikama 42., 44., 46. i 47. Primjeri sličnih vizualizacija konture mlaznice kao i karakteristika strujanja plina kroz istu prikazane su paralelno Slikama 43., 45. i 48. ispod promjene Machovog broja, tlaka i temperature, preuzete iz [6].

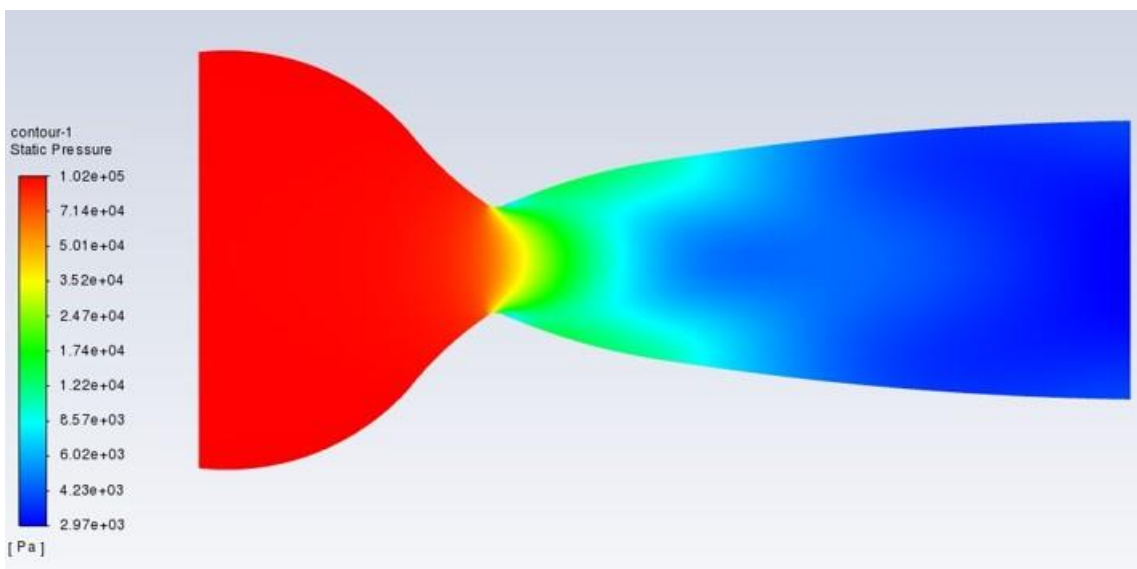


Slika 42. Distribucija Machovog broja pri neviskoznom strujanju, [9]

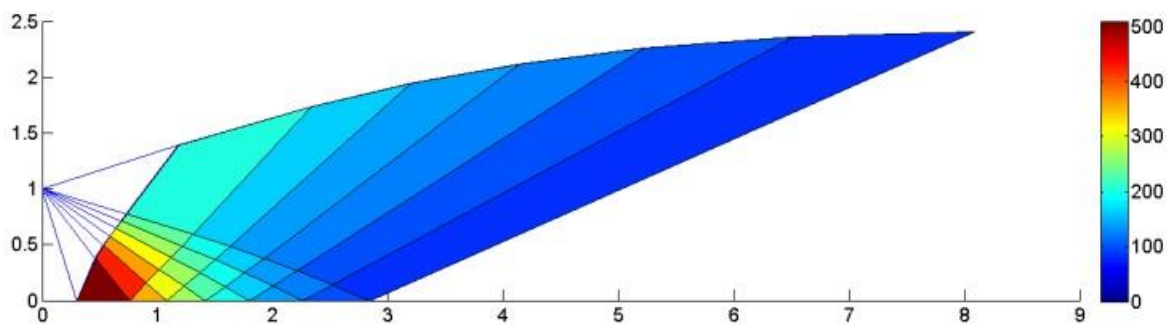


Slika 43. Promjena Machovog broja u konturi mlaznice, [6]

Na Slikama 42. i 43. valja primijetiti da je postignut Machov broj na izlazu iz mlaznice približno vrijednosti 2.4. Ta vrijednost odgovara vrijednosti Machovog broja koja je izračunata u [6]. Samim time, ovaj modificirani model mlaznice je uspješan. Također, lijepo se vidi ubrzanje fluida u konvergentnom, odnosno podzvučnom dijelu mlaznice, postizanje zvučnih uvjeta u grlu te ubrzanje struje fluida u divergentnom dijelu mlaznice.

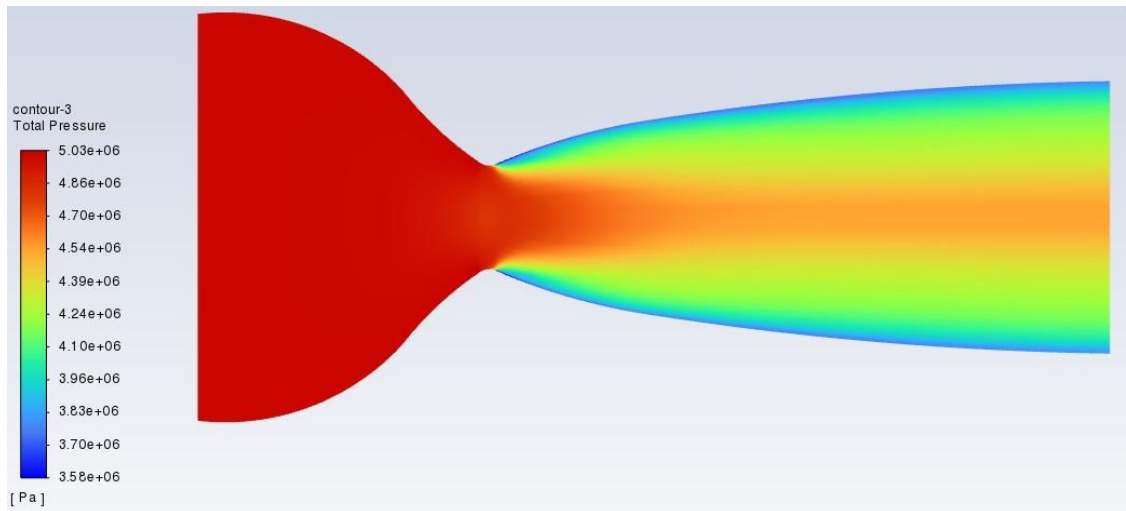


Slika 44. Distribucija statičkog tlaka pri neviskoznom strujanju, [9]

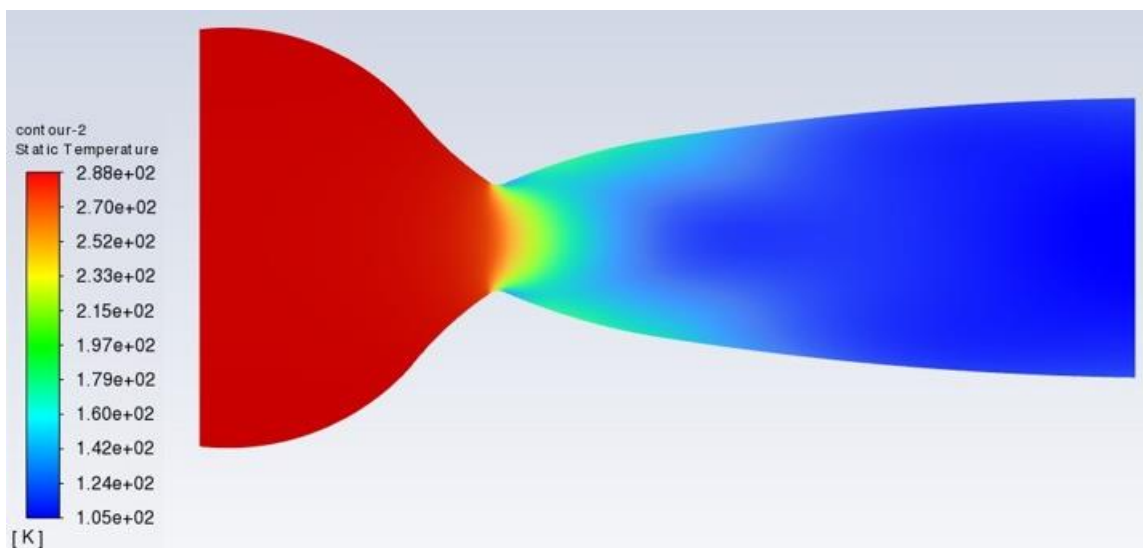


Slika 45. Promjena statičkog tlaka kroz konturu mlaznice, [6]

