

# Modalna analiza podvozja lakog zrakoplova

---

Juretić, Fabijan

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Transport and Traffic Sciences / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:119:188953>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-20**



Repository / Repozitorij:

[Faculty of Transport and Traffic Sciences -  
Institutional Repository](#)



Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet prometnih znanosti

**DIPLOMSKI RAD**

**MODALNA ANALIZA PODVOZJA LAKOG  
ZRAKOPLOVA  
MODAL ANALYSIS OF THE LIGHT AIRCRAFT  
LANDING GEAR**

Mentor: izv. prof. dr. sc. Anita  
Domitrović

Student: Fabijan Juretić  
JMBAG: 0135245454

Zagreb, rujan 2022.

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**FAKULTET PROMETNIH ZNANOSTI**  
**POVJERENSTVO ZA DIPLOMSKI ISPIT**

Zagreb, 5. rujna 2022.

Zavod: **Zavod za aeronautiku**  
Predmet: **Održavanje zrakoplova**

**DIPLOMSKI ZADATAK br. 6679**

Pristupnik: **Fabijan Juretić (0135245454)**  
Studij: **Aeronautika**

Zadatak: **Modalna analiza podvozja lakog zrakoplova**

Opis zadatka:

U uvodnom dijelu rada potrebno je prezentirati osnovne pojmove koji su potrebni za modalnu analizu podvozja lakog zrakoplova. Nadalje, potrebno je dati tehničko eksploatacijske karakteristike zrakoplova Cessna 172, koji je odabran za analizu. U glavnom dijelu rada potrebno je analizirati vibracije na podvozju zrakoplova C172 i izračunati veličine potrebne za modalnu analizu. Zatim je potrebno provesti modalnu analizu putem pogodnog računalnog programa. Zaključno, potrebno je analizirati dobivene rezultate i usporediti ih s podacima iz eksploatacije.

Mentor:

Predsjednik povjerenstva za  
diplomski ispit:

---

izv. prof. dr. sc. Anita Domitrović

## ZAHVALA

*Ovim putem zahvaljujem mentorici, izv. prof. dr. sc. Aniti Domitrović koja je svojim radom i stručnim savjetima uvelike olakšala izradu ovog rada. Također, zahvaljujem i na svom znanju prenesenom kroz cijeli preddiplomski i diplomski studij te kroz ostale suradnje.*

*Zahvaljujem i suradniku Davidu Gerhardingeru mag. ing. aeroing., koji je svojim savjetima i specifičnim znanjima dao doprinos ovom radu.*

*Zahvaljujem svojoj obitelji i djevojci na potpori tijekom cijelog studija.*

## Sažetak

Vibracije predstavljaju bitnu komponentu u konstruiranju a kasnije i u eksploataciji većine strojeva pa tako i zrakoplova. Stoga je razumijevanje na koji način vibracije djeluju na strukturu od velike važnosti kako bi se stroj poput zrakoplova sigurno konstruirao i održavao. Ovaj diplomski rad usmjeren je ka proučavanju vibracija kroz modalnu analizu glavnog podvozja lakog zrakoplova Cessna 172 (C-172). U radu su prezentirani osnovni pojmovi koji su potrebni za razumijevanje analize. Zatim je prezentiran zrakoplov čije je glavno podvozje analizirano. Analizirane su vibracije na podvozju zrakoplova C-172, skupa s teorijskom razradom jednadžbi kojima se može opisati podvozje i izračunati veličine potrebne za modalnu analizu. Zatim je provedena modalna analiza putem računalnog programa Ansys. Dobiveni rezultati evaluirani su na temelju vibracija snimljenih u eksploataciji. Također rezultati modalne analize uspoređeni su s podacima iz eksploatacije nakon čega su dani zaključci.

KLJUČNE RIJEČI: modalna analiza; vibracije; podvozje; računalna analiza

## Summary

Vibrations represent important component in construction and in operation of most machines, including aircraft. Therefore, understanding how vibrations affect structure is of great importance in order to safely construct and maintain aircraft. This thesis is aimed at study of vibrations through a modal analysis of the main landing gear of Cessna 172 (C-172) aircraft. The paper presents basic terms that are necessary for understanding the analysis. Then, the aircraft whose main landing gear was analyzed was presented. The vibrations on the landing gear of the C-172 aircraft were analyzed, along with the theoretical development of equations that can be used to describe the landing gear and calculate the quantities needed for modal analysis. Then a modal analysis was performed using a computer program Ansys. The obtained results were evaluated based on vibrations recorded during operations. Also, the results of the modal analysis were compared with data from operations, after which conclusions were given.

KEYWORDS: modal analysis; vibration; landing gear; computer analysis

## Sadržaj

1.	Uvod.....	1
2.	Teorijska podloga potrebna za razumijevanje modalne analize.....	3
2.1.	Modalni model .....	3
2.2.	Primjena modalne analize .....	8
2.3.	Provedba modalne analize .....	11
2.3.1.	Eksperimentalna modalna analiza.....	11
2.3.2.	Operativna modalna analiza.....	13
3.	Tehničko-eksploatacijske karakteristike lakog zrakoplova C-172.....	14
3.1.	Značajke zrakoplova C-172 .....	14
3.2.	Konstrukcija zrakoplova C-172 .....	14
3.3.	Pogonski sustav .....	15
3.4.	Podvozje .....	17
4.	Vibracije podvozja na lakom zrakoplovu .....	20
4.1.	Izvori vibracija na lakom zrakoplovu.....	20
4.2.	Modeliranje sustava s $n$ stupnjeva slobode.....	21
4.3.	Jednadžbe gibanja koristeći Drugi Newtonov zakon .....	22
4.4.	Potencijalna i kinetička energija .....	24
4.5.	Lagrangeove jednadžbe .....	25
4.6.	Rješavanje problema vlastitih vrijednosti.....	27
5.	Izrada računalnog modela podvozja .....	31
5.1.	Dimenzije podvozja.....	31
5.2.	Računalni dizajn podvozja.....	32
6.	Modalna analiza podvozja.....	34
6.1.	Računalni program Ansys.....	34
6.2.	Proces izrade modalne analize u računalnom programu Ansys.....	34
6.3.	Odabir i definiranje materijala i geometrija modela .....	35
6.4.	Postavke modela.....	36
6.5.	Postavke analize .....	38
6.6.	Rezultati analize .....	40
6.6.1.	Prirodna frekvencija i efektivna modalna masa .....	40
6.6.2.	Efektivna modalna masa.....	40

6.6.3. Modalni oblici.....	42
7. Usporedba rezultata modalne analize i podataka iz eksploatacije.....	50
7.1. Evaluacija modela modalne analize .....	50
7.2. Usporedba prirodnih frekvencija i snimanja vibracija u letu.....	56
8. Zaključak.....	61
Literatura.....	62

# 1. Uvod

Vibracije predstavljaju neizostavan dio gotovo svakog stroja u eksploataciji pa tako i zrakoplova. Zrakoplov je tijekom eksploatacije izložen različitim izvorima vibracija neravnih površina voznih staza koje generiraju vibracije podvozja zrakoplova. Osim vanjskih utjecaja poput varijabilnih atmosferskih uvjeta zrakoplov ima sustave koji također generiraju vibracije. Djelovanje vibracija na nepredviđen način može naštetiti udobnosti leta ili pak ugroziti sigurnost. Stoga je poznavanje konstrukcije i djelovanje vibracija na konstrukciju esencijalno za sigurnu konstrukciju a kasnije i održavanje zrakoplova u eksploataciji.

Ovaj rad razrađuje metodologiju modalne analize glavnog podvozja lakog zrakoplova Cessna 172. Rezultati modalne analize daju uvid u modalna svojstva poput prirodnih frekvencija, prigušenja, modalnih masa i modalnih oblika strukture glavnog podvozja. Svrha poznavanja spomenutih svojstava je razumijevanje na koji način vibracije djeluju na strukturu, što može poslužiti u održavanju. Podaci modalne analize uspoređeni su s podacima snimanja.

Rad je podijeljen u osam cjelina:

1. Uvod,
2. Teorijska podloga potrebna za razumijevanje modalne analize,
3. Tehničko-eksploatacijske karakteristike lakog zrakoplova C-172,
4. Vibracije podvozja na lakom zrakoplovu,
5. Izrada računalnog modela podvozja,
6. Modalna analiza podvozja,
7. Usporedba rezultata modalne analize i podataka iz eksploatacije,
8. Zaključak.

Drugo poglavlje razrađuje osnovne pojmove koji su potrebni za razumijevanje modalne analize. Objašnjeno je od čega se sastoji modalni model i koja je važnost elemenata modalnog modela, skupa s matematičkim izrazima koji opisuju pojedine veličine.

Treće poglavlje opisuje tehničko-eksploatacijske karakteristike zrakoplova čije glavno podvozje se analizira. Opisana je konstrukcija glavnih komponenti zrakoplova, te je detaljnije razrađeno podvozje njegova građa i podsustavi od kojih se sastoji.

U četvrtom poglavlju opisane su glavni izvori vibracija na zrakoplovu. Također ispisane su jednadžbe kojima je moguće opisati jedan sustav kao što je glavno podvozje. Također opisana je mogućnost rješavanja istih jednadžbi sustava čiji rezultati daju modalne parametre.

Peto poglavlje prikazuje kako su najprije uzete mjere podvozja a zatim napravljen dizajn glavnog podvozja u računalnom programu.

Šesto poglavlje obrađuje proces modalne analize u računalnom programu. Opisane su ponuđene postavke modela i zatim su izneseni rezultati. Rezultati su komentirani i popraćeni slikama i grafikonima koji objašnjavaju rezultate analize.



U sedmom poglavlju rada najprije je evaluirana reprezentativnost modela uspoređujući rezultate dodatnih analiza i rezultate mjerenja vibracija u eksploataciji. Nadalje, rezultati modalne analize uspoređeni su s mjerenjima vibracija u eksploataciji na temelju čega su dati zaključci.

Osmo poglavlje iznosi zaključna razmatranja s obzirom na dobivene rezultate modalne analize glavnog podvozja lakog zrakoplova C-172.

## 2. Teorijska podloga potrebna za razumijevanje modalne analize

U ovom poglavlju obrađuju se osnovni pojmovi koji su potrebni za razumijevanje modalne analize, te na posljetku njezinu interpretaciju. Opisan je modalni model s pripadnim elementima te značenjima istih za analizu. Opisan je i značaj modalne analize kod različitih primjena u eksploataciji te za što se ovakva analiza može koristiti. Također opisane su mogućnosti provedbe modalne analize, te kratki opisi procesa provedbe modalne analize u eksploataciji.

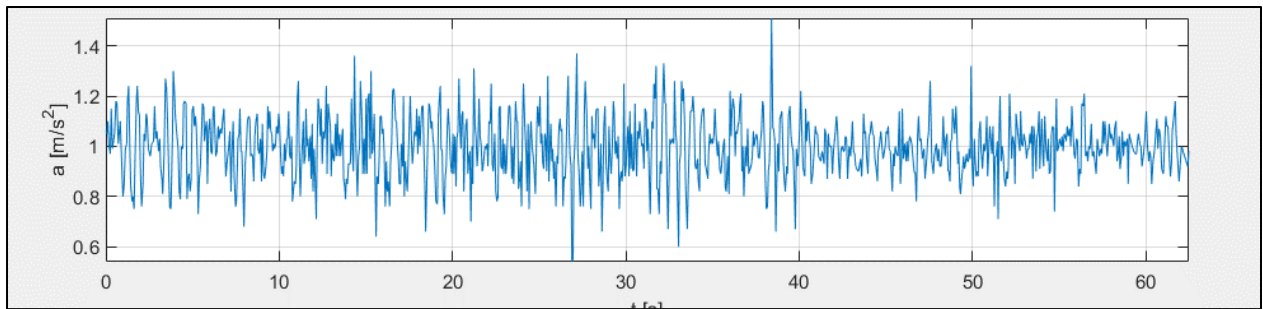
### 2.1. Modalni model

Vibracije su osciliranja sustava oko ravnotežnog položaja, koje se sa svojim karakteristikama ponavljaju u određenom vremenskom intervalu. Vibracije se u mehaničkim sustavima pojavljuju uslijed djelovanja vanjske sile ili otklona elementa sustava iz ravnotežnog položaja. Tako akumulirana potencijalna energija uslijed elastičnih svojstava pretvara se u kinetičku što za rezultat daje relativno male periodičke pomake koji mogu biti prigušeni ili neprigušeni promatraju li se idealni slučajevi.

Vibracije su za većinu strojeva neizbježne zbog prirode funkcioniranja elementa ili cjelokupnog sustava. Kao takvi, strojevi koji generiraju vibracije, posredno ili neposredno djeluju na ostale elemente ili sustave što se uobičajeno smatra nepoželjnim. Nepredviđeno djelovanje vibracija na elemente ili cjelokupan sustav može oštetiti vitalne dijelove istih te narušiti sposobnost funkcioniranja u njegovu radnom okruženju. Stoga je potrebno analizirati i pratiti vibracije i njihove utjecaje na element, cjelokupan sustav ili pak konstrukciju zrakoplova. Jedna takva analiza koja prati vibracije i specifičan utjecaj vibracija na određeni objekt jest modalna analiza koja daje uvid u nekoliko parametara vibriranja proučavanog objekta [1].

Uobičajeno se analize konstrukcija dijele na statičke i dinamičke. Statičke analize su one gdje se element strukture opterećuje dinamikom kod koje je moguće zanemariti akceleracije odnosno opterećenje se ne promatra u vremenskoj domeni. Primjer analiza sa statičkim opterećenjima su analiza mostova, vijadukata, nebodera i sl. Dinamičke su analize one kod kojih je dinamika primjene opterećenja ili pomaka elementa bitna, odnosno praćenje opterećenja i odziva u vremenskoj domeni je značajno [2]. Ovaj rad proučava podvozje u eksploataciji i to njegov dinamički odziv. Stoga su za ovaj rad od veće važnosti dinamičke analize gdje se prate pomaci strukture, uzbuda i njihova dinamika u vremenskoj domeni. Rezultati se očituju u odzivima analizirane komponente ili sustava, odnosno reakciji istoga na primijenjena opterećenja ili pomake. Do danas postoje različite dinamičke analize i alati koji proučavaju različite aspekte materijala. Primjerice *Dynamic Mechanical Analysis* (DMA) je analiza kojom je moguće karakterizirati materijal u funkciji temperature, naprezanja, viskoznosti i sl. [3]. Kako bi se stekao okvirni uvid u rezultate takvih analiza, odnosno odzive sustava na pobudu ili pomak, u nastavku je Slika 1. Na Slici 1. mogu se vidjeti vibracije lakog zrakoplova koje su bilježene u letu. To se može protumačiti kao odziv cjelokupne konstrukcije

zrakoplova na različite pobude kojima je izložen u letu. Odzivi sustava promatranog podvozja lakog zrakoplova detaljnije će biti obrađeni kasnije.