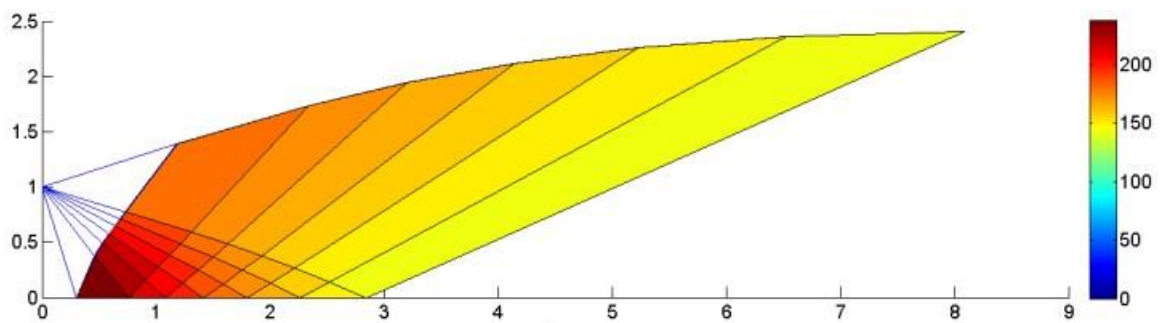
Na Slici 44. lijepo se može primijetiti područje visokog tlaka u podzvučnom dijelu mlaznice te područje nižeg tlaka u nadzvučnom dijelu mlaznice.



Slika 46. Distribucija totalnog tlaka kroz mlaznicu pri neviskoznom strujanju, [9]

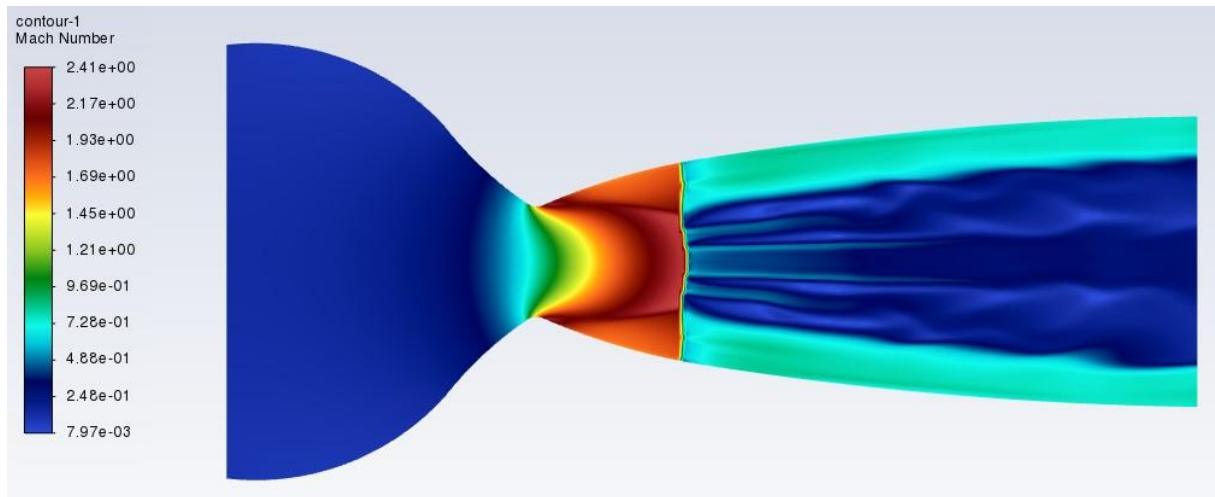


Slika 47. Distribucija temperature kroz mlaznicu pri neviskoznom strujanju, [9]



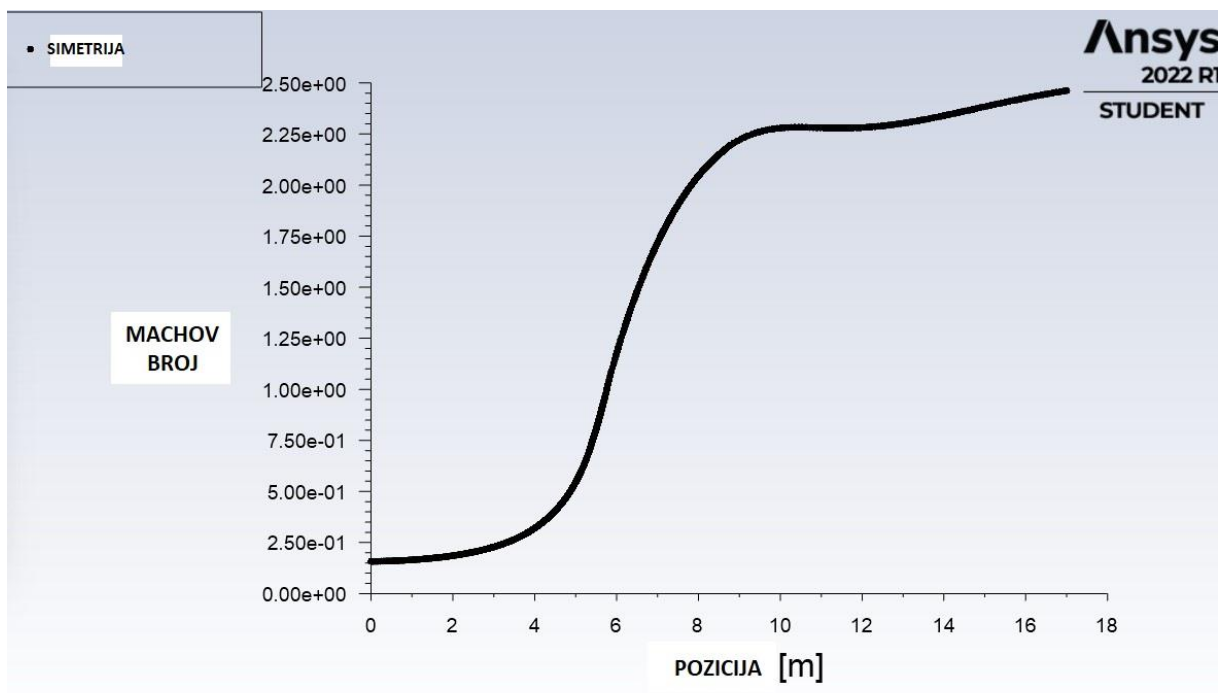
Slika 48. Promjena temperature kroz konturu mlaznice, [6]

Na Slikama 46. i 47. redom vidi se distribucija totalnog tlaka i temperature kroz mlaznicu. Na Slici 49. prikazana je situacija pojave normalnog udarnog vala u mlaznici koja je objašnjena i prikazana shemom na Slici 17. ranije u radu. Vizualizacija pojave normalnog udarnog vala lijepo se može vidjeti, kao i usporenje strujanja fluida sa nadzvučne na podzvučnu brzinu iza udarnog vala. Također, graf distribucije Machovog broja kroz mlaznicu prikazan je na Slici 50.

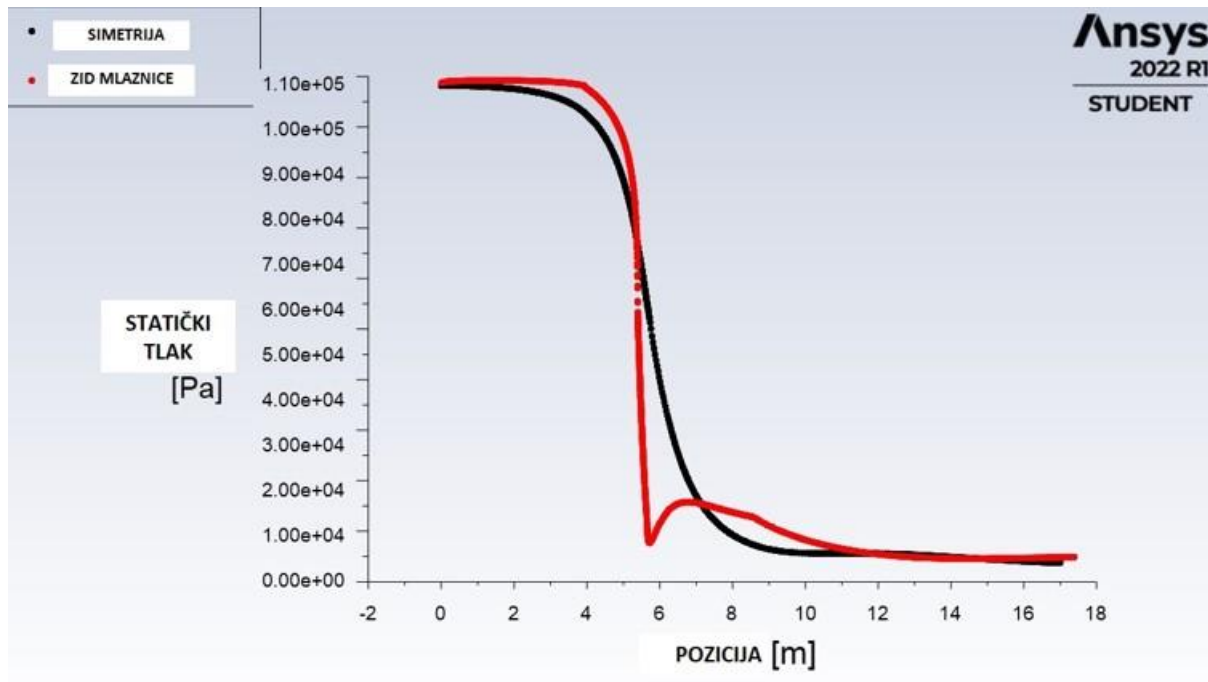


Slika 49. Pojava normalnog udarnog vala unutar mlaznice

Nadalje, na Slici 51. vidi se grafički prikaz distribucije statičkog tlaka paralelno na zidu mlaznice i na osi simetrije. Pitanje je koje od ova dva rješenja valja koristiti za validaciju i usporedbu sa analitičkim modeliranjem i korištenjem odnosa površine i Machovog broja za analitički izračun karakteristika strujanja fluida kroz mlaznicu.



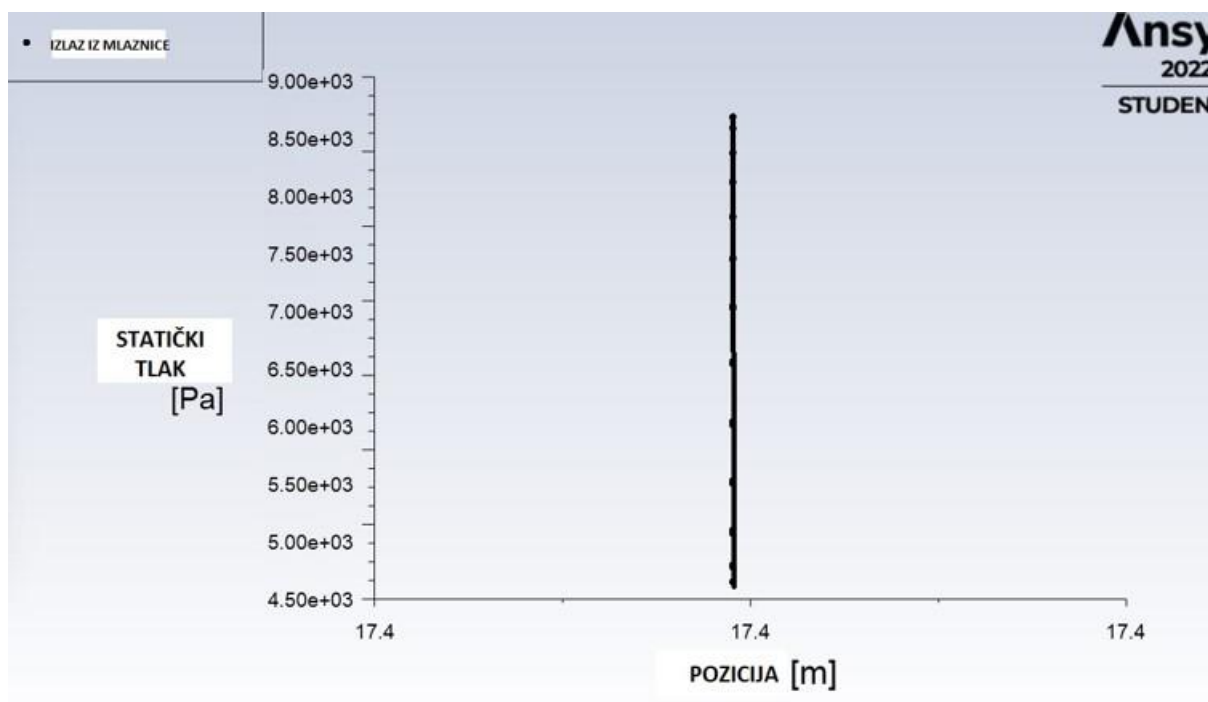
Slika 50. Graf promjene Machovog broja kroz mlaznicu



Slika 51. Grafički prikaz raspodjele tlaka na osi simetrije i zidu mlaznice, [9]

Jedini ispravan odgovor je da niti jedna od ovih krivulja ne može biti korištena za validaciju, zato što krivulje prikazane na grafu predstavljaju samo određene parametre na nekim točkama. Na primjer na Slici 52. grafički je prikazana distribucija tlaka na izlazu iz mlaznice koja se kreće okvirno od vrijednosti 4500 Pa do 9000 Pa, međutim jedna vrijednost u tom rasponu postoji koja se dobije analitičkim rješenjem. To rješenje se može dobiti preko površine integrala (engl. *Surface Integral*) koja je jedna od metoda za dobivanja rješenja, te je ona relevantna za usporedbu i validaciju rješenja sa onim rješenjima koja su dobivena analitički.

Ovime se zaključuje analiza neviskoznog strujanja i simulacije karakteristika strujanja fluida kroz nadzvučnu mlaznicu, u slijedećem poglavlju biti će prikazano strujanje kada je u obzir uzeta viskoznost [10] [9].



Slika 52. Grafički prikaz distribucija tlaka na izlazu iz mlaznice, [9]

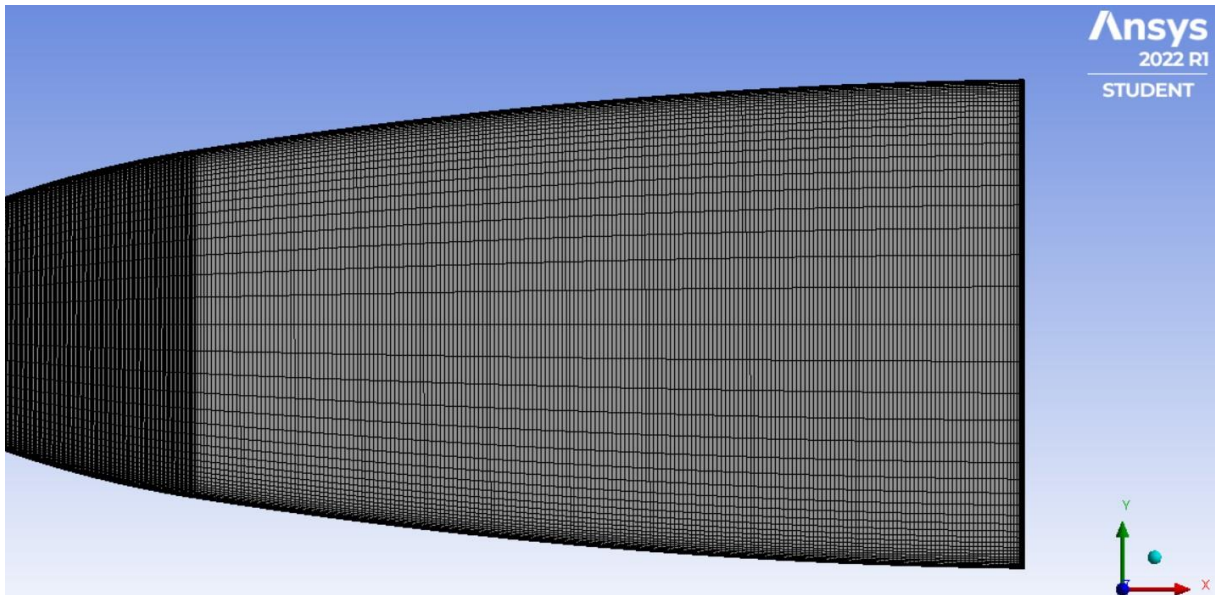
#### 6.4. GENERIRANJE MREŽE I ANALIZA VISKOZNOG STRUJANJA KROZ MLAZNICU

Kako bi se moglo pravilno simulirati i vizualizirati viskozno strujanje kroz mlaznicu, prvo je potrebno napraviti, odnosno generirati mrežu mlaznice za viskozno strujanje. To se radi na potpuno isti način kako je ranije objašnjeno za neviskozno strujanje, uz jedan dodatak, a to je napraviti mrežu koja je prema zidovima mlaznice sve gušća, kako bi do izražaja mogao doći granični sloj koji se javlja u viskoznom strujanju. To se postiže na način da se pri dimenzioniranju ulaza i izlaza iz mlaznice, po y osi aplicira faktor nagiba mreže mlaznice (engl. *Bias Factor*) koji je prikazan na Slici 53. Ovisno o modelu mlaznice i broju podjela zidova, ulaza i izlaza mlaznice, faktor nagiba se određuje po osjećaju, odnosno isproba se više vrijednosti faktora, sve dok se ne dobije zadovoljavajući izgled mreže koji se može upotrijebiti za analizu viskoznog strujanja. U ovom slučaju odgovarao je faktor nagiba 70. Nakon toga generira se nova mreža mlaznice koja je prikazana na Slici 54.