Slika 1. Primjer odziva sustava na pobudu, [4]

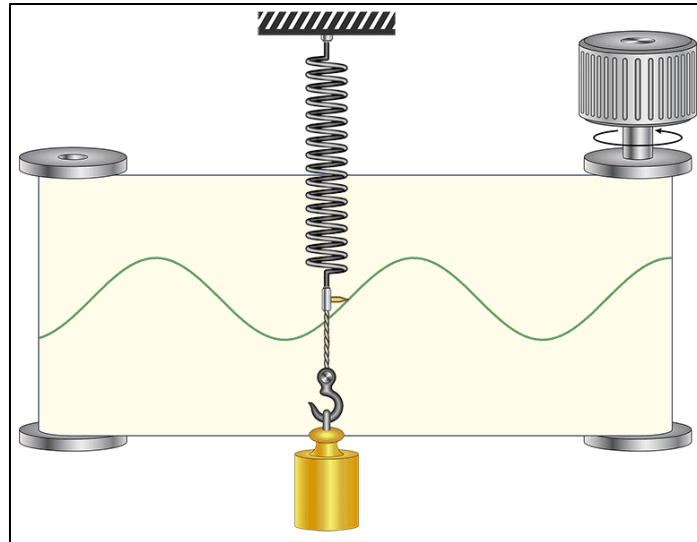
No, unatoč brojnosti različitih analiza ovaj rad se fokusira na modalnu analizu koja je dinamička analiza. Modalna analiza važan je alat za razumijevanje karakteristika vibracija struktura u mehaničkim sustavima. Njezina je zadaća kreiranje modalnog modela koji definira svojstva modela putem kojih se može zaključiti kako će promatrana struktura vibrirati u nekom okruženju. Modalna analiza omogućuje opisivanje strukture putem kreiranja tzv. modalnog modela (eng. *Modal model*) odnosno karakteriziranja elementa sustava kroz nekoliko bitnih parametara.

Modalni model predstavlja skup karakteristika elemenata strukture ili sustava. Modalni model tvore: [2]

- prirodna frekvencija ( $\omega_n$ ),
- konstante prigušenja,
- modalni oblici (eng. *mode shape*),
- efektivna modalna masa.

Prirodna frekvencija (vlastita vrijednost sustava, eng. *eigenvalue*) jest ona frekvencija kojom tijelo spontano titra ili vibrira nakon što je pomaknuto iz ravnotežnog položaja (naziv *eigenvalue* spominje se jer će se kasnije spominjati u daljnjoj analizi). Za lakše shvaćanje navest će se primjer glazbene vilice. Ako se udarcem o vilicu dio mase pomakne iz ravnotežnog stanja vilica će titrati svojom prirodnom frekvencijom. Ukoliko se otkloni vanjski utjecaj (slobodne vibracije), to titranje prirodnom frekvencije će čovjek interpretirati kao ton. No, osim osnovnog tona, odnosno frekvencije, moguće je da tijelo ima više prirodnih frekvencija, harmonika [5].

Nadalje, kako bi se prirodna frekvencija malo detaljnije opisala na još uvijek jednostavnom primjeru, uzet će se u obzir harmonijsko titranje, odnosno masu ovješenu na oprugu. Sustav harmoničnog oscilatora vidljiv je na Slici 2.



Slika 2. Harmonički oscilator, [6]

Tijelo na Slici 2. ima specifičnu masu ( $m$ ) te je ovješeno za čvrstu površinu oprugom koja ima svojstvenu elastičnu konstantu ( $k$ ). sustav je idealan te nema pripadnih prigušenja zbog čega je gibanje idealizirano, te kao takvo nije realno. Gibanje takvog sustava moguće je opisati drugim Newtonovim zakonom koji daje izraz (1).

$$F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} = mx = -kx \quad (1)$$

Gdje  $m$  [kg] predstavlja masu tijela,  $a$  [ $m/s^2$ ] akceleraciju promatranog tijela,  $t$  [s] vrijeme, a  $x$  [m] pomak. Daljnjim rješavanjem jednadžbe moguće je dobiti izraz (2) koji opisuje kretanje mase.

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

Gdje  $x$  [m] predstavlja pomak,  $t$  [s] vrijeme,  $A$  amplitudu,  $\omega$  [rad/s] kružnu frekvenciju, a  $\varphi$  [°] fazni pomak. Iz jednadžbe je moguće iščitati da je kretanje mase periodično, i da se ponavlja u obliku sinusoide, gdje  $A$  predstavlja amplitudu. Također titranje ima specifičan period i frekvenciju koja je inverzna funkcija perioda i govori koliko iznosi period jednog titraja odnosno koliko titraja u jedinici vremena oscilator učini. Moguće je izraziti prirodnu kutnu frekvenciju koja je određena elastičnom konstantom opruge i masom utega ovješeno na istu. Izraz za prirodnu kružnu frekvenciju ispisan je u nastavku (3) [5].

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3)$$

Gdje  $\omega_0$  [rad/s] označava prirodnu kružnu frekvenciju,  $k$  [N/m] elastičnu konstantu, a  $m$  [kg] masu tijela koje titra. (Ovdje je dan primjer idealnog titranja, no u stvarnosti zbog unutarnjeg trenja, osim elastične komponente, opruga iz primjera ima i prigušnu komponentu koja, kako joj i ime govori prigušuje oscilacije.)

Prirodna frekvencija od velike je važnosti jer za razliku od primjera slobodnog titranja s oprugom u eksploataciji vrlo često se nailazi na primjere gdje titranje nije slobodno već postoje sile koje unose energiju u sustav.

Ukoliko je frekvencija uzbudne sile poklopi sa prirodnom frekvencijom moguće je da će sustav oscilirati, a amplituda divergirati (nestabilno osciliranje) što može dovesti do oštećenja. Poklapanje prirodne frekvencije i frekvencije pobude naziva se rezonancija. Upravo zbog toga je od velike važnosti poznavati prirodnu frekvenciju kako bi se još pri projektiranju element sustava dimenzionirao na način da mu se prirodna frekvencija ne nalazi u spektru vibracija koje se na njega prenose direktno ili indirektno u radu stroja.

Primjer harmoničkog oscilatora izveden je kao idealni slučaj gdje opruga ima svoju elastičnu konstantu. No, u prirodnom okruženju takav idealni slučaj je nepostojeći te u jednadžbi koja opisuje gibanje mase potrebno je uvesti još jednu komponentu. Osim elastičnih svojstava opruge koji rezultiraju generiranjem sile u funkciji položaja, u realnom slučaju postoji i svojstveno prigušenje. Zbog unutarnjeg trenja materijala koji se giba postoji prigušenje koje rezultira smanjenjem amplitude gibanja i krajnje stabiliziranjem mase u ravnotežnom položaju, ukoliko ne postoji vanjski utjecaj na masu ili cjelokupni sustav. Takvo gibanje može se opisati izrazom (4).

$$F = -kx - c \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (4)$$

Gdje  $F$  [N] predstavlja silu,  $k$  [N/m] elastičnu konstantu,  $c$  faktor prigušenja,  $m$  [kg] predstavlja masu tijela,  $x$  [m] predstavlja pomak, a  $t$  [s] vrijeme.

Izraz (4) pokazuje da je prigušenje u funkciji prve derivacije pomaka, odnosno brzine kretanja mase. U ovom slučaju to znači da je prigušenje proporcionalno brzini i da povećanjem brzine kretanja mase prigušenje postaje veće. Izraz se može raspisati u obliku (5).

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (5)$$

Gdje  $x$  [m] predstavlja pomak,  $\zeta$  predstavlja faktor relativnog prigušenja, a  $\omega_0$  [rad/s] kružnu frekvenciju. Zapis jednadžbe u obliku (5) koristi već spominjanu prirodnu kružnu frekvenciju. No, član koji opisuje prigušenje sadrži i relativni faktor prigušenja koji se zapisuje u obliku izraza (6).

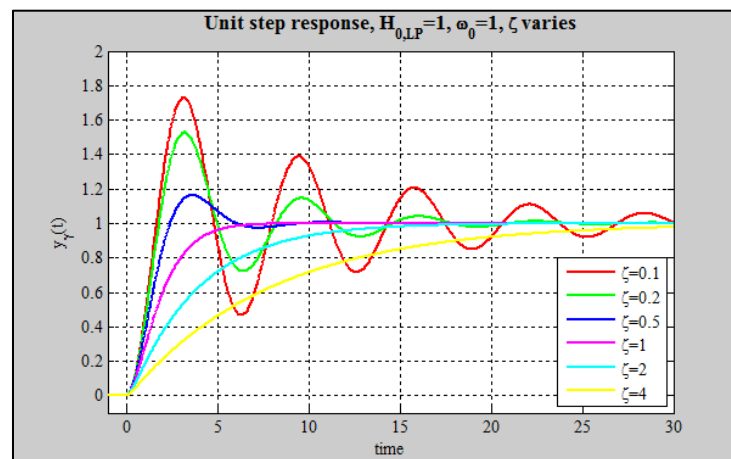
$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad (6)$$

Gdje  $\zeta$  predstavlja faktor relativnog prigušenja,  $k$  [N/m] elastičnu konstantu,  $c$  faktor prigušenja, a  $m$  [kg] predstavlja masu tijela. Kao što je iz jednadžbe (5) moguće vidjeti, prigušenje sustava ovisit će o faktoru prigušenja (6) što će odrediti odziv sustava na pobudu. Generalno je moguće izdvojiti tri slučaja karakterističnog prigušenja.

- Nadkritično prigušenje, koje se postiže za vrijednosti faktora prigušenja veće od jedan ( $\zeta > 1$ ). Takav će sustav nakon pobude imati odziv kao žuta i krivulja na Slici 3. Odziv nakon

otklona mase iz ravnotežnog položaja dolazi u stanje mirovanja bez oscilacija, aperiodično [7].

- Kritično prigušenje, koje se postiže za vrijednosti faktora prigušenja jednake jedan ( $\zeta = 1$ ). Takav će sustav nakon pobude imati odziv kao ružičasta krivulja na Slici 3. Odziv nakon otklona mase također se aperiodično vraća u stanje ravnoteže, no ova vrijednost je specifična jer je najmanja vrijednost faktora prigušenja koja ima aperiodično vraćanje u ravnotežu. Daljnjim smanjivanjem faktora prigušenja postojećeg sustava osciliranje sustava mijenja svoj oblik, kao što je navedeno u sljedećem primjeru [7].
- Podkritično prigušenje, koje se postiže za vrijednosti faktora prigušenja veće od jedan ( $\zeta < 1$ ). Takav će sustav nakon pobude imati odziv kao plava krivulja na Slici 3. Daljnjim smanjivanjem faktora prigušenja gibanje poprima oblik zelene krivulje, a na poslijetku poprima i oblik crvene ako se dodatno smanji faktor prigušenja. Gibanje ovakvog sustava karakterizira oscilatorno vraćanje u ravnotežni položaj [7].



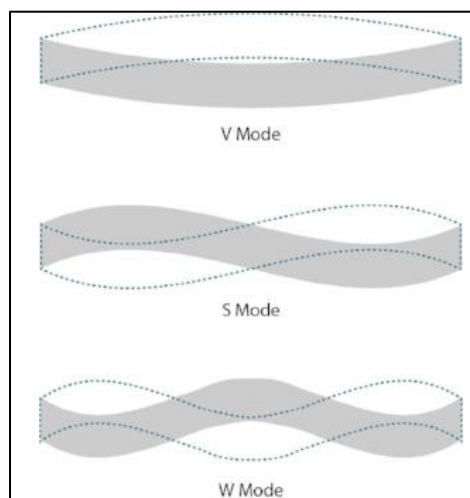
Slika 3. Primjer odziva za različite faktore prigušenja, [7]

S obzirom na prikazano, faktor prigušenja uvelike određuje odziv sustava na pobudu, odnosno ponašanje elementa u pogledu vibriranja u svom eksploatacijskom okruženju. Zbog toga je važno poznavati takav parametar elementa ili sustava u eksploataciji kako vibracije ne bi djelovale na nepredviđen način i oštetili strukturu elementa i narušili njegovu sposobnost funkcioniranja u svom okruženju.

Da bi se upotpunio modalni model potrebno je spomenuti oblik moda (eng. *mode shape*). Promatrana struktura u nekom sustavu vibrira potaknuta vanjskim pobudama. Vibracije podrazumijevaju deformiranje strukture, no kada struktura vibrira jednom od svojih prirodnih frekvencija, moguće je odrediti specifičan oblik otklona dijelova promatrane strukture iz pripadnog ravnotežnog položaja. Kada se promatra realan slučaj u eksploataciji, u određenim uvjetima moguće je da promatrana struktura poprima kombinacije više oblika od jednom što je kompleksno za praćenje i percipiranje. Stoga se za intuitivniju interpretaciju oblici moda rastavljaju, na način da se posebno promatraju vibracije sa samo jednim stupnjem slobode. Tada se za samo jedan stupanj slobode kreira oblik moda koji je jednostavan za razumijevanje [8].

Oblici moda pojasnit će se na primjeru skiciranom na Slici 4. za lakše razumijevanje. Struktura koja će vibrirati je greda pravokutnog oblika. Greda je čvrsto vezana na oba kraja, nakon čega ju se pobuđuje svojom prvom prirodnom frekvencijom.

Kao što je vidljivo na Slici 4. greda pri prvoj prirodnoj frekvenciji poprima karakterističan oblik koji se može nazvati *V* oblik. Nadalje, ukoliko se frekvencija pobude promjeni na drugi po redu harmonik prirodne frekvencije, struktura mijenja svoj oblik deformacije te sada vibrira u obliku slova *S*, zbog čega se može nazvati *S* mod. Moguće je primjetiti sa slike da struktura ima i karakteristične točke kao što je čvor (eng. *node*). To je specifična pozicija za ovaj mod jer se može reći da masa u toj točki gotovo ne vibrira. Ukoliko se strukturu pobudi sa trećim harmonikom prirodne frekvencije struktura će sukladno tome opet promijeniti oblik moda u oblik koji nalikuje slovu *W*. Takav oblik moda ima specifična dva čvora, i moguće ga je vidjeti na dnu Slike 4. [8].