|                                      |             |
|--------------------------------------|-------------|
| Bias Type                            | - - - - -   |
| Bias Option                          | Bias Factor |
| <input type="checkbox"/> Bias Factor | 70,         |

Slika 53. Faktor nagiba mreže mlaznice, [9]

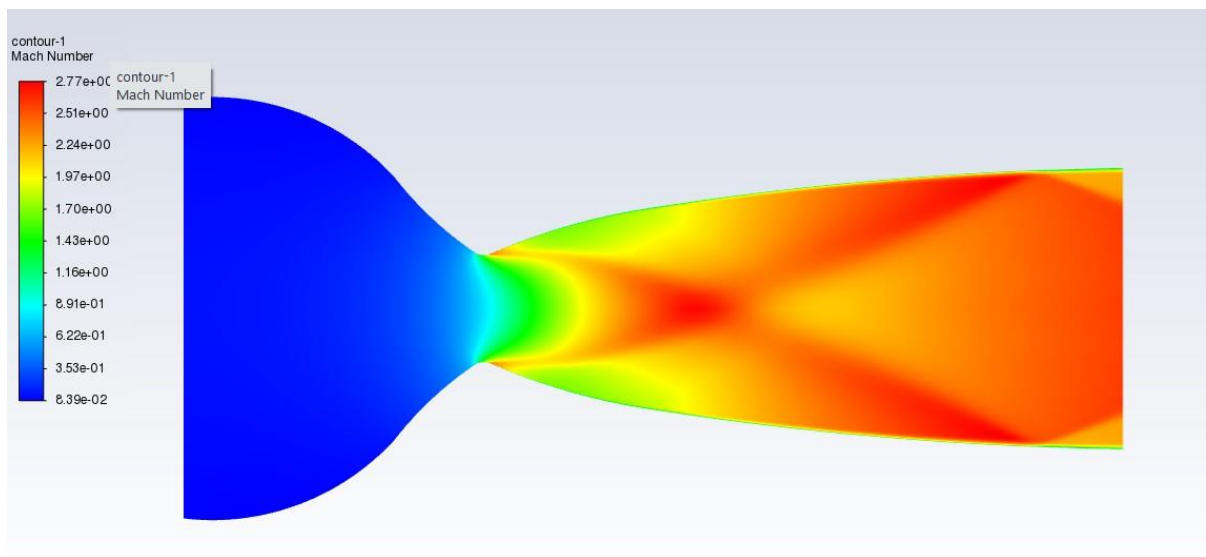




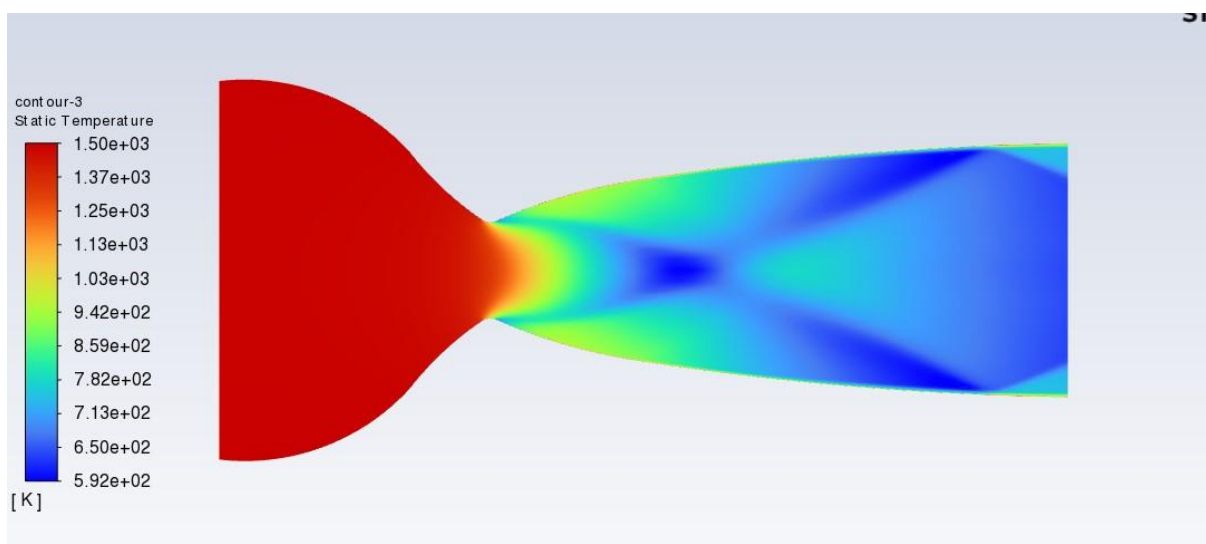
Slika 54. Generirana mreža mlaznice za viskozno strujanje, [9]

Na Slici 54. valja primijetiti kako se koncentracija mreže povećava prema zidovima mlaznice. To je nužno generirati kako bi naknadna simulacija viskoznog strujanja bila uspješna, upravo zbog pojave graničnog sloja pri utjecaju trenja, mehanizma prijenosa topline itd. nakon uspješnog generiranja mreže, preostaje još jedna stvar koju valja promijeniti u odnosu na neviskozno strujanje, a to je upravo model strujanja fluida. Umjesto Neviskoznog strujanja fluida odabire se viskozno strujanje, točnije k-omega model viskoznog strujanja koji je više fokusiran na promijene u graničnom sloju, što je i za potrebe ovog rada potrebno.

Simulacija za viskozno strujanje konvergirala je do određene tolerancije nakon nešto više od 3500 ponavljanja, odnosno iteracija. Nakon toga mogle su se prikazati karakteristike strujanja kroz mlaznicu pri viskoznom strujanju. Na Slikama 55. i 56. vidi se redosljedom distribucija Machovog broja i temperature kroz mlaznicu kada se radi o viskoznom strujanju.



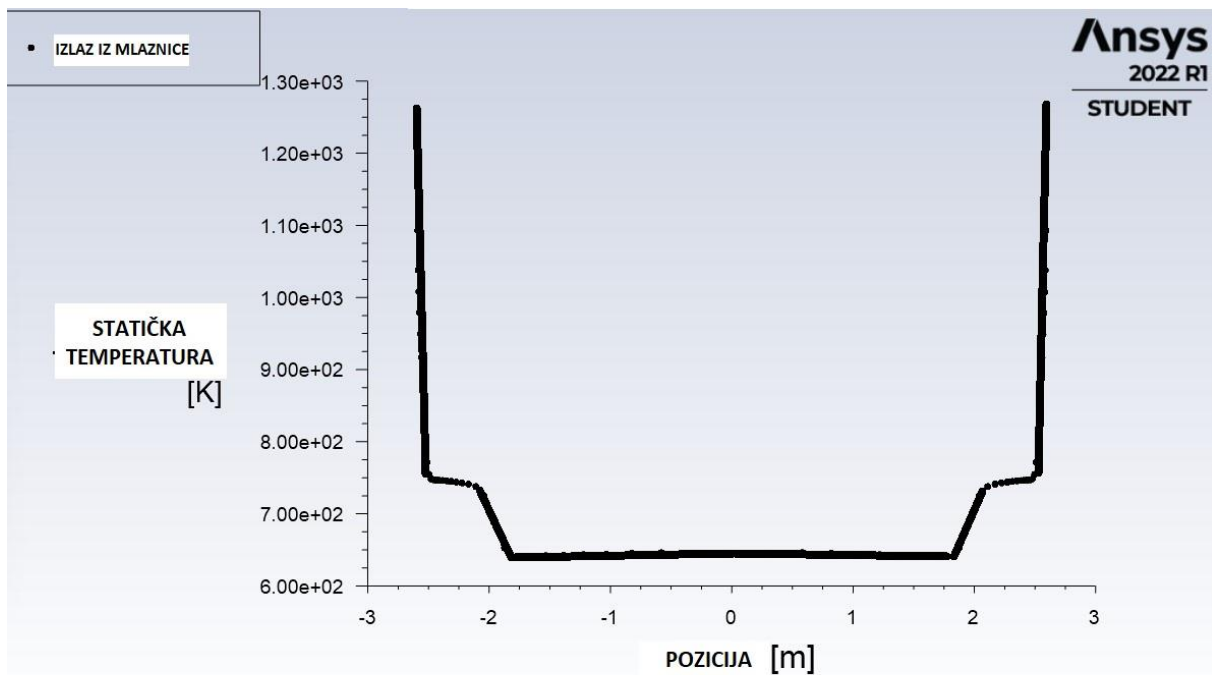
Slika 55. Distribucija Machovog broja kroz mlaznicu pri viskoznom strujanju, [9]