Slika 4. Primjeri oblika moda, [8]

Prijašnje navedeni elementi (prirodna frekvencija, faktor prigušenja i oblik moda) u potpunosti opisuju modalni model, no kako bi se dodatno upotpunio model i bolje opisala vibrirajuća struktura kroz modalnu analizu još je moguće dobiti efektivnu modalnu masu. Efektivna modalna masa koristan je parametar kada su već poznati modalni oblici. Pomoću efektivne modalne mase moguće je odrediti udio mase cjelokupne strukture promatranog elementa koja sudjeluje u vibriranju određenog oblika moda. Dakle, kada oblik moda ima relativno velik udio efektivne modalne mase to se interpretira na način da takav oblik moda ima veću važnost jer će relativno male pobudne sile uzrokovati vibracije relativno velikih razmjera što može rezultirati velikim naprezanjima materijala i to se smatra uglavnom nepoželjnim [9].

## 2.2. Primjena modalne analize

Prethodno potpoglavlje dalo je kratki pregled i uvid u to što modalna analiza jest i koji ju parametri definiraju. U ovom potpoglavlju pojasnit će se što upotpunjen modalni model znači u eksploataciji i za što se praktično koristi.

Kod statičke analize struktura koja se promatra mora biti učvršćena na način da svako opterećenje koje struktura podnosi mora davati odgovarajuće reaktivne sile i momente koji se suprotstavljaju opterećenju. Ukoliko neki element nije pričvršćen za ostatak strukture statička analiza neće dati željene rezultate. Provedbom modalne analize na takvoj strukturi dobivaju se rezultati kojima će se lako detektirati nepričvršćeni elementi strukture. Ukoliko se pri testiranju izračuna modalni model pri približno 0 Hz element se promatra i na temelju proučavanja oblika moda tretira kao nedovoljno učvršćen jer u smjeru moda titra kao kruto tijelo [10].

Nadalje osim spomenutog, modalna analiza pomaže pri odabiru mjesta gdje učvrstiti strukturu. Ako se ponovno promotri Slika 4. može se uočiti da struktura titra na način da ima karakteristične točke gdje je otklon mase iz ravnotežnog položaja maksimalan i čvorove kod kojih gotovo i nema pomaka iz ravnotežnog položaja. Ako se dodaje pobudna sila frekvencije jednake prirodnoj za određeni oblik moda na mjestu gdje je najveći otklon mase, struktura može primiti znatno manje vanjskog opterećenja. Analogno tome najveće opterećenje može se nanositi na čvorove gdje je otklon mase od ravnotežnog položaja minimalan. S druge strane, mjesta najvećeg otklona od ravnotežnog položaja najbolji su odabir za pričvršćivanje strukture za čvrstu podlogu ili neki drugi oslonac zbog toga što će to učvršćenje najviše doprinijeti prigušenju osciliranja. Nadalje, promotri li se ponovno Slika 4. moguće je primijetiti da se položaj maksimalnog otklona odnosno čvorova pomiče duž strukture ovisno o obliku moda kojim struktura titra. Tada se za najveća vanjska opterećenja odabire položaj koji je najbliži svim čvorovima, odnosno za učvršćenje odabire položaj koji je najbliže položajima svih maksimalnih otklona relevantnih modova [10].

Rotirajuće strukture u realnim uvjetima ne mogu biti idealno balansirane, odnosno distribucija mase ne može biti jednolika u svim dijelovima pripadne strukture. To znači da kada se struktura rotira postojat će opterećenje koje će imati sinusoidalni oblik. Promatranje takvih dinamičkih sustava kroz raspisivanje jednadžbi pokazuje da su prirodne frekvencije takvih sustava u funkciji brzine rotacije. Kada se promatraju sustavi koji se sastoje od vratila i elemenata priključenih na njih kao što su rotori mlaznih motora s pripadnim kućištima, potrebno je provesti modalnu analizu. Osim što rotirajuće vratilo ima prirodne frekvencije i pripadne oblike moda, čak i ako su brzine rotacije vratila znatno ispod prve prirodne frekvencije, potrebno je provoditi modalnu analizu na elementima pričvršćenim na vratilo što u spomenutom slučaju mogu biti lopatice turbine, kompresora ili kućište. Razlog tome je što ostali elementi koji su povezani s vratilom mogu imati prirodne frekvencije pri manjim brzinama rotacije nego je to slučaj s vratilom. No, ponekad je zbog konstrukcijske izvedbe nemoguće osmisliti strukturu koja će u rasponu svojih radnih parametara biti uvijek na sigurnoj margini od prirodnih frekvencija već mora funkcionirati iznad primjerice prve frekvencije. U tom slučaju ako se uzme spominjano vratilo za primjer potrebno je brzinu vratila povećati čim je brže moguće iznad frekvencije prvog moda. Čim je sporija dinamika povećavanja brzine vratila kroz određeni mod, masa strukture bit će značajno više pobuđena odnosno javljat će se vibracije većeg intenziteta [10].

Prethodni primjer dao je uvid u potencijalne situacije gdje se prirodna frekvencija moda ne može pomicati. Ipak, ukoliko je moguće, praktičnije rješenje je pomicanje frekvencije moda izvan spektra frekvencija u kojem struktura funkcionira u eksploataciji. Za pomicanje prirodnih



frekvencija potrebno je vratiti se korak unatrag i razmotriti izraz (3) za prirodnu kružnu frekvenciju iz poglavlja drugog. Izraz je ispisan za masu ovješenu na oprugu i sada je ispisan u obliku izraza (7).

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (7)$$

U izrazu (7)  $f_0$  [Hz] predstavlja prirodnu frekvenciju,  $k$  [N/m] predstavlja elastični konstantu opruge a  $m$  [kg] ovješenu masu. Gledajući u izraz (7) može se jednostavno zaključiti da povećanjem vrijednosti elastične konstante i smanjenjem mase povećat će se prirodna frekvencija promatranog sustava i obrnuto. Povećanje vrijednosti elastične konstante implicira povećanje čvrstoće materijala jer će potrebna sila za isti otklon mase iz ravnotežnog položaja biti veća. No, povećanjem čvrstoće koristeći isti materijal povećat će se i masa strukture pa je na inovativne načine potrebno povećavati čvrstoću većom stopom od povećanja njezine mase. Jednostavni sustavi kao što je navedeni primjer mase na opruzi ima vrlo jednostavno rješenje dok većina kompleksnih sustava iz eksploatacije imaju kompliciranije jednadžbe koje opisuju gibanja pa i samim time kompliciranija rješenja za prirodnu frekvenciju. Bez obzira na spomenuto analogija oko mase i čvrstoće i dalje vrijedi. Kada je poznato da je potrebno pomaknuti prirodnu frekvenciju kako bi se izbjegla rezonancija treba odabrati optimalno mjesto za to. Kada se govori o čvrstoći materijala najveći utjecaj na pomicanje prirodnih frekvencija imaju mjesta najveće elastične potencijalne energije odnosno mjesta gdje su elastične deformacije strukture najveće. Povećanje čvrstoće u smjeru u kojem se deformacije događaju imat će najveći utjecaj na frekvenciju i omogućit će najveće povećanje potrebne čvrstoće sa relativno malim povećanjem mase. Pomicanje prirodne frekvencije odnosno moda nekog elementa putem promjene mase, mjesta na kojima će se postići najveći utjecaj su ona na kojima imaju najveću kinetičku energiju. Za strukture kod čijih modova se pozicije maksimalne elastične potencijalne energije (eng. *strain energy*) i maksimalne kinetičke energije razlikuju razmještanje masa i čvrstoće je relativno jednostavno no kada te pozicije koincidiraju potrebno je na jednom mjestu kao što je već rečeno povećati čvrstoću većom stopom od povećanja mase. Primjer kako se to može postići je učiniti strukturu rebrastom na specifičan način koji će povećati čvrstoću u smjeru deformacije strukture [10].

Navedene primjene modalne analize značajne su primarno kod samog projektiranja i osmišljavanja strukture. No, modalna analiza može biti korisna i s aspekta održavanja komponenata u eksploataciji. Kao što je već izneseno, analitičkom modalnom analizom mogu se dobiti modalni oblici. Interpretacija modalnih oblika omogućava da se za pojedine prirodne frekvencije i njihove harmonike odrede dijelovi strukture koji će značajnije oscilirati naspram onih koji će mirovati (eng. *node*). Iako modalna analiza nije u mogućnosti odrediti amplitude oscilacija pojedine strukture, moguće je odrediti gdje će se na strukturi događati relativno veliki otkloni iz ravnotežnog položaja, odnosno gdje će struktura mirovati. Takvi podaci o vibriranju strukture korisni su sa stajališta komponenata na kojima se provodi praćenje stanja (eng. *condition monitoring*). Tehnologija praćenja stanja komponenti zrakoplova (eng. *condition monitoring*) ne određuje fiksni resurs određene komponente pri projektiranju iste, već se na temelju stanja komponente tijekom održavanja određuje koliki je preostali resurs. Tehnologija praćenja komponenti zasniva se na praćenju parametara u eksploataciji i nerazornim metodama

ispitivanja materijala kako bi se otkrile naznake zamora materijala. Kako bi se lakše lokalizirala područja potencijalnih oštećenja može se koristiti modalnu analizu koja putem modalnih oblika otkriva pozicije deformacija na strukturi uslijed vibracija.

### 2.3. Provedba modalne analize

Vibracije se mogu proučavati analitički, putem matematičkih modela ili to učiniti eksperimentalno. Provesti modalnu analizu moguće je kao što je to objašnjeno u poglavlju 2.2. Dakle, matematičkim modelima moguće je dobiti željene rezultate. Za takvu provedbu modalne analize, kako bi se dobili pouzdani rezultati potrebno je prije svega opisati model koji će se ispitivati. Opisivanje modela uključuje definiranje fizikalnih karakteristika ispitivanog modela poput pripadne mase, čvrstoće i prigušnih konstanti materijala od kojeg je model sačinjen. Nakon opisane strukture koja će se ispitivati potrebno je putem matematičkog modela i njegovih pripadnih jednadžbi izračunati prirodne frekvencije i oblike modova pripadnih za prirodne frekvencije.

Implementacija matematičkih modela implementirana je i u računalne programe i jedna takva implementacija koristit će se za izradu ovog rada. Konstrukcija modela kao i modeliranje sustava podvozja skupa s rezultatima bit će opisana u poglavljima koja slijede.

#### 2.3.1. Eksperimentalna modalna analiza

Modalna analiza može se provoditi i eksperimentalnim putem (*Experimental Modal Analysis* – EMA). Zadaća eksperimentalne modalne analize ne razlikuje se od prethodno opisane analitičke modalne analize, no proces kojim se dobivaju rezultati značajno se razlikuje. Eksperimentalna modalna analiza češće se krenula upotrebljavati u pokušaju rješavanja problema vibracija krila uslijed aeroelastičnosti (*flutter*) i sličnih tehničkih problema. Potreba za takvom analizom nastaje iz ideje da poznavanjem prirodnih frekvencija, prigušnih konstanti materijala i modalnih oblika čine značajne faktore u sprečavanju nepoželjnih vibracija [11].

Eksperimentalna modalna analiza zasniva se na pobuđivanju strukture vanjskim silama te praćenja odziva sustava na temelju čega se dobivaju željeni rezultati. Dakle, struktura na ispitnom stolu mora imati pobudu koja će učiniti da struktura oscilira. Također, potrebno je izmjeriti pokrete strukture nakon što je pobuđena. To se uobičajeno postiže postavljanjem akcelerometara na određene pozicije na strukturu. Tada je odziv potrebno analizirati i dobiti željene rezultate [11], [12].

Strukturu je najprije potrebno skinuti iz okruženja gdje funkcionira u eksploataciji te ju postaviti na mjesto gdje će se testirati. Treba osigurati da je postavljena i pričvršćena na način najbliži kako će funkcionirati u eksploataciji. Kada je struktura postavljena, potrebno ju je pobuditi.

Pobuđivanje strukture moguće je na nekoliko načina no najjednostavniji način je testiranje čekićem. Takvo testiranje podrazumijeva jednostavan čekić kojim se struktura pobuđuje

udarcima. Poželjno je koristiti čekiće prilagođene za modalnu analizu koji na sebi imaju ugrađene senzore koji omogućavaju praćenje pobude odnosno iščitavanje parametara pobude. Najčešće se koriste akcelerometri kako bi se krajnje dobila sila udarca i kasnije uparila s odzivom sustava. Ovako jednostavna pobuda sustava ima nedostatke koji se očitavaju u nedovoljnoj opsežnosti pobude strukture. To znači da je ponekada čak iza jednostavne strukture potrebno i do stotinu udaraca kako bi se dobio cjelovit odziv sustava. Veliki broj udaraca je potreban kako bi se pogodile točke na kojima će se pobuditi svi važni modalni oblici u odzivu.

Nadalje, češće korištena metoda pobude su vibratori koji pričvršćeni na strukturu generiraju oscilaciju strukture. Pobudu je moguće unositi u obliku sinusnog signala te mijenjajući frekvenciju kroz čitav spektar očitavati odziv i na temelju toga otkrivati frekvencije kod kojih postoje relativno velike oscilacije. Kod kompleksnih struktura pobuda sinusnim signalom iziskivala bi velik broj testova i bila bi zahtjevna. Stoga se češće upotrebljava signal uzbude s širokim spektrom frekvencija koji se sastoji od nasumičnog šuma, sinusnog signala, različitih nasumičnih impulsa i sl. Na taj način struktura je u kraćem vremenskom periodu izložena širem frekvencijskom spektru stoga se može reći da struktura ima cjelovitiju pobudu [12].

Nakon što je struktura pobuđena potrebno je zabilježiti odziv strukture. Kao što je već rečeno struktura ima na sebi postavljene akcelerometre koji bilježe akceleracije a sukladno tome i pomake strukture. Akcelerometre je potrebno postaviti na mjesta gdje se očekuju oscilacije kako bi se odziv čim preciznije prenio na senzore [12].

Dobiven signal odziva sustava u vremenskoj je domeni. Kao takav, za modalnu analizu nije koristan. No, razvitkom FFT (*Fast Fourier Transform*) algoritma oscilacije u vremenskoj domeni, moguće je prenijeti u frekvencijsku domenu. Odziv strukture u frekvencijskoj domeni koristan je za modalnu analizu jer je moguće očitavati dominantne frekvencije u oscilatornom gibanju. Dobiveni signal potrebno je obraditi prilagodbom krivulje (*curve fitting*) kako bi se dobila prilagođena krivulja koja predstavlja odziv u frekvencijskoj domeni. Veza između signala pobude i signala odziva jest prijenosna funkcija (*Frequency Transfer Function – FRF*). Odnosno, prijenosna funkcija pokazuje koliki će biti odziv za određenu pobudu koja je unesena u sustav. Na temelju dobivenih podataka i na temelju prijenosne funkcije moguće je odrediti kako će se testirana struktura ponašati kada je pobuđena određenim signalom odnosno kakvim će oblicima titrati. No, oblici dobiveni vanjskom pobudom nisu oblici modova (*modal shape*), već *Operational Deflection Shape – ODS*. Takav oblik predstavlja odziv kakav će imati struktura kada je izložena određenoj pobudi. Važno je napomenuti kako je ODS specifičan i vrijedi kada je struktura pod pobudom, a oblici moda su rješenje diferencijalnih jednadžbi koji predstavljaju frekvencije i oblike vibriranja strukture kada ona nije opterećena vanjskim silama [11], [12].

Iz oblika ODS moguće je postupcima prilagodbe krivulje dobiti i modalne oblike što je zapravo cilj cjelokupne eksperimentalne modalne analize.

### 2.3.2. Operativna modalna analiza

Operativna modalna analiza (*eng. Operational Modal Analysis - OMA*) podvrsta je eksperimentalne modalne analize. Konceptualno se EMA i OMA ne razlikuju značajno. Kod obje se na pobuđenoj strukturi mjeri odziv koji je kasnije korišten za dobivanje modalnih parametara no okruženje u kojem se provode i pobuda se značajno razlikuju. OMA se provodi u okruženju u kojem se struktura nalazi u eksploataciji. Dakle, nije potrebno skidanje komponenti kako bi se prenesle u laboratorij specijaliziran za analizu. Također pobuda koju koristi OMA jest prirodna pobuda odnosno pobuda okruženja u kojem struktura funkcionira u eksploataciji. Upravo se zbog toga tehnika provedbe OMA-e naziva NExT (*Natural Excitation Technique*). Upravo zbog tih karakteristika analize (pobuda nije potrebna, struktura ostaje na mjestu), OMA je visoko primjenjiva na strukture kao što su mostovi, zgrade i ostale strukture koje je teško pomicati ili treba uložiti veliku energiju kako bi se pobudile. Tehnologija se temelji na definiciji *korelacijske funkcije* koja je prijenosna funkcija odziva sustava na prirodnu pobudu. Korelacijska funkcija može se prikazati kao suma prigušenih sinusoida koja ima pripadne parametre poput prirodne frekvencije, oblika moda i prigušenja što zapravo predstavlja rješenje cjelokupnog modalnog modela. Danas su razvijeni brojni algoritmi koji su prilagođeni rješavanju problema modalne analize. No, detaljno razumijevanje OMA nije presudno za daljnju razradu ove teme, stoga neće biti detaljnije obrađena.

### 3. Tehničko-eksploatacijske karakteristike lakog zrakoplova C-172

Ovaj rad se temelji na proučavanju i analizi vibracija na podvozju lakog zrakoplova. Za potrebe modalne analize podvozja lakog zrakoplova odabran je zrakoplov C-172 čije su tehničko-eksploatacijske karakteristike opisane u nastavku ovog poglavlja.

#### 3.1. Značajke zrakoplova C-172

C-172 je laki zrakoplov s klipnim motorom, ima visoku ugradnju krila i četiri sjedišta. Proizvođač ovog zrakoplova je američka tvrtka za proizvodnju zrakoplova Cessna Aircraft Company. Prvi let ovog zrakoplova bio je 1955. godine, što ga čini jednim od najdugovječnijih zrakoplova u eksploataciji. C-172 je zrakoplov koji je proizveden u najvećem broju primjeraka i broji nešto više od 44000 proizvedenih primjeraka. Upravo je zbog učestalosti korištenja odabran ovaj tip kao predstavnik lakih zrakoplova [13].

U Tablici 1. navedene su tehničko-eksploatacijske karakteristike zrakoplova C-172. Detaljniji opis konstrukcije i pogonskog sustava razrađen je u sljedećim poglavljima.

Tablica 1. Tehničko eksploatacijske karakteristike zrakoplova C-172, [14]

Značajka	Vrijednost
Duljina:	8.28 [m]
Raspon krila:	11 [m]
Visina:	2.71 [m]
Aeroprofil:	NACA 2412
Površina krila:	16.2 [m <sup>2</sup> ]
Aspektni odnos:	7.32
Maksimalna uzletna masa:	2450 [lb], 1111 [kg]
Kapacitet goriva:	56 [US gal], 212 [l]
Pogonski sustav:	Lycoming IO-360-L2A
Elisa:	Dva kraka
Brzina krstarenja (IAS):	122 [kt], 226 [km/h]
Maksimalna brzina: (IAS)	160 [kt], 302 [km/h]
Operativni plafon leta:	13500 [ft]
Broj članova posade:	1
Broj putnika:	3

#### 3.2. Konstrukcija zrakoplova C-172

Trup zrakoplova jest semi-monokok što uobičajeno predstavlja konstrukciju sačinjenu od metalnih greda, metalnih okvira i metalne oplata. Trup skupa s cjelokupnom strukturom

zrakoplova je načinjen od metala što je bitno za znati prilikom analize vibracija i oscilacija strukturnih komponenata ovog zrakoplova. Istaknuta strukturna komponenta je klipni motor koji se nalazi ispred vatrozida u nosu zrakoplova. Motor je zbog prirode funkcioniranja i relativno velike mase značajna komponenta u analizi vibracija zrakoplova i zbog toga je detaljnije opisan dalje u poglavlju. Također značajna komponenta jest i platforma ispod kabine zato što je ta konstrukcijska komponenta veza između podvozja i ostatka zrakoplova.

Glavne strukturalne komponente krila zrakoplova su dvije ramenjače koje se protežu duž oba krila. Dijele se na prednju i stražnju i imaju funkciju glavnih nosioca naprezanja na krilu. Oko ramenjača postavljena su rebra koja imaju oblik pripadnog aeroprofila. Rebra su međusobno povezana međurebrenim ojačanjima (eng. *stingers*). Cijela opisana struktura obavijena je metalnom oplatom te krilo na taj način poprima aerodinamički oblik. Oplata je za rebra pričvršćena zakovicama [14].

C-172 ima konvencionalni rep što znači da se sastoji od vertikalnog i horizontalnog stabilizatora. Također konvencionalni rep podrazumijeva da je horizontalni stabilizator pričvršćen na dnu vertikalnog stabilizatora, na trup zrakoplova. Također na rep zrakoplova se kod ovog tipa nadovezuje i dorsalna komponenta vertikalnog stabilizatora koja doprinosi direkcionalnoj i lateralnoj stabilnosti. Struktura repnih površina analogno krilu građena je od glavnih ramenjača i rebara, koji su obavijeni oplatom [14].

Upravljačke površine su konvencionalne, što uobičajeno podrazumijeva sljedeći raspored. Krilca su smještena na stražnjem bridu krila bliže vrhovima krila kako bi bile učinkovitije kod stvaranja momenata potrebnih za zakretanje zrakoplova oko longitudinalne osi zrakoplova. Kormilo dubine nalazi se na stražnjem dijelu horizontalnog stabilizatora i proteže se njegovom cijelom dužinom. Kormilo smjera postavljeno je na stražnjem dijelu vertikalnog stabilizatora.

Građu upravljačkih površina, analogno krilu, čini ramenjača koja je glavni nosioc opterećenja, rebra koja skupa s oplatom tvore aerodinamički oblik upravljačkih površina. Suprotno krilu, oplata upravljačkih površina kormila dubine i krilaca rebrastog je oblika. Specifičnost kormila dubine jest rogljasta aerodinamička kompenzacija. Aerodinamičke kompenzacije služe tome da se moment koji proizvodi upravljačka površina smanji i time smanji sila kojom pilot mora otklanjati komande zrakoplova. Kod rogljaste kompenzacije kormilo dubine je, na vrhu horizontalnog stabilizatora, produljeno prema napadnom bridu.

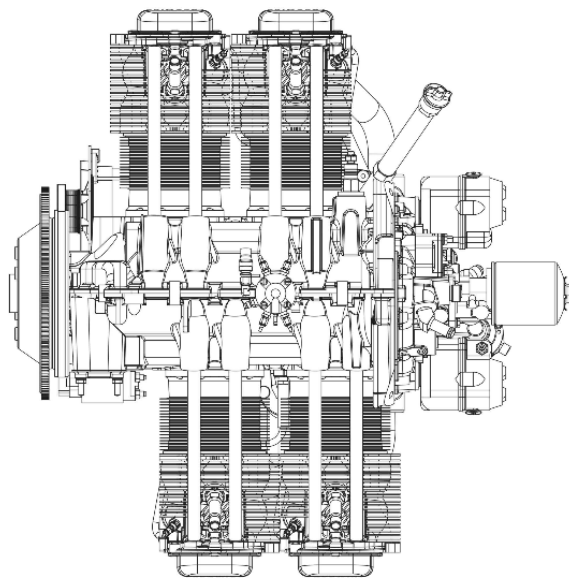
Zakrilca na ovom tipu zrakoplova imaju jedan procjep te se otklanjaju  $30^{\circ}$ - $45^{\circ}$  ovisno od varijate zrakoplova. Zakrilcima se upravlja električnim aktuatorom [14].

### 3.3. Pogonski sustav

Zbog prirode funkcioniranja pogonskog sustava ovog zrakoplova, razmjerno velikog broja komponenata koje osciliraju, rotiraju i zbog cjelokupne relativno visoke mase, smatra se da je doprinos vibracija pogonskog sustava značajan. Zbog toga je u ovom poglavlju ukratko opisan pogonski sustav sa svojim karakteristikama. Pogonski sustav koji je ugrađen na C-172 klipni je motor s unutarnjim izgaranjem. Motor za ovaj zrakoplov proizveden je od proizvođača

Lycoming. Zbog dugog eksploatacijskog perioda kroz koji se ovaj zrakoplov proizvodi postoji nekoliko inačica ovog motora koji je ugrađen u zrakoplov C-172 [14].

Predstavnik zrakoplova C-172 opremljen je inačicom motora IO-360 L2A. Kao i ostale inačice ovog motora IO-360 L2A je bokser motor. Za lakše razumijevanje izgleda motora, na Slici 6. ilustriran je motor IO-360L2A. Motor je četverocilindrični, a radni obujam, po čemu je motor simbolično dobio naziv, iznosi 361 [in<sup>3</sup>]. Cilindri su konvencionalne strukture a sastoje se od košuljice i glave cilindra. Strukture na sebi imaju izvedene proreze kako bi disipacija topline bila što učinkovitija. Disipacija topline odvija se strujanjem vanjskog zraka, putem šupljina u prostoru gdje je smješten motor. Promjer cilindra je 5,125 [in], a hod klipa je 4,375 [in]. Kompresijski omjer iznosi 8,5:1. Koljenasto vratilo nalazi se u osi simetrije motora između cilindara. Ono je izvedeno od kovanog čelika legiranog kromom, niklom i molibdenom. Koljenasto vratilo prenosi kinetičku energiju linearnog kretanja klipova u rotaciju koju direktno (bez redukcija) prenosi na elisu. Elisa ima desno okretanje s gledišta pilota. Na koljenasto vratilo su letećim rukavcima pričvršćene klipnjače. Na vrhovima klipnjača pričvršćeni su klipovi od lijevanog aluminija koji na sebi imaju prstenove koji imaju zadaću zadržavanja kompresije i skupljanja ostataka ulja s košuljice. Ovaj motor ima mokri karter koji se nalazi na dnu motora u kojem se nalazi ulje za podmazivanje i hlađenje motora. Kapacitet zaprimanja ulja u karteru je 8 kvarata [Qt]. Također motor ima dvostruki sustav magneta za paljenje [14].



*Slika 5. Izgled motora IO-360 L2A, [15]*

Motor je ograničen na brzinu vrtnje 2400 RPM pri čemu razvija snagu od 117.7 kW (160 HP). U eksploataciji se koriste i inačice ovog motora koji razvijaju 132.4 kW (180 HP) pri 2700 RPM.

Motor ima masu od 126.4 kg (278 lb) što uključuje; sustav ubrizgavanja, starter generator, magnete, svjećice, uljne vodove, ispušni sustav i kontrole za upravljanje motorom. Navedena masa iznosi 11.3% ukupne maksimalne uzletne mase što je značajan podatak s obzirom da motor ima značajan doprinos u generiranju vibracija [14].

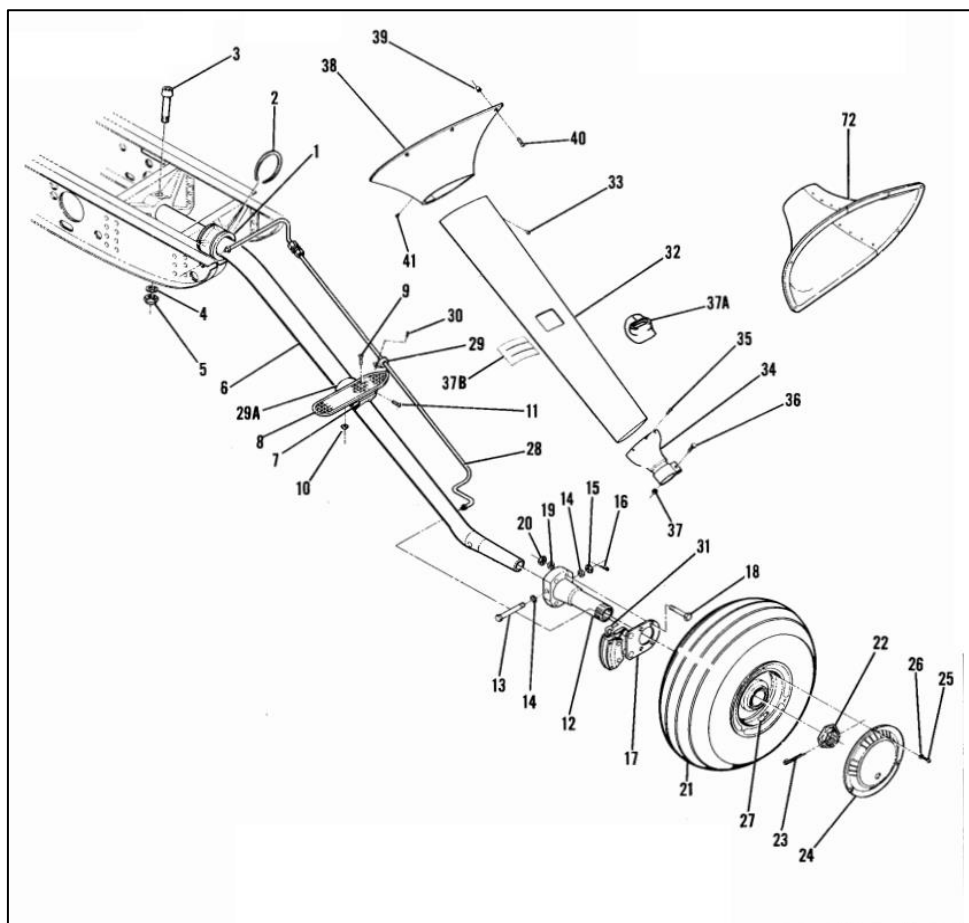
Propeler koji se koristi za stvaranje vučne sile fiksnog je koraka i napravljen je od lijevanog aluminijskog materijala, a promjer mu je 75 in. Gorivo koje motor koristi je avionski benzin oktanskog broja 100LL, 96 ili 91 [14].