Slika 56. Distribucija temperature kroz mlaznicu pri viskoznom strujanju, [9]

Kako je prikazano na Slici 55. može se zamijetiti pojava graničnog sloja na zidovima mlaznice uslijed pojave viskoznosti, odnosno trenja fluida i toplinske vodljivosti. Granični sloj postoji zbog već navedenog stanja bez klizanja nametnutog na zid mlaznice. Prema izlazu iz mlaznice granični sloj je sve deblji. Zbog stanja bez klizanja sloj fluida na površini zidova mlaznice ima brzinu jednaku nuli. Sloj fluida iznad toga nije u kontaktu sa zidom mlaznice, ali je u kontaktu sa slojem fluida koji miruje, samim time ga taj sloj usporava. Konačno, visina, odnosno položaj samog graničnog sloja definiran je u točki gdje je brzina strujanja fluida 99% brzine strujanja u jezgri mlaznice. Zbog turbulencija u strujanju i poremećaja uz zidove mlaznice uslijed

utjecaja trenja, viskoznosti itd., neviskozno strujanje na osi simetrije je manjeg intenziteta. Kao posljedica toga, izlazni Machov broj je nešto manje vrijednosti. Poremećaji unutar mlaznice uslijed viskoznog strujanja također su vidljivi na Slici 55. Za kraj analize distribucije Machovog broja, valja naglasiti kako je granični sloj u podzvučnom dijelu mlaznice praktički nevidljiv. Distribuciju temperature moguće je vidjeti na Slici 56. Može se zamijetiti porast temperature prema zidovima mlaznice. Također, grafički prikaz na Slici 57. to potvrđuje, vidi se porast temperature prema zidovima mlaznice, graf je simetričan, zato što je prikazana krivulja od gornjeg i donjeg dijela mlaznice koji je simetričan oko osi simetrije mlaznice, tako da vrijednosti koje su u minusu vrijede za donji dio mlaznice, a one u plusu vrijede za gornji dio mlaznice. U oba slučaja primijeti se porast temperature uslijed pojave trenja blizu zidova mlaznice gdje se pojavljuje granični sloj. Zaključno, iz priloženog vide se jasni efekti viskoznog strujanja u odnosu na neviskozno strujanje, te efekti pojave graničnog sloja uz zidove mlaznice.

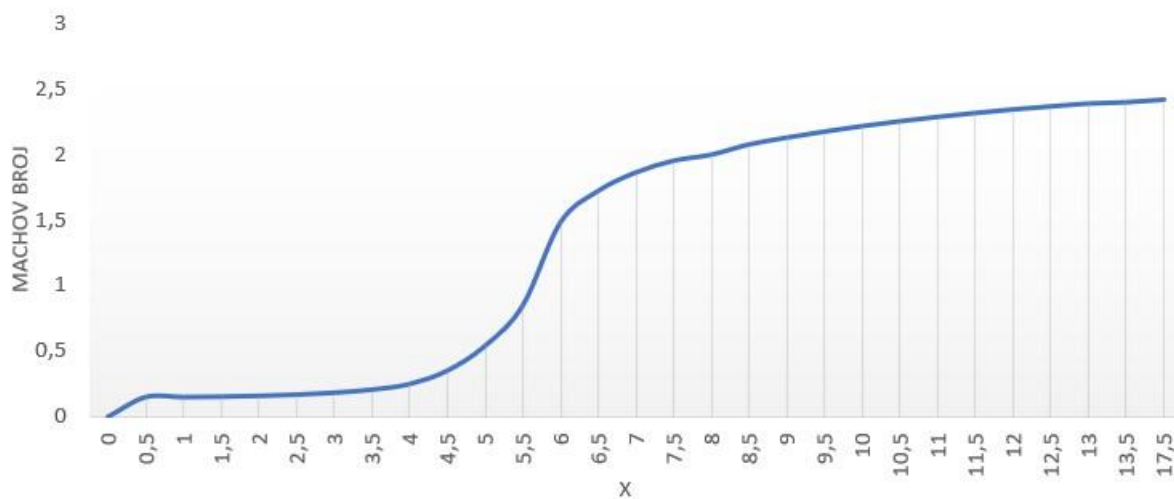


Slika 57. Distribucija temperature pri viskoznom strujanju, [9]

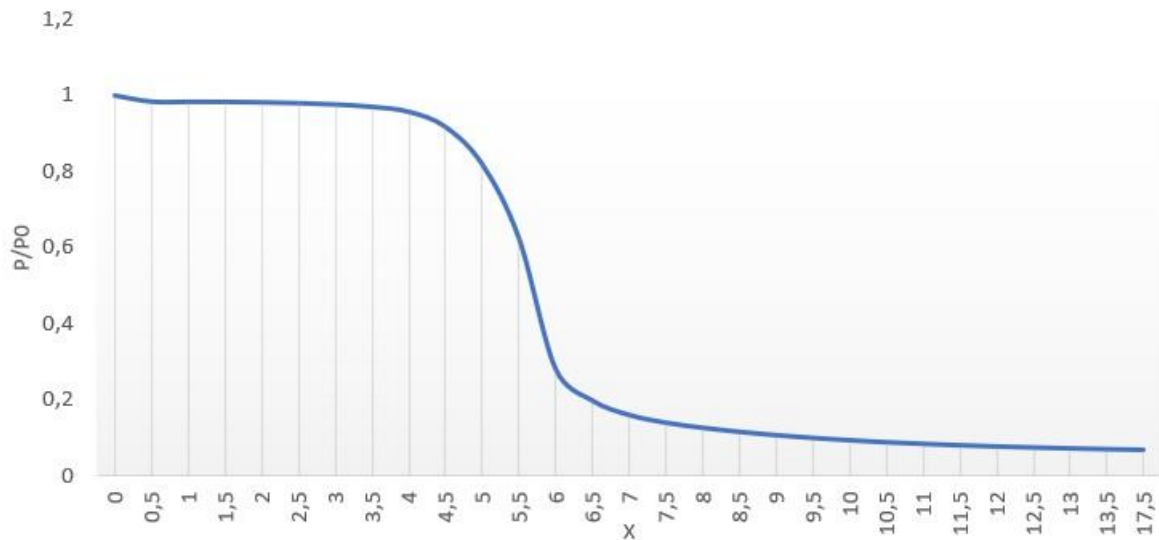
Za kraj ove analize izrađena je tablica u kojoj su podaci dobiveni pomoću formula izentropskih relacija, gdje se računala ovisnost Machovog broja, tlaka i temperature duž mlaznice. Podaci su također prikazani i grafički. Samim time moguće je usporediti analitičko rješenje sa rješenjima u simulacijama i grafičkim prikazima dobivenih iz simuliranih uvjeta unutar Ansys Fluent.

Tablica 3. Analitičko rješenje karakteristika strujanja kroz nadzvučnu mlaznicu

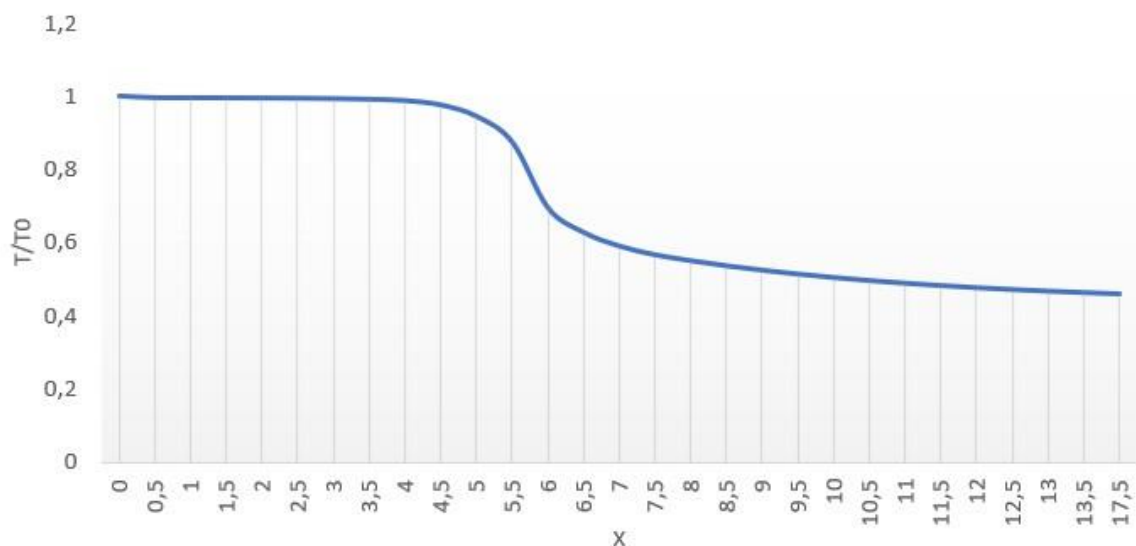
| $x(m)$ | $A/A^*$ | $Ma$    | $p/p_0$ | $p [Pa]$ | $T/T_0$ | $T [K]$ |
|--------|---------|---------|---------|----------|---------|---------|
| 0      | 3,872   | 0       | 1       | 101325   | 1       | 288,15  |
| 1      | 3,868   | 0,15168 | 0,9849  | 99693    | 0,9955  | 286,7   |
| 2      | 3,654   | 0,16084 | 0,98209 | 99510    | 0,9948  | 286,6   |
| 3      | 3,196   | 0,18480 | 0,97645 | 98938    | 0,9932  | 286,1   |
| 4      | 2,396   | 0,25075 | 0,95720 | 96988    | 0,9875  | 284,5   |
| 5      | 1,268   | 0,54147 | 0,81918 | 83003    | 0,9446  | 272,18  |
| 6      | 1       | 1       | 0,528   | 53499    | 0,833   | 240,02  |
| 7      | 1,512   | 1,48320 | 0,15768 | 15976    | 0,5899  | 170     |
| 8      | 1,717   | 1,86432 | 0,1237  | 12537    | 0,55    | 158,48  |
| 9      | 1,886   | 2       | 0,10427 | 10565    | 0,524   | 151     |
| 10     | 2,037   | 2,21780 | 0,0909  | 9210     | 0,504   | 145,22  |
| 11     | 2,170   | 2,228   | 0,0814  | 8247     | 0,4884  | 140,73  |
| 12     | 2,285   | 2,345   | 0,0745  | 7548     | 0,4762  | 137,21  |
| 13     | 2,381   | 2,3899  | 0,06947 | 7039     | 0,4667  | 134,49  |
| 17     | 2,423   | 2,4     | 0,0657  | 6657     | 0,4594  | 133     |



Slika 58. Grafički prikaz ovisnosti Machovog broja sa udaljenosti kroz mlaznicu, [9]



Slika 59. Grafički prikaz ovisnosti  $p/p_0$  sa udaljenosti kroz mlaznicu, [9]

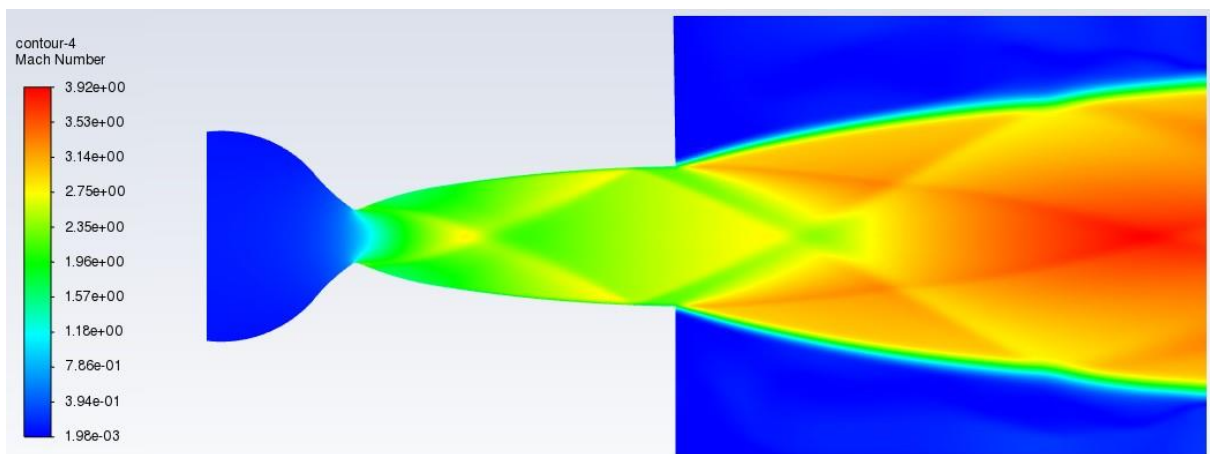


Slika 60. Grafički prikaz ovisnosti  $T/T_0$  sa udaljenosti kroz mlaznicu, [9]

Na Slikama 58., 59, i 60. redom se vide grafički prikazi ovisnosti Machovog broja, tlaka i temperature sa udaljenosti kroz mlaznicu. za izračun svih podataka uzimao se svaki metar duž mlaznice te su se onda računali navedeni parametri. Pomoću alata za mjerenje u Ansysu mjeren je presjek mlaznice, odnosno na kraju u tablici prikazan je odnos presjeka neke udaljenosti u mlaznici sa presjekom grla mlaznice. Nakon popunjavanja tablice, rezultati su uneseni u Excel te su se tamo izradili grafički prikazi navedenih ovisnosti. Može se primijetiti da se rezultati podudaraju sa onima prikazanim u simulacijama, kao i sa onima koji su prikazani i preuzeti iz [6]. Također, grafički prikazi su usporedivi sa prikazima na Slikama 10., 11. i 12 [6] [9] [10].

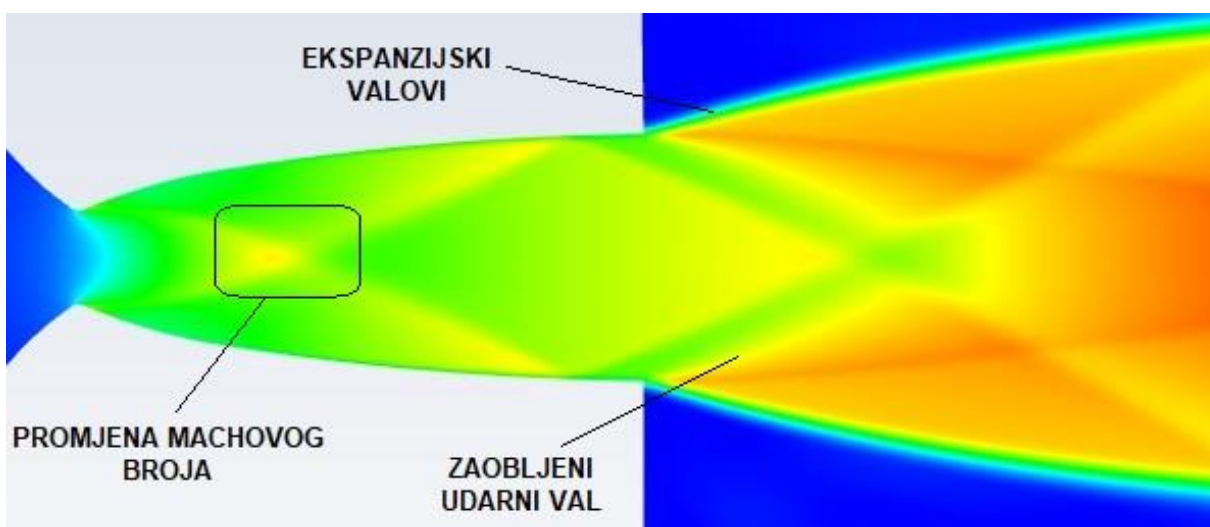
## 6.5. ANALIZA PODEKSPANDIRANE I PREEKSPANDIRANE MLAZNICE

Mlaznica se može nazvati podekspandiranom kada je tlak na izlazu mlaznice veći od onoga u okolini, dok je u slučaju preekspandirane mlaznice obrnuto, odnosno tlak na izlazu mlaznice jest manji nego onaj u okolini u kojoj se nalazi mlaznica. Podekspandirana mlaznica se može prepoznati po strujanju koje se ekspankira prema vani, kao što je prikazano na Slici 61. razlog zašto strujanje ekspankira prema vani je taj da ciljano mora dostići tlak okoline kako je tlak na izlazu manji kada se govori o podekspandiranoj mlaznici, kako je i ranije u radu objašnjeno.