### 3.4. Podvozje

Podvozje zrakoplova C-172 je tzv. tricikl. Tricikl formacija podvozja podrazumijeva jedan kotač ispred težišta i dva kotača iza težišta zrakoplova. Prednji kotač uobičajeno je smješten ispod nosa zrakoplova stoga se i naziva nosni kotač (eng. *nose gear*). Stražnja dva kotača (eng. *main gear*), se upravo tako i naziva u engleskoj terminologiji zbog toga što nosi većinu težine zrakoplova kada zrakoplov stoji na tlu, ili rula. Također pri slijetanju zrakoplov se najprije oslanja na stražnje kotače a zatim se spuštanjem nosa oslanja na nosni kotač.

Funkcija podvozja zrakoplova jest omogućavanje kretanja po aerodromskim površinama ali i apsorpcija udara uzrokovanih neravninama na tlu ili pak udara prilikom slijetanja. Zbog okruženja u kojem podvozje mora funkcionirati, struktura podvozja mora biti čvrsta ali i elastična kako bi upijala udare i time povećavala udobnost pojedinih faza leta ali i štitila komponente sustava od oštećenja [14].

Glavne komponente glavnog podvozja su: čelični potpornici i kotač. Oni su glavna noseća struktura stražnjeg podvozja. Slika 6. prikazuje komponente stražnjeg podvozja.



Slika 6. Prikaz komponenti glavnog podvozja, [15]



Potpornik je cjevastog oblika (na Slici 6. označen brojem 6) i cijeli je ispunjen. Izrađen je od čelika, no nije moguće odrediti leguru jer takav podatak u eksploataciji nije na raspolaganju. Dio podvozja je i spomenuti kotač koji se sastoji metalnog naplatka na koji se postavlja guma (na Slici 6. označen brojem 21). Gume koje se postavljaju na ovaj tip zrakoplova su s ugrađenom zračnicom. Dimenzija gume na zrakoplovu koji se promatra jest 6.00-6. Oznaka znači da je širina gume 6 in, te da ista guma nasjeda na naplatak koji ima dijametar od 6 in. Jednake dimenzije vrijede i za nosni kotač.

Osim osnovnih elemenata stražnjeg podvozja, podvozje, kao što je moguće vidjeti na Slici 6. sadrži i dodatne komponente koje ga čine potpuno funkcionalnim. Na glavni potpornik četirima vijcima, pričvršćena je i osovina na koju se montira kotač (na Slici 6. označena brojem 12). Također između kotača i potpornika pričvršćena je i platforma koja služi za montiranje komponenata kočionog sustava. Tako se s unutarnje strane kotača nalazi i disk i kliješta s pločicama koje obavljaju funkciju kočenja (na Slici 6. označene brojem 17). Kočioni sustav je hidraulički te je na podvozju prisutan i hidraulički vod koji je pričvršćen uz glavni potpornik. Na polovici potpornika pričvršćeno je gazište koje služi kao pomoć pri ulasku u zrakoplov (na Slici 6. označen brojem 8).

Opisane komponente, složene u cjelinu, nisu najpovoljnijeg oblika s aerodinamičkog gledišta. Stoga je veći dio potpornika obložen metalnom oplatom koja ima oblik krila kako bi se poništili negativni aerodinamički učinci i kako bi cjelokupno podvozje stvaralo što manje otpora (na Slici 6. označen brojem 32). Oplata se sastoji od jednog dijela koji se montira na oplatu zrakoplova i na ostala dva koji se montiraju na potpornik. Na kotač je također moguće montirati aerodinamičnu oplatu (eng. *fairing*) koja ima istu funkciju kao i kod potpornika.

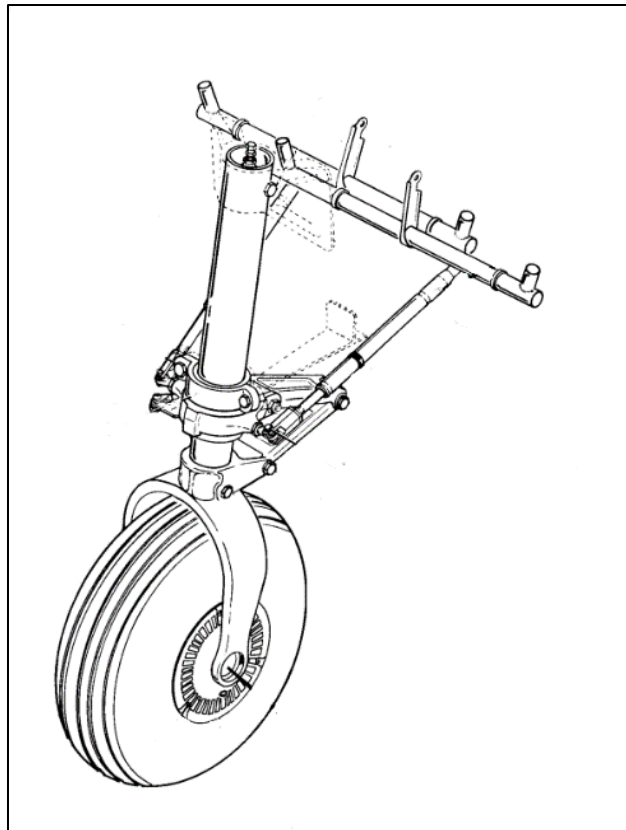
Gornji dio potpornika koji se pričvršćuje za zrakoplovnu konstrukciju ulazi u platformu na dnu zrakoplova (eng. *landing gear bulkhead*), koja je između ostalog namijenjena pričvršćivanju potpornika podvozja. Dio potpornika ulazi kroz dva oslonca gdje se pričvršćuje vijkom, što se također može vidjeti na Slici 6. (na Slici 6. označene brojem 1 i 3).

Opisano je glavno podvozje s jedne strane, a podvozje s druge strane simetrično je opisanom.

Prednji dio podvozja uspoređujući ga sa stražnjim ima nekoliko dodatnih funkcija zbog čega se razlikuje izvedba konstrukcije. Osim nošenja zrakoplova po zemaljskim površinama, nosni kotač ima funkciju skretanja kada zrakoplov rula. Stoga je opremljen sustavom koji omogućuje skretanje. Također, s obzirom da se iznad nosnog kotača nalazi motor i gotovo sva instrumentacija, nosni kotač je opremljen amortizerom kako bi udari uslijed operacija u eksploataciji bili što manje štetni za sustave i opremu zrakoplova. Na Slici 7. prikazan je prednji dio podvozja [14].

Amortizer nosnog kotača izveden je iz dva cilindra, koji su na krajevima zatvoreni i ispunjeni hidrauličkim fluidom i komprimiranim zrakom (ili dušikom ovisno od izvedbe). Donji cilindar čvrsto je povezan vilicom i vrši funkciju klipa, koji ulazi u gornji cilindar. Donji cilindar ispunjen je hidrauličkim fluidom i on obavlja prigušnu komponentu amortizacije. Donji cilindar kod primjene sile ulazi u gornji cilindar ispunjen komprimiranim plinom. Gornji cilindar obavlja u tom slučaju elastičnu komponentu. Zbog apsorpcije energije udara, dio energije se

konvertira u toplinsku energiju koja zrači u okolinu što se naziva disipacijska komponenta amortizera.



Slika 7. Prednji dio podvozja, [15]

Dva cilindra su povezana kliještima sa stražnje strane koja sprečavaju okretanje unutarnjeg cilindra unutar vanjskog. Ispod gornjeg hvatišta kliješta smješteno je hvatište na koje se nastavljaju šipke čija je zadaća na nožnu komandu pilota zakrenuti nosni kotač u svrhu skretanja.

Za opisani tip podvozja, jedan kotač s vilicom, javljaju se specifične vibracije sinusoidnog oblika tzv. *shimmy*. Vibracija uzrokuje da se kotač kreće sinusoidnom putanjom razmjerno velike frekvencije što se na posljetku doima kao potencijalno opasna vibracija. Tome se doskače ugradnjom viskoznog prigušivača čija je uzdužna os postavljena paralelno s longitudinalnom osi zrakoplova. Viskozni prigušivač u slučaju pomaka vodi hidraulički fluid kroz otvore koji stvaraju silu suprotne orijentacije u odnosu na relativnu brzinu što umanjuje kretanje nosnog kotača odnosno prigušuje *shimmy* vibraciju. Prigušivanje ove sinusoidne vibracije povećava udobnost leta ali i štiti komponente prednjeg podvozja od potencijalnih oštećenja i na taj način produžuje vijek komponenata u eksploataciji. Izgled nosnog dijela podvozja može se vidjeti na Slici 7. [14].

## 4. Vibracije podvozja na lakom zrakoplovu

U ovom poglavlju opisani su izvori vibracija na pripadnom zrakoplovu te vibracije karakteristične za podvozje lakog zrakoplova. Također prikazan je proces modeliranja podvozja putem jednadžbi. Na poslijetku prikazan je proces rješavanja jednadžbi i dobivanja vrijednosti potrebnih za modalnu analizu.

### 4.1. Izvori vibracija na lakom zrakoplovu

Laki zrakoplov kakav je opisan u prethodnom poglavlju ima niz izvora vibracija. Pogonski sustav se može izdvojiti kao značajan generator vibracija zbog prirode funkcioniranja. Pogonski sustav – klipni motor, sadrži pokretne dijelove, od kojih se neki gibaju linearno, neki rotiraju. Akceleracije spomenutih dijelova s pripadnom masom stvaraju inercijske sile koje se prenose na nosače motora i dalje prenose na zrakoplovnu konstrukciju. Propeler koji je u slučaju C-172 direktno spojen na koljenasto vratilo također generira vibracije čiji su izvor torzijski impulsi koji se javljaju uslijed uvijanja koljenastog vratila. Propeler vibrira i zbog zazora ležajeva na kojima leži koljenasto vratilo te se javljaju i poprečne oscilacije elise (pomaci naprijed – natrag s gledišta pilota) [16].

Osim samog pogonskog sustava, vibracije na zrakoplovu mogu biti uslijed nastajanja zraka na krilo. Uzgon oko krila stvara se strujanjem zraka oko krila, čime se remeti struja zraka, posljedično stvaraju tlakovi oko krila a time i uzgon. Treba uzeti u obzir da neporemećena struja zraka u eksploataciji nije idealna kao u laboratorijskim uvjetima. Stoga, smicanje struja zraka, vertikalni ili horizontalni udari vjetra te bilokakve turbulencije učiniti će da krilo oscilira oko ravnotežnog položaja, što se prenosi na trup zrakoplova i interpretira kao vibracije. Nadalje, na krilu se javljaju i aero-elastične vibracije zvane *flutter*. Takve se vibracije javljaju pri relativno visokim brzinama i uzrokuju titranje krila u vertikalnoj ravnini i oko lateralne osi [16].

Opisane vibracije značajne su za promatranje vibracija podvozja, zbog toga što se putem zrakoplovne konstrukcije one prenose na ostale komponente zrakoplova pa tako i na podvozje. Stoga se na podvozju mogu očekivati vibracije sličnih karakteristika kao i prijašnje opisane vibracije. No, kada se zrakoplov kreće po površinama na tlu oscilacije na podvozju moguće je očekivati zbog kretanja po površinama koje nisu idealno ravne, primjerice asfalt. Posebno treba naglasiti da se značajnije vibracije mogu očekivati kod kretanja po zemljanim ili travnatim površinama što je čest slučaj sa lakim zrakoplovima generalne avijacije kao što je to C-172.

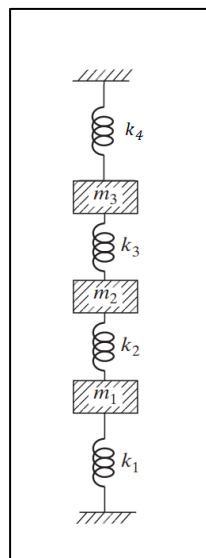
Ovaj rad promatra glavno podvozje, njegove vibracije odnosno modalna svojstva. Stoga treba detaljnije proučiti komponente podvozja kako bi se konstruirao reprezentativan model. Kao što je to opisano u prethodnom poglavlju glavno podvozje sastoji se od nekoliko komponenata. Primjerice, ako uzmemo glavne komponente koje su zadužene za nošenje tereta zrakoplova možemo svesti analizu na tri glavne komponente: potpornik, kotač i osovinu kao vezu između prethodne dvije. Promatrajući s gledišta vibracija može se reći da su u pitanju tri tijela sa svojim svojstvima. Kako svako tijelo u prostoru ima tri rotacije i tri translacije može se reći da jedan

ovakav pojednostavljeni sustav ima 12 stupnjeva slobode. To znači da je potrebno dvanaest parametara za opis pozicije ovog sklopa u prostoru. Dalje u poglavlju složen je matematički model kojim bi se mogle opisati vibracije podvozja i dobiti željeni rezultati.

Kada je riječ o vibracijama, često se dijele na one s jednim, dva ili  $n$  stupnjeva slobode [17]. Kako bi daljnji matematički izrazi bili primjenjivi na promatrani slučaj stražnjeg podvozja, prezentirat će se jednadžbe u općem obliku koje opisuju sustave s više od dva stupnja slobode.