Slika 61. Simulacija podekspandirane mlaznice, [9]

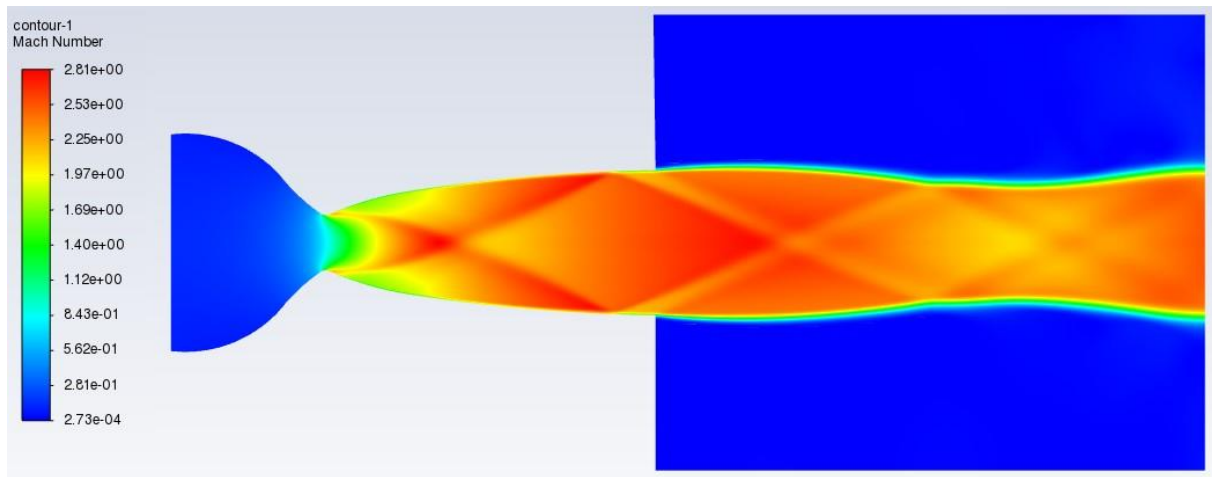
Na izlazu iz mlaznice valja zamijetiti zaobljeni udarni val te ekspanzijske valove, navedeno je prikazano na Slici 62. Struja plina nije dobro ekspandirana pa dolazi do velikih promjena u Machovom broju, kao što se vidi na Slici 62.



Slika 62. Promjena Machovog broja, ekspanzijski valovi, zaobljeni udarni val, [9]

Kada se promatra os simetrije mlaznice, strujanje bi trebalo biti paralelno sa osi, međutim dolazi do reflektirajućih valova kako strujanje ne smije preći os simetrije, ona zapravo predstavlja još jedan dodatan zid mlaznice. Kada se radi o viskoznom strujanju, nakon izlaza strujanja iz mlaznice, utjecaj viskoznosti opada, te se turbulencije i smetnje smanjuju sa brojem ciklusa, također, to je vidljivo na Slici 61. i 62.

Kada je riječ o preekspandiranoj mlaznici, radi se o tome da je došlo do više ekspanzije nego što je potrebno. Dakle, granični uvjet na izlazu iz mlaznice zahtjeva nadzvučnu kompresiju, kako bi se tlakovi izjednačili. Dolazi do pojave kosih udarnih valova, također strujanje ne smije prijeći os simetrije, pa dolazi do refleksije udarnih valova. Zatim dolazi do ekspanzije dok se ne postigne jednak tlak kao u okolini. Za slučaj kada je tlak na izlazu iz mlaznice manji nego onaj u okolini, mlaznica proizvodi mlazno strujanje koje se sastoji od područja tlaka ili gustoće koji se povećavaju ili smanjuju. Zaključno, radi se o istom procesu, odnosno ciklusu kao za pod ekspanziranu mlaznicu, prvo kompresija pa ekspanzija za preekspandiranu mlaznicu, nasuprot tome prvo ekspanzija pa kompresija za podekspanziranu mlaznicu. Za kraj valja primijetiti Machove dijamante (engl. *Mach Diamonds*). To su područja visokog tlaka, ali i visoke gustoće (i temperature). Ta vruća područja, velike gustoće plina, emitiraju svjetlost (zračenje). Preekspandirana mlaznica i Machovi dijamanti prikazani su na Slici 63 [1] .



Slika 63. Preekspandirana mlaznica, [9]

## 7. ZAKLJUČAK

U ovom radu analizirane su karakteristike strujanja plina kroz nadzvučnu mlaznicu pomoću računalne dinamike fluida. Objasnjen je osnovni koncept jednolikog, izentropskog strujanja i dan je osvrt na dizajn modela nadzvučne mlaznice. Konture nadzvučne mlaznice dizajnirane su putem diferencijalnih jednadžbi za dvodimenzionalnu metodu karakteristika. Također, metoda karakteristika kao alat pri izračunu kontura nadzvučne mlaznice ukratko je analizirana. Model nadzvučne mlaznice koji se koristio u ovom radu modificiran je na način da se konvergentni dio mlaznice dizajnirao dodatno, a divergentni dio mlaznice je preuzet u obliku koordinata iz [6]. Nakon uspješne modifikacije, generirana je mreža mlaznice kako bi se mogle raditi simulacije, odnosno vizualizacije karakteristika strujanja plina kroz model mlaznice. Modificirana mlaznica je uspješno doručena i to je potvrđeno sa prvom simulacijom gdje se iz priloženog vidi distribucija Machovog broja kroz mlaznicu te vrijednost odgovara izračunatoj vrijednosti od 2.4. Iz priloženog može se jasno zaključiti razlika između viskoznog i neviskoznog strujanja plina kroz mlaznicu. Jasno je vidljiv granični sloj koji se javlja uslijed trenja, uz to vidi se i porast temperature uz zidove mlaznice zbog toplinske vodljivosti i trenja. Također, simuliran je i slučaj pojave normalnog udarnog vala unutar mlaznice, iza kojeg se lijepo vidi pad brzine te sama pozicija udarnog vala. Na kraju analizirana je podekspandirana i preekspandirana mlaznica, jasno se vidi razlika u simulacijama pri ekspanziji prema vani kada je riječ o pod ekspanziranoj mlaznici, pojave kosih, zaobljenih udarnih valova također su vidljive, kao i Machovi dijamanti. Simulacije su uspješne što je potvrđeno teorijom.



## LITERATURA

- [1] J. D. A. Jr., Fundamentals of Aerodynamics, New York: The McGraw-Hill Companies, 2001..
- [2] J. J. D. Anderson, »Modern Compressible Flow,« McGraw-Hill, New York, 2003..
- [3] L. Milne-Thompson, Theoretical Aerodynamics. Physics of Fluids A., Dover Publications, 1973..
- [4] M. D. V. Dyke, A study of second order supersonic flow, Pasadena: California Institute of Technology, 1949..
- [5] T. R. Shembarkrar, »Viscous flow analysis in a convergent-divergent nozzle,« Bangalore, 2008..
- [6] M. Šegvić, »Metoda karakteristika za analizu nelinearnog nadzvučnog strujanja,« Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 2013..
- [7] Y. Deng, »Design of a Two-Dimensional Supersonic Nozzle for use in Wind Tunnels,« San Jose State University, San Jose, 2018..
- [8] M. Murnaghan, Study of minimum length, supersonic nozzle design using The Method of Characteristics, Terrasa: Universitat Politecnica de Catalunya, 2019..
- [9] A. F. STUDENT, »ANSYS,« 2022..
- [10] I. ANSYS, Ansys help manual, Canonsburg: ANSYS, 2021..
- [11] C. Brown, »Preliminary Nozzle Design for use in a Small-Scale, High Mach Number Wind Tunnel,« University of California, Davis, 2019..
- [12] S. K. S. S. S. Akhtar Khan, »Design of a Supersonic Nozzle using Method of Characteristics,« Gitam University, Hyderabad, 2013..

## POPIS SLIKA

|   |    |
|---|----|
| Slika 1. Termodinamički sustav, [1].....  | 5  |
| Slika 2. Definicija stlačivosti, [1].....   | 8  |
| Slika 3. Jednodimenzionalno i kvazi-jednodimenzionalno strujanje, [1].....  | 10 |
| Slika 4. Konačni kontrolni volumen za kvazi-jednodimenzionalno strujanje, [1].....  | 11 |
| Slika 5. Inkrementalni kontrolni volumen, [1].....  | 13 |
| Slika 6. Stlačivo strujanje u konvergentnom i divergentnom kanalu, [1] .....  | 15 |
| Slika 7. Ilustracija i usporedba nadzvučne mlaznice i nadzvučnog difuzora, [1] .....  | 16 |
| Slika 8. Geometrija za definiranje odnosa površine i Machovog broja, [1] .....  | 16 |
| Slika 9. Konvergentno-divergentna mlaznica, [1] .....   | 18 |
| Slika 10. Distribucija Machovog broja kroz mlaznicu, [1].....   | 18 |
| Slika 11. Distribucija tlaka kroz mlaznicu, [1] .....   | 18 |
| Slika 12. Distribucija temperature kroz mlaznicu, [1] .....   | 18 |
| Slika 13. Konvergentno-divergentna mlaznica, [1].....   | 20 |
| Slika 14. Krivulje Machovog broja kroz mlaznicu, [1].....   | 20 |
| Slika 15. Krivulje odnosa tlaka na ulazu i izlazu u mlaznicu, [1].....  | 20 |
| Slika 16. Ilustracija zagušenog toka, [1].....  | 21 |
| Slika 17. Udarni val formiran niz grlo mlaznice, [1] .....  | 22 |
| Slika 18. Nadzvučno izentropsko rješenje, odnos $M$ sa duljinom mlaznice, [1] .....   | 22 |
| Slika 19. Nadzvučno izentropsko rješenje, odnos razlike tlakova sa duljinom mlaznice, [1]..   | 22 |
| Slika 20. Nadzvučno strujanje u mlaznici sa udarnim valovima na izlazu mlaznice: (a), (b), i (c) odnose se na normalni udarni val na izlazu, (d) preekspandirana mlaznica, (e) izentropska ekspanzija kod jednakosti izlaznog tlaka i vanjskog tlaka, (f) podekspandirana mlaznica, [1] | 24 |
| Slika 21. Idealni (izentropski) nadzvučni difuzor, [1].....   | 26 |
| Slika 22. Stvarni nadzvučni difuzor, [1].....   | 26 |

|   |    |
|---|----|
| Slika 23. Utjecaj viskoznosti na tijelo u strujanju fluida: smično naprezanje i odvojeno strujanje, [1] ..... | 28 |
| Slika 24. Nepovoljan gradijent tlaka, [1] .....   | 28 |
| Slika 25. Obrnuto strujanje elementa fluida, [1] .....  | 29 |
| Slika 26. Raspodjela tlaka za spojeno i odvojeno strujanje, [1] .....   | 29 |
| Slika 27. Strujnice laminarnog i turbulentnog strujanja, [1] .....  | 31 |
| Slika 28. Prijelaz sa laminarnog u turbulentno strujanje, [1] .....   | 31 |
| Slika 29. Shematski prikaz dizajna nadzvučne mlaznice metodom karakteristika, [1] .....                       | 33 |
| Slika 30. Mlaznica minimalne duljine, [6] .....   | 35 |
| Slika 31. Prikaz karakterističnih linija pod Machovim kutom na strujnicu, [6] .....                           | 37 |
| Slika 32. Shema karakterističnih linija za mlaznicu minimalne duljine, [7] .....                              | 38 |
| Slika 33. Prvi dio koordinata nadzvučne mlaznice, [9] .....   | 41 |
| Slika 34. Drugi dio koordinata nadzvučne mlaznice, [9] .....  | 41 |
| Slika 35. Generirana geometrija u Design Modeler-u, [9] .....   | 41 |
| Slika 36. Konačna geometrija nadzvučne mlaznice, [9] .....  | 42 |
| Slika 37. Detalji dimenzioniranja rubova zida mlaznice, [9] .....   | 42 |
| Slika 38. Zidovi mlaznice podijeljeni na 100 dijelova, [9] .....  | 43 |
| Slika 39. Detalji dimenzioniranja ulaza i izlaza mlaznice, [9] .....  | 43 |
| Slika 40. Ulaz i izlaz mlaznice podijeljeni na 10 dijelova, [9] .....   | 44 |
| Slika 41. Konačna generirana mreža mlaznice u slučaju neviskoznog strujanja, [9] .....                        | 44 |
| Slika 42. Distribucija Machovog broja pri neviskoznom strujanju, [9] .....                                    | 45 |
| Slika 43. Promjena Machovog broja u konturi mlaznice, [6] .....   | 46 |
| Slika 44. Distribucija statičkog tlaka pri neviskoznom strujanju, [9] .....                                   | 46 |
| Slika 45. Promjena statičkog tlaka kroz konturu mlaznice, [6] .....   | 46 |
| Slika 46. Distribucija totalnog tlaka kroz mlaznicu pri neviskoznom strujanju, [9] .....                      | 47 |

|  |    |
|--|----|
| Slika 47. Distribucija temperature kroz mlaznicu pri neviskoznom strujanju, [9] .....      | 47 |
| Slika 48. Promjena temperature kroz konturu mlaznice, [6] .....                            | 47 |
| Slika 49. Pojava normalnog udarnog vala unutar mlaznice.....                               | 48 |
| Slika 50. Graf promjene Machovog broja kroz mlaznicu.....                                  | 48 |
| Slika 51. Grafički prikaz raspodjele tlaka na osi simetrije i zidu mlaznice, [9] .....     | 49 |
| Slika 52. Grafički prikaz distribucija tlaka na izlazu iz mlaznice, [9] .....              | 50 |
| Slika 53. Faktor nagiba mreže mlaznice, [9] .....  | 50 |
| Slika 54. Generirana mreža mlaznice za viskozno strujanje, [9] .....                       | 51 |
| Slika 55. Distribucija Machovog broja kroz mlaznicu pri viskoznom strujanju, [9] .....     | 52 |
| Slika 56. Distribucija temperature kroz mlaznicu pri viskoznom strujanju, [9] .....        | 52 |
| Slika 57. Distribucija temperature pri viskoznom strujanju, [9].....                       | 53 |
| Slika 58. Grafički prikaz ovisnosti Machovog broja sa udaljenosti kroz mlaznicu, [9] ..... | 54 |
| Slika 59. Grafički prikaz ovisnosti $p/p_0$ sa udaljenosti kroz mlaznicu, [9].....         | 55 |
| Slika 60. Grafički prikaz ovisnosti $T/T_0$ sa udaljenosti kroz mlaznicu, [9].....         | 55 |
| Slika 61. Simulacija podekspandirane mlaznice, [9] .....                                   | 56 |
| Slika 62. Promjena Machovog broja, ekspanzijski valovi, zaobljeni udarni val, [9] .....    | 56 |
| Slika 63. Preekspandirana mlaznica, [9].....   | 57 |

## POPIS TABLICA

|   |    |
|---|----|
| Tablica 1. Inicijalni uvjeti.....   | 45 |
| Tablica 2. Svojstva idealnog plina .....  | 45 |
| Tablica 3. Analitičko rješenje karakteristika strujanja kroz nadzvučnu mlaznicu ..... | 54 |


Sveučilište u  
Zagrebu  
Fakultet  
prometnih  
znanosti  
Vukelićeva 4,  
10000 Zagreb

## IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI I SUGLASNOSTI

Izjavljujem i svojim potpisom potvrđujem da je \_\_\_\_\_ diplomski rad  
(vrsta rada)

isključivo rezultat mojega vlastitog rada koji se temelji na mojim istraživanjima i oslanja se na objavljenu literaturu, a što pokazuju upotrijebljene bilješke i bibliografija. Izjavljujem da nijedan dio rada nije napisan na nedopušten način, odnosno da je prepisan iz necitiranog rada te da nijedan dio rada ne krši bilo čija autorska prava. Izjavljujem, također, da nijedan dio rada nije iskorišten za bilo koji drugi rad u bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili obrazovnoj ustanovi.

Svojim potpisom potvrđujem i dajem suglasnost za javnu objavu završnog/diplomskog rada pod naslovom Aerodinamičke karakteristike strujanja plina kroz nadzvučnu mlaznicu, u Nacionalni repozitorij završnih i diplomskih radova ZIR.

Student/ica: 

U Zagrebu, 14.09.2022.

**Ian Cvek Šekuljica**  
(ime i prezime, *potpis*)