#### 4.2. Modeliranje sustava s $n$ stupnjeva slobode

Aproksimacija kontinuiranog sustava s  $n$  stupnjeva slobode moguća je s nekoliko metoda. No, najjednostavnija metoda jest zamjena stvarnih tijela s krutim tijelima istih masa koje su međusobno povezane oprugama bez mase (koje predstavljaju elastičnu komponentu) i viskoznim prigušivačima bez mase (koji predstavljaju prigušnu komponentu). Takav jedan sustav prikazan je na Slici 8. Minimalan broj parametara koji je potreban za opisivanje sustava jest onaj koji odgovara broju stupnjeva slobode svim aproksimiranim masama zajedno. Svaka masa predstavlja komponentu sustava. To znači da što je veći broj masa je korišten za modeliranje znači da će aproksimacija biti točnija jer vjernije reprezentira stvarni sustav. Stoga ako se uzme u obzir promatrano glavno podvozje koji je bitan za ovaj rad moguće je napraviti model kao na Slici 8. Tri krute mase predstavljaju potpornik, osovinu i kotač, a opruge predstavljaju njihova elastična svojstva [18].



Slika 8. Pojednostavljeni model podvozja, [18]

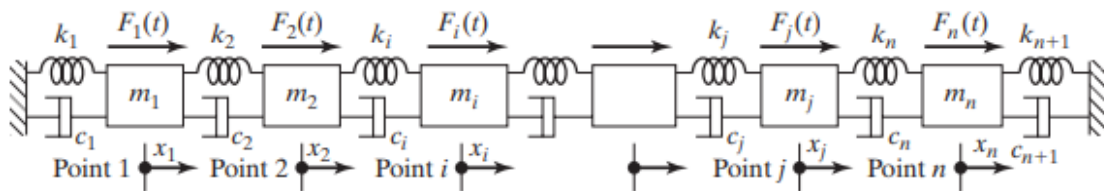
### 4.3. Jednadžbe gibanja koristeći Drugi Newtonov zakon

Kako bi se došlo do željenih rješenja potrebno je opisati gibanje svakog tijela po svim stupnjevima slobode. Proces opisivanja gibanja sustava je sljedeći, kada se opisuje sustav s  $n$  stupnjeva slobode: [18]

- Postaviti prikladne koordinate koje opisuju pozicije krutih masa u sustavu, odrediti smjer koji će se uzimati kao pozitivan za vektore pomaka, brzine i akceleracije krutih masa.
- Odrediti konfiguraciju za koju će sustav biti u statičkoj ravnoteži
- Nacrtati dijagram slobodnih tijela s masa oprugama prigušenjem i silama koje djeluju na pojedine mase.
- Primijeniti Drugi Newtonov zakon na svako od tijela koje je prikazano kao slobodno tijelo u obliku (8):

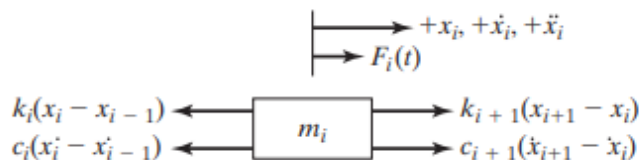
$$m_i \ddot{x}_i = \sum_j F_{ij} \quad (8)$$

Gdje  $m_i$  [kg] predstavlja masu  $i$ -tog tijela,  $\ddot{x}_i$  [m/s<sup>2</sup>] dvostruka derivacija pomaka,  $F_{ij}$  silu  $i$ -tog elementa za  $j$  komponenta. Za primjer uzet će se sustav kao što je na Slici 9. Prikazano je  $n$  masa koje su međusobno povezane oprugama elastičnih konstanti  $k$  te prigušnicima konstanti prigušenja  $c$ . Određeni su smjerovi koji označavaju pozitivne vektore pomaka, brzine i akceleracije te su označene točke koje označavaju ravnotežne položaje masa sustava [18].



Slika 9. Primjer modela koji se sastoji od  $n$  tijela, [18]

Potrebno je napraviti dijagram slobodnog tijela kao što je to ilustrirano na Slici 10. Potrebno je izraziti veze tijela s tijelima koji ga okružuju kao što je to učinjeno na Slici 10.



Slika 10. Model slobodnog tijela, [18]

Prema skici na Slici 10. moguće je zapisati jednadžbu (9) koja prikazuje jednadžbu gibanja za tijelo mase  $m_i$ .

$$m_i \ddot{x}_i = -k_i(x_i - x_{i-1}) + k_{i+1}(x_{i+1} - x_i) - c_i(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) + c_{i+1}(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) + F_i; \quad (9)$$

$$i = 2, 3, \dots, n - 1$$

Gdje  $m_i$  [kg] predstavlja masu  $i$ -tog tijela,  $x$  [m] pomak tijela, a  $c$  [Ns/m] prigušnu konstantu. Za potpuni model jednadžbu je potrebno ispisati za svaku masu modeliranog sustava, što znači da u realnom slučaju je moguće da će biti potrebno ispisati veliki broj jednadžbi kako bi se opisao cijeli model. Ovako veliki sustav jednadžbi relativno je nepregledan pa je jednadžbu moguće zapisati jednostavnije, u matricnom obliku kao što je to zapisano izrazom (10).

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [c]\dot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F} \quad (10)$$

Veličine  $[m]$ ,  $[c]$  i  $[k]$  u jednadžbi (10), matrice su sustava koje sadrže mase, elastične konstante i prigušne konstante, i u općem obliku se zapisuju u obliku izraza (11) [18], [17].

$$[m] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{11} & m_{11} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{1n} & m_{2n} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}, [c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{11} & c_{11} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix},$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{11} & k_{11} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1n} & k_{2n} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\vec{x} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix}, \dot{\vec{x}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{Bmatrix}, \ddot{\vec{x}} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{x}_n(t) \end{Bmatrix}, F = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{Bmatrix}$$

Osim razrađenog procesa pisanja diferencijalnih jednadžbi gibanja koje opisuju sustav s  $n$  stupnjeva slobode, jednadžbu (10) u matricnom obliku moguće je zapisati i drugim metodama. Moguće je ispisati koeficijente utjecaja (mase i krutosti odnosno elastičnosti). Proces zahtjeva skiciranje sustava krutih masa njihovih pozicija i međusobnih odnosa, kao i crtanje dijagrama slobodnih tijela. S obzirom da se eksploataciji susreću sustavi s velikim brojem elemenata i još većim brojem stupnjeva slobode, modeliranje jednadžbi koje opisuju takve sustave vrlo je kompleksno.

U svrhu pojednostavljenja u sljedećem će se poglavlju razmotriti alternativni pristup jednadžbama gibanja, i više se neće koristiti Drugi Newtonov zakon. Alternativni pristup temelji se na energiji sustava.

#### 4.4. Potencijalna i kinetička energija

Prije nego se započne raspisivanje jednadžbi energije koje će se dalje koristiti u razradi, potrebno je spomenuti da će se opisivanje položaja elemenata u prostoru drukčije zapisivati. Kada se spominje opisivanje sustava u klasičnom smislu u koordinatnom sustavu najčešće je potrebno opisati tijelo koordinatama poput  $(x, y)$ . Tada se točku u dvodimenzionalnom prostoru može smjestiti nedvosmisleno na jedno mjesto. No, ako se zamisli masa ovješena na užu, opisivanje mase koordinatama  $(x, y)$  postaje manje intuitivno. Spomenuto njihalo moguće je opisati jednostavno kutom  $\theta$  koji označava otklon njihala iz ravnotežnog položaja. S obzirom da užu uvijek ima jednaku duljinu kut  $\theta$  dovoljan je kako bi se nedvosmisleno odredio položaj mase u dvodimenzionalnom prostoru. Za razliku od koordinata u kartezijevom sustavu, broj generaliziranih koordinata u slobodnom prostoru jednak je broju stupnjeva slobode, što je minimalan broj potreban kako bi se opisao položaj sustava u prostoru. Generalizirane koordinate skup su neovisnih parametara koji nedvosmisleno opisuju položaj sustava u određenom trenutku. Za sustave s holonomnim vezama uvijek je moguće pronaći skup nezavisnih koordinata koje određuju položaj sustava a ne pojavljuju se u jednadžbama veza. Skup generaliziranih koordinata definiran je preko radij vektora čestica sustava [19], [20]. Stoga, koristan alat za daljnju razradu jest upotreba derivacije koordinati koji će dati generalizirane koordinate brzine i akceleracije. Generalizirane koordinate u literaturi najčešće se označavaju simbolom  $q$  [18].

Kada vanjske sile djeluju na promatrani sustav, nova konfiguracija sustava može se dobiti na način da se generalizirane koordinate  $q_j$  (gdje  $j$  predstavlja stupanj slobode) promjene za iznos  $\delta q_j$ . Ako se definira da  $U_j$  predstavlja obavljen rad pri promjeni generaliziranih koordinata, sila koja djeluje na sustav može biti definirana u obliku izraza (12).

$$Q_j = \frac{U_j}{\delta q_j}, j = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

Gdje  $U_j$  predstavlja rad,  $Q_j$  predstavlja generaliziranu silu (ili moment), a  $q_j$  generaliziranu koordinatu odnosno linearni ili kutni pomak, što je primjenjivo za promatrani sustav.

Sada, kada su definirane generalizirane koordinate koje će se koristiti, valja definirati jednadžbe energije sustava. Kao što je poznato, energija se može podijeliti na potencijalnu i kinetičku energiju. Potencijalna energija može se definirati kao energija nekog tijela zbog specifičnog položaja u prostoru ili deformacija. Kada se govori o energiji zbog položaja u obzir se uzima utjecaj sile teže. No, za proučavanje vibracija češće će se koristiti energija deformacija odnosno ona energija pohranjena u deformiranim oprugama koje predstavljaju elastična svojstva tijela [21]. Stoga se ukupna potencijalna energija sustava može definirati prema izrazu (13).

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i x_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} x_i x_j \quad (13)$$

Gdje  $V$  [J] predstavlja potencijalnu energiju  $F$  [N] silu, a  $x$  [m] pomak. Izraz (13) govori da je ukupna potencijalna energija sustava jednaka sumi potencijalnih energija pojedinih masa. Odnosno, da je potencijalna energija jednaka polovini umnoška sile i pomaka primijenjene na  $i$ -tu masu sustava, a uvrštavajući izraz (8) u jednadžbu dobiva se finalni oblik kao u jednadžbi (13).

Kinetička energija izražava energiju tijela koje ima pripadnu masu i giba se određenom brzinom. Kinetičku energiju može se definirati kao mjeru rada koju tijelo može obaviti, svladavajući vanjske sile, prije nego dođe u stanje mirovanja [21]. Kinetičku energiju cijelog sustava može se definirati prema izrazu (14).

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i^2 \quad (14)$$

Gdje  $T$  [J] predstavlja kinetičku energiju,  $m$  [kg] masu,  $x$  [m] pomak, a  $n$  broj elemenata sustava. Prema izrazu (14), ukupna kinetičke energija sustava jednaka je sumi kinetičkih energija pojedinih masa, a pojedine kinetičke energije jednake su polovini umnoška mase i kvadrata brzine.

Zaključno se može reći da je potencijalna energija u funkciji kvadrata pomaka, a kinetička u funkciji kvadrata prve derivacije pomaka. U sljedećim jednadžbama vektor pomaka  $\vec{x}$  i njegova prva derivacija  $\dot{\vec{x}}$  bit će zamijenjene generaliziranim vektorom pomaka  $\vec{q}$  i generaliziranim vektorom brzine  $\dot{\vec{q}}$  [18].

#### 4.5. Lagrangeove jednadžbe

Poglavlje 4.2 pokazalo je formulaciju jednadžbi gibanja putem Drugog Newtonovog zakona. No kod većine slučajeva u eksploataciji koristi se alternativna metoda za pisanje jednadžbi gibanja putem – Lagrangeovih jednadžbi. Generalizirane koordinate, i energija razradili su se upravo zbog toga što Lagrangeove jednadžbe koriste te veličine. Naposljetku rješavanje diferencijalnih jednadžbi ne razlikuje se koju metodu koristili za izvod istih, no za promatrani slučaj podvozja kakav je tema ovog rada, primjenjivije je koristiti Lagrangeove jednadžbe za izvod. Primjenjivost proizlazi iz lakše formulacije sustava jednadžbi zbog toga što relativno veliki broj stupnjeva slobode predstavlja kompleksan sustav pisanja ako se koriste kinematičke jednadžbe [18].

Lagrangeova jednadžba za sustav sa  $n$  stupnjeva slobode može se definirati prema izrazu (15).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j^{(n)}, j = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

Gdje  $T$  [J] predstavlja kinetičku energiju,  $V$  [J] potencijalnu energiju, a  $q_j$  generalizirani vektor pomaka. Veličina  $Q_j^{(n)}$  predstavlja nekonzervativnu disipativnu silu ili ostale vanjske sile koje



utječu na sustav. Za konzervativni sustav, nekonzervativne sila iznosi nula ( $Q_j^{(n)} = 0$ ), odnosno desni dio jednadžbe (15) može se zanemariti. Također valja napomenuti kako jednadžba (15) može opisati idealan sustav kod kojeg nema prigušenja.

Veliki broj slučajeva može se pojednostavljeno zapisati bez utjecaja prigušenja zbog toga što se utjecaj prigušenja može zanemariti. No, Ukoliko se promatra sustav u vremenskom periodu koji je značajno veći od perioda vibracija potrebno je sagledati i prigušenje i njegov utjecaj na sustav. Također, ukoliko je prirodna frekvencija bliska frekvenciji pobude potrebno je znati prigušenje sustava zbog toga što se prigušenjem može pomicati prirodna frekvencija i na taj način zaštititi strukturu od oštećenja.

Ukoliko postoji prigušenje sustava poznato je da će djelovati na način na se opire gibanju, silom koja je proporcionalna brzini i ima suprotnu orijentaciju u odnosu na vektor brzine. Ako se sustav definira Lagrangeovim jednadžbama definira se funkcija  $R$ . Funkcija se zove Rayleighova funkcija disipacije i definirana je prema izrazu (16).

$$R = \frac{1}{2} c \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \dot{x}^T [c] \dot{x} \quad (16)$$

Gdje  $c$  [Ns/m] predstavlja faktor prigušenja,  $m$  [kg] masu, a  $x$  [m] pomak. Odnosno, kada je jednadžba zapisana u matricnom obliku matrica  $[c]$  je matrica prigušenja sastavljena istom analogijom kao i matrice mase i elastičnih konstanti.

Sada kada je raspisana funkcija prigušenja može se zapisati Lagrangeova jednadžba za sustav s viskoznim prigušenjem i pobudom prema izrazu (17).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

Gdje  $F_i$  [N] predstavlja silu koja djeluje na masu  $m_i$ ,  $T$  [J] kinetičku energiju,  $V$  [J] potencijalnu energiju,  $R$  Rayleighovo prigušenje.

Kako bi se dobila jednadžba gibanja za promatrani sustav potrebno je: [18]

- Definirati generalizirane koordinate
- Formulirati izraz potencijalne energije  $V$  prema izrazu (14) i supstituirati u jednadžbu,
- Formulirati izraz kinetičke energije  $T$  prema izrazu (15) i supstituirati u jednadžbu,
- Formulirati funkciju disipacije  $R$  prema izrazu (16) i supstituirati u jednadžbu,
- Formulirati generalizirane pobudne sile  $F_i$ .

Kada se prethodno navedeni koraci provedu finalni produkt je jednadžba gibanja, koja zapisana u vektorskom obliku ima isti oblik kao jednadžba (18).

$$[m] \ddot{\vec{x}} + [c] \dot{\vec{x}} + [k] \vec{x} = \vec{F} \quad (18)$$

Gdje  $m$  [kg] predstavlja masu,  $x$  [m] pomak,  $c$  [Ns/m] prigušenje,  $k$  [N/s] elastičnu konstantu, a  $F$  [N] silu. Ovako zapisana jednadžba ne razlikuje se od jednadžbe gibanja dobivena putem Newton-Eulerovih jednadžbi, što i je cilj procesa. No, prikazano je kako pisanje jednadžbi ne

zahtjeva crtanje slobodnih dijagrama. Također računanje veličina i njihove parcijalne derivacije značajno su jednostavnije pogotovo ako se u obzir uzimaju sustavi s relativno velikim stupnjevima slobode.

Ovako raspisana jednadžba temelj je za rješavanje i dobivanje željenih veličina kako bi se izgradio modalni model s pripadnim elementima. Veličine koje je potrebno dobiti kako bi se napravio potpuni modalni model objašnjene u drugom poglavlju. Također, nakon što je dobivena jednadžba u obliku (10), moguće je formulirati problem jedinstvene vrijednosti (*eigenvalue*) i vektora na temelju čega se može dobiti prirodna frekvencija. Također, dobiva se i jedinstveni vektor (*eigenvector*) koji predstavlja modalni oblik odnosno stalni odnos amplituda tijekom vibracije masa za pripadnu prirodnu frekvenciju odnosno za stupanj slobode [18].

#### 4.6. Rješavanje problema vlastitih vrijednosti

Za računanje parametara koristit će se vlastite vrijednosti (eng. *eigenvalues*) i vlastiti vektori (eng. *eigenvectors*) sustava. Oni će predstavljati bitne karakteristike sustava i određivati njegove odzive jednom kada se fizikalno interpretiraju zbog toga su u ovom poglavlju najprije ispisani matematički izrazi koji će pomoći objašnjavanju karakterističnih vektora i vrijednosti sustava.

Mnogi matematički problemi u primjeni se pojavljuju u obliku nepoznanica vlastitih vrijednosti i vektora (eng. *Eigenvalue problem*). Izraz koji opisuje takav problem može se zapisati u obliku (18).

$$Av = \lambda v \quad (18)$$

Element  $A$  u izrazu (18) predstavlja kvadratnu matricu  $N \times N$ . Element  $v$  predstavlja vlastiti vektor sustava, a  $\lambda$  predstavlja vlastitu vrijednost sustava (koja može biti realna ili kompleksna). Gledajući u izraz (18) može se zaključiti da jednakost vrijedi za svaku vrijednost  $\lambda$ , vlastitu vrijednost uz odgovarajući vlastiti vektor  $v$ , koji su rješenja ovog problema odnosno zadovoljavaju izraz (18). Izraz (18) može se u prepisati u oblik izraza (19). U izrazu (19) skalarna vrijednost  $\lambda$  pomnožena je sa matricom identiteta  $I$  [7].

$$(A - \lambda I) \cdot v = 0 \quad (19)$$

Ako karakteristični vektor  $v$  nije nulvektor jednadžba je rješiva pod uvjetom da je zadovoljen izraz (20).

$$|A - \lambda I| = 0 \quad (20)$$

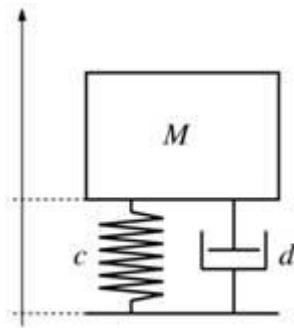
Izraz (20) je tzv. karakteristična jednadžba matrice  $A$  i polinoma  $N$ -tog stupnja sa  $N$  karakterističnih korijena kao rješenja. Uz poznate vrijednosti matrice  $A$  moguće je izračunati vlastitu vrijednost (eng. *eigenvalue*)  $\lambda$ .

Nadalje, kada su izračunate karakteristične vrijednosti moguće je i dobiti vlastiti vektor putem izraza (18) zapisanog u obliku (21). [7]

$$(A - \lambda_n) \cdot v_n = 0 \quad (21)$$

Gdje  $A$  predstavlja kvadratnu matricu,  $\lambda_n$  vlastitu vrijednost sustava, a  $v_n$  vlastiti vektor sustava. Poznavanjem matrice  $A$  i izračunatih vrijednosti  $\lambda$  izračunava se vektor  $v$ . Spomenute vrijednosti indeksirane su simbolom  $n$  jer je kao što je spomenuto matrica  $N \times N$  daje  $n$  karakterističnih rješenja pa istom analogijom postoji i  $n$  karakterističnih vektora koji zapisani u matričnom obliku imaju  $n$  elemenata.

Nadalje promotrit će se dinamički sustav kao što je na Slici 11. Na Slici 11. vidljiv je sustav koji ima određenu masu koja je za čvrstu podlogu pričvršćena oprugom koja ima svojstvenu elastičnu konstantu. Osim oprugom, masa je povezana i klipom koji služi kao prigušivač te kao takav je definiran prigušnom konstantom.



Slika 11. Slikovni prikaz dinamičkog sustava, [16]

Sustav sa Slike 11. može se opisati jednadžbom (4) koja će biti prepisana u jednadžbu oblika (22).

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \quad (22)$$

Gdje  $m$  [kg] predstavlja masu,  $x$  [m] pomak,  $c$  [Ns/m] prigušenje,  $k$  [N/m] elastičnu konstantu, a  $F$  [N] silu. Vidljivo je da se jednadžba sastoji od sila koje su posljedica karakteristika sustava i njegova gibanja. Na desnoj strani jednadžbe vanjska je uzbudna sila. Njoj je jednaka suma sila: onih uslijed promjene količina gibanja mase, uslijed brzine gibanja i prigušnih svojstva i uslijed otklona od ravnotežnog položaja zbog elastične konstante opruge. Možemo zaključiti da je prigušenje u funkciji brzine gibanja mase a sile uslijed elastičnosti opruge u funkciji pomaka [22].

Inicijalno će se za primjer, zbog jednostavnosti, uzeti u obzir sustav koji nema prigušenje i slobodno vibrira:

$$c = 0 \quad (23)$$

$$F = 0 \quad (24)$$

Gdje  $c$  [Ns/m] predstavlja prigušenje, a  $F$  [N] silu. Jednadžba (22) poprima oblik (25).

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (25)$$

Gdje  $m$  [kg] predstavlja masu,  $x$  [m] pomak, a  $k$  [N/m] elastičnu konstantu. Rješenje jednadžbe (25) može se pretpostaviti u obliku izraza (26).

$$x(t) = X \cdot e^{i\omega t} \quad (26)$$

Unutar izraza (26)  $X$  predstavlja vektor pomnožen elementom koji predstavlja odziv u vremenskoj domeni, odnosno jednostavnu sinusoidu. Veličina  $\omega$  [rad/s] predstavlja kružnu frekvenciju, a  $t$  [s] vrijeme. Dvostrukom derivacijom izraza (26) dobiva se izraz u obliku (27).

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 X \cdot e^{i\omega t} \quad (27)$$

Sljedeći korak je supstitucija izraza (26) i (27) u izraz (25) iz čega proizlazi izraz (28).

$$-\omega^2 \cdot m \cdot X \cdot e^{i\omega t} + k \cdot X \cdot e^{i\omega t} = 0 \quad (28)$$

Dijeljenjem izraza (17) sa faktorom  $e^{i\omega t}$  dobiva se izraz (29).

$$([k] - \omega^2[m]) \cdot \{X\} = 0 \quad (29)$$

Gdje  $k$  [N/m] predstavlja elastičnu konstantu,  $\omega$  [rad/s] kružnu frekvenciju,  $m$  [kg] masu, a  $X$  karakteristični vektor sustava. Kod izraza (29) potrebno je uvidjeti da ima isti oblik kao i jednadžba (19) [10]. To znači da jednadžba koja opisuje ovakav sustav može se svesti na nepoznanicu vlastitih vrijednosti (eng. *eigenvalue problem*). Dalje se jednadžba (29) može riješiti kao *eigenvalue/eigenvector* problem i dobiti pripadne rezultate. Rješavanjem determinante izraza  $|[k] - \omega^2[m]| = 0$  moguće je dobiti karakterističnu vrijednost, *eigenvalue* sustava koja u ovoj jednadžbi predstavlja  $\omega^2$  što je zapravo prirodna kružna frekvencija sustava. S poznatim vrijednostima uvrštenima u izraz (29) moguće je izračunati *eigenvector*,  $\{X\}$ . Također moguće je odrediti željenu kružnu frekvenciju  $\omega^2$  i za nju izračunati jedini mogući vektor  $\{X\}$  koji će zadovoljiti jednakost (29) [10]. Već je rečeno da je fizikalna interpretacija izraza vlastitih vrijednosti (29) prirodna frekvencija, no još je preostala nepoznanica što zapravo *eigenvector* za izraz (29) znači.

*Eigenvector*,  $\{X\}$  ima svojstvo da pomnožen konstantom i dalje ostaje rješenje jednadžbe (29). Dakle, vektor  $\{X\}$  možemo zamisliti kao oblik kojim masa sustava titra odgovarajućom vrijednosti  $\omega^2$ . Praktična izvedba spomenutoga može se opisati na način da ako se statički otkloni masa iz centra težišta i otkloni pobuda da sustav titra slobodno, sustav će otklanjati masu u smjeru vektora  $\{X\}$ , a zatim u smjeru vektora  $\{-X\}$ , dakle mijenjati će orijentaciju oko ravnotežnog položaja frekvencijom koja je također izračunata -  $\omega^2$  [10].

Važna činjenica jest da promatrana struktura može imati više oblika modova. Svaki pripadni oblik moda ima svoju prirodnu frekvenciju kojih struktura isto može imati više. Tada je strukturu potrebno promatrati u različitim ravninama odnosno ograničavati je na stupnjeve slobode. Kako je sustav linearan, princip superpozicije se može reći da vrijedi. To znači da svaki mod koji se pojavljuje kod jednog stupnja slobode, u jednoj ravnini, se može zbrajati sa ostalim modovima kako bi se dobio ukupni utjecaj na strukturu odnosno konačni oblik deformiranja strukture pri uzbuđenim silama [10].

Ako se pretpostavi da sustav ima prigušnu komponentu dobit će se jednačba (30) koja opisuje gibanje sustava.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (30)$$

Gdje  $m$  [kg] predstavlja masu,  $x$  [m] pomak,  $c$  [Ns/m] prigušenje,  $k$  [N/s] elastičnu konstantu, a  $F$  [N] silu. Rješenje se pretpostavlja u obliku izraza (31).

$$x(t) = X \cdot e^{i\omega t} \quad (31)$$

Supstitucijom izraza (31) u jednačbu (30) opet će se dobiti *eigenproblem* koji rješavanjem daje rješenja u obliku dvije matrice koje predstavljaju *eigenvalue* i *eigenvector* koji predstavljaju prirodnu kružnu frekvenciju i oblik moda [22].

Već je prije objašnjeno značenje i funkcija efektivne modalne mase te će sada biti raspisane jednačbe kojima se može izračunati udio efektivne modalne mase sustava koji titra. Sustav za opisivanje uzet će se da je kao u jednačbi (25). Modalna masa može se zapisati u obliku (32):

$$\bar{m}_i = \varphi_i^T M \varphi_i \quad (32)$$

gdje  $\varphi_i$  predstavlja vektor oblika moda  $i$ -tog moda, a  $M$  predstavlja matricu mase sustava. Modalna masa  $\bar{m}_i$  normalizirana je na način da se generalizirana modalna masa postavlja u vrijednost  $\bar{m}_i = 1$ . No, potrebno je dalje pronaći relativnu modalnu masu. Ona je ovisna o smjeru odnosno stupnju slobode jer je svojstvena doprinosu svakog oblika moda. Relativna modalna masa može se izračunati putem niza izraza: (33), (34), (35), (36).

$$\bar{L} = \varphi_i^T M \bar{r} \quad (33)$$

$$\Gamma_i = \frac{\bar{L}_{k,i}}{\bar{m}_i} \quad (34)$$

$$m_{k,i} = \bar{L}_{k,i}^2 \cdot m_i \quad (35)$$

$$m_{k,rel,i} = \frac{m_{k,i}}{m_{k,tot}} \quad (36)$$

Element  $\bar{r}$  predstavlja vektor koji opisuje smjer oblika moda,  $\Gamma_i$  predstavlja faktor udjela  $i$ -tog moda,  $m_{k,tot}$  predstavlja ukupnu masu sustava, i na posljeticu  $m_{k,rel,i}$  predstavlja relativnu modalnu masu  $i$ -tog moda [23], [9].

## 5. Izrada računalnog modela podvozja

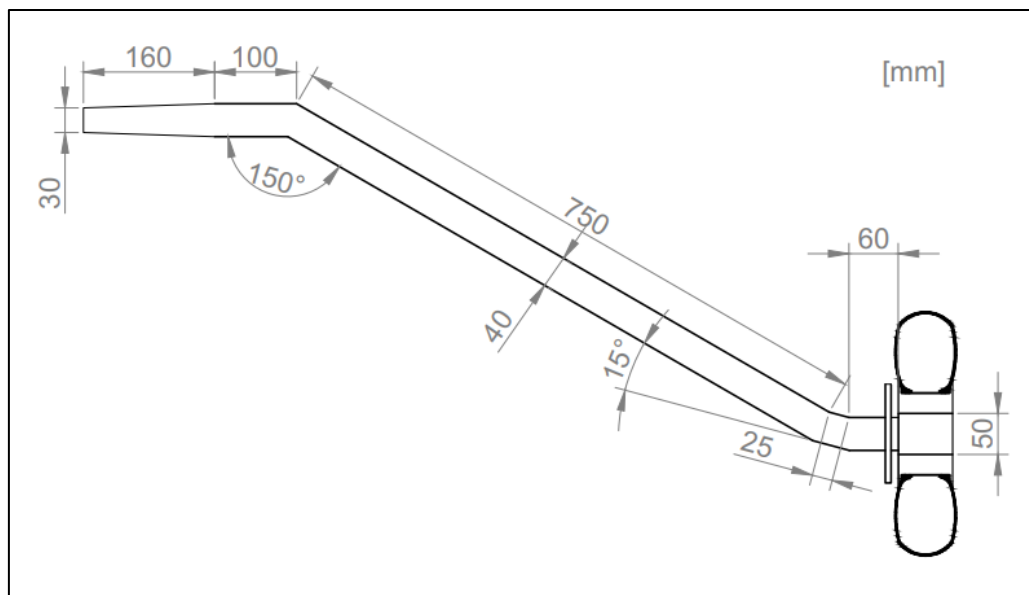
Poglavlja koja slijede koncentrirat će se na razradu metodologije modalne analize putem računalnih modela. Kako bi se dobio modalni model potrebno je dizajnirati sustav, te na njega primijeniti računalne modele koji će izračunati modalne parametre. U ovom poglavlju prikazat će se proces dizajniranja komponenti podvozja koje će se koristiti u daljnjoj analizi.

### 5.1. Dimenzije podvozja

Podvozje koje će se analizirati jest ono koje se koristi na zrakoplovu C-172. Dizajn i provedba modalne analize napravljena je na glavnom podvozju. Zbog toga je građa glavnog podvozja ovog zrakoplova opisana u poglavlju 3. u kojem je opisana konstrukcija zrakoplova s detaljnim opisom podvozja. Namjera ovog poglavlja je dizajnirati podvozje koje će reprezentirati ono stvarno, koje je ugrađeno na zrakoplov i koristi se u eksploataciji.

Prije početka rada u programskom okruženju potrebno je najprije izmjeriti stvarne dimenzije podvozja kako bi se komponente mogle ispravno dimenzionirati. Zrakoplov koji je korišten za mjerenje dimenzija jest C-172N, registrarske oznake 9A-DMB. Zrakoplov je u vlasništvu Fakulteta prometnih znanosti odnosno Hrvatskog zrakoplovnog nastavnog središta. Zrakoplov se koristi u Hrvatskom zrakoplovnom nastavnom središtu (HZNS-u) za letenje prilikom osposobljavanja studenata fakulteta koji pohađaju studij Aeronautike, modul Civilni pilot.

Slika 12. prikazuje skicu jedne noge glavnog podvozja. Prikazane su i kote kojima je opisan pojedini dio strukture koji će biti potreban za dizajn strukture u računalnom programu.



Slika 12. Skica jedne noge glavnog podvozja

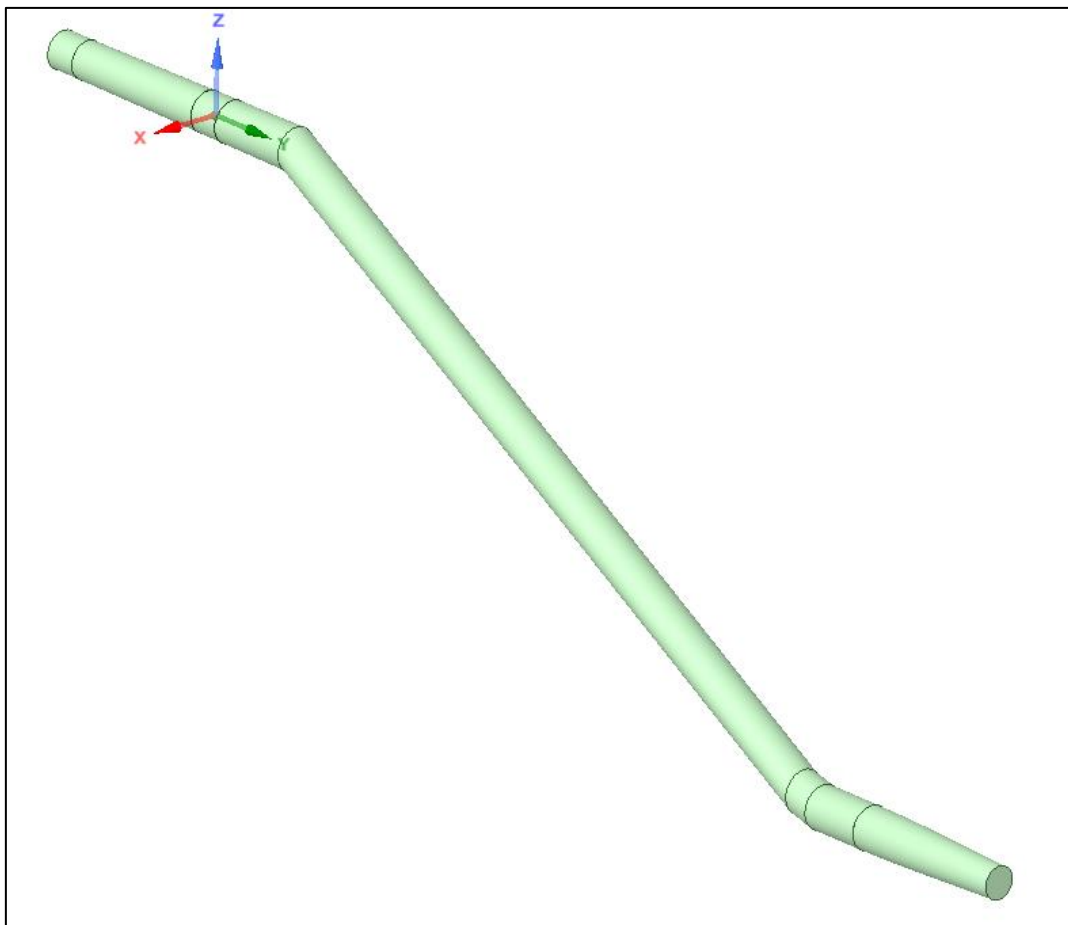
Na slici je vidljivo da je izmjeren promjer cjevastog potpornika 40 mm. Valja napomenuti kako je potpornik kružnog oblika. Duljina potpornika koji ulazi u trup zrakoplova jest 260 mm. Zatim

je prikazan nastavak potpornika koji je zakrivljen prema horizontalnoj ravnini za  $150^\circ$  te je njegova duljina 750 mm. Kod sljedećeg pregiba, bliže kotaču, glavni potpornik i dalje ima isti promjer, no sada je zakrivljen  $165^\circ$  prema horizontalnoj ravnini. Na njega se prema kotaču nastavlja horizontalni dio potpornika dugačak 60 mm. Na najistureniji dio potpornika nastavlja se osovina koja je dugačka 60 mm i ima promjer 50 mm. Na osovinu je postavljen kotač s kočionim sustavom i pneumatikom.

## 5.2. Računalni dizajn podvozja

Nakon što su potrebne veličine izmjerene može se nastaviti s dizajnom u računalnom programu. Za dizajn koristio se SpaceClaim, koji predstavlja CAD (eng. *computer-aided design*) alat. Program je integriran u Ansys, Inc. Products 2022 R1© računalni program [24].

CAD softveri su računalni programi koji se koriste kao alati za procese dizajniranja. Njihovo programsko okruženje stvoreno je kako bi omogućilo stvaranje dvodimenzionalnih ili trodimenzionalnih modela i olakšalo inženjersko dokumentiranje. CAD softveri mogu poslužiti za generiranje nacrtu, ili što je slučaj kod ovoga rada za stvaranje modela koji će se koristiti za daljnju računalnu obradu.



Slika 13. Model podvozja u SpaceClaim-u

Model podvozja u prostoru je postavljen kao što je prikazano na Slici 13. Os X predstavlja longitudinalnu os, Y lateralnu, a Z vertikalnu, kako što se uobičajeno označava kod zrakoplova.

Prema mjerama sa Slike 13. izrađen je model u alatu SpaceClaim. Vidljivo je da se model podvozja sastoji od glavnog potpornika. Neki sustavi koji se nalaze na strukturi podvozja nisu modelirani. Ti sustavi su:

- Aerodinamička oplata podvozja s hidrauličkim vodovima , za koje se smatra da nemaju značajan doprinos u vibracijama glavnog podvozja,
- Kočioni sustav, koji iako nije modeliran, nije zanemaren već je doprinos njegove mase naknadno dodan na model i koncentrirana masa predstavlja kočioni sustav,
- Kotač koji također nije modeliran no njegov učinak se smatra značajnim za vibracije glavnog podvozja stoga je njegov utjecaj na vibracije unesen putem rubnih uvjeta.

Detalji spomenutog izneseni su u poglavlju 6.



## 6. Modalna analiza podvozja

U ovom poglavlju prikazat će se koraci koje je potrebno napraviti kako bi se napravila modalna analiza. Također, rezultati modalne analize bit će komentirani. Analiza se provodi na 3D modelu koji je dizajniran i prikazan u prošlom poglavlju.

### 6.1. Računalni program Ansys

Analiza će se provesti u računalnom programu Ansys. Ansys je računalni program koji je osnovan 1970. a nastao je kao alat koji će pomoći inženjerima u provedbi FEA (eng. *Finite Element Analysis*). Danas se Ansys koristi u brojnim primjenama na trodimenzionalnim modelima. Ansys je moguće koristiti za strukturalne analize statičkog i dinamičkog tipa, termalne analize, analize koje se bave protokom fluida i sl.

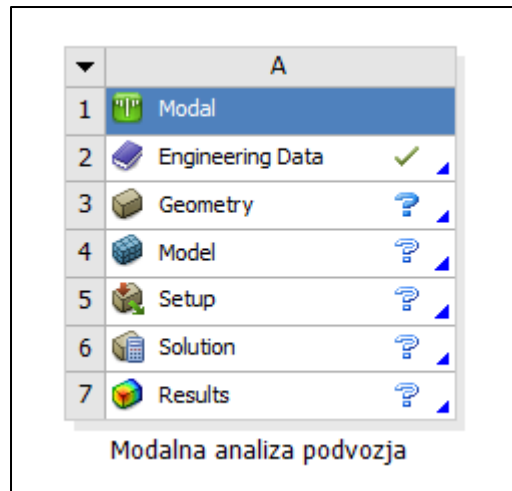
Rješavanje diferencijalnih jednadžbi koje opisuju sustave je kompleksno, a kada su u pitanju veliki sustavi potrebna je relativno velika količina vremena za izračun. No, za rješavanje spomenutih jednadžbi razvijene su numeričke metode koje pojednostavljaju proces. Odnosno, FEA se koristi za opisivanje sustava numeričkim metodama zvanim FEM (*Finite Element Method*). Valja naglasiti da FEA daje samo aproksimirane rezultate a ne rješenja diferencijalnih jednadžbi. No i na temelju približno točnih rezultata mogu se provesti simulacije kojima se mogu predvidjeti ponašanje i stanje opterećenja zrakoplova u eksploataciji [25].

Kako bi se simulacije mogle sprovesti, potrebno je promatranom modelu pridružiti mrežu (eng. *mesh*). Mreža se sastoji od velikog broja malih elemenata koji zajedno tvore oblik modela. Provedba FEA sastoji se od izračuna željene veličine za pojedini element. Izračunate veličine u specifičnim točkama (*nodes*), interpoliraju se (linearna, kvadratna, kubna interpolacija) kako bi se dobio finalni rezultat za cijelu strukturu.

Detalji FEM i FEA neće biti dalje razrađeni, no biti će opisana metodologija izrade modalne analize u računalnom programu Ansys.

### 6.2. Proces izrade modalne analize u računalnom programu Ansys

Proces izrade modalne analize u Ansys računalnom programu započinje u sučelju *Workbench*. Sučelje nudi niz analiza na odabir niz analiza, već gotovih modela komponenata sustava, prilagođenih analiza za specijalne slučajeve i sl. Za ovaj rad odabrana je modalna analiza koja se nakon odabira pojavi na radnoj površini (eng. *project schematic*). Kao što i naziv govori, na sučelju se prikazuje shema projekta koji treba provesti, s koracima koji vode k finalnim rezultatima. Potrebni koraci koje treba provesti moguće je vidjeti na Slici 14. Proces je opisan u poglavljima koja slijede.



Slika 14. Shema projekta modalne analize

### 6.3. Odabir i definiranje materijala i geometrija modela

Prvi korak analize numeriran brojem dva, jest *Engineering data*, i se sastoji od definicije materijala koji će se koristiti u analizi. Iz izvora unutar programa dostupan je niz materijala koji su već unaprijed definirani svojim karakteristikama. Tako je primjerice moguće odabrati materijale za termalne analize, geomehaničke materijale, fluide i sl.

Podvozje ovog zrakoplova izrađeno je uglavnom od čelika. Potpornik, osovine i kočioni sustav izveden je od čelika, dok su pneumatici izrađeni od gume. S obzirom na konstruirani model u petom poglavlju, za modalnu analizu biti će potreban samo čelik, dok će učinak ostalih komponenata koje nisu od čelika biti modeliran kroz rubne uvjete.

Svojstva legure čelika koja je korištena na zrakoplovu C-172 nisu poznate, i u literaturi nisu objavljene. Stoga će se koristiti generički model čelika s pripadnim svojstvima. Svojstva su prikazana u donjoj tablici na Slici 15.

Properties of Outline Row 3: Structural Steel				
	A	B	C	D E
1	Property	Value	Unit	
2	Material Field Variables	Table		
3	Density	7850	kg m <sup>-3</sup>	
4	Isotropic Secant Coefficient of Thermal Expansion			
5	Coefficient of Thermal Expansion	1,2E-05	C <sup>-1</sup>	
6	Material Dependent Damping			
9	Isotropic Elasticity			
10	Derive from	Young's Modulus ...		
11	Young's Modulus	2E+11	Pa	
12	Poisson's Ratio	0,3		
13	Bulk Modulus	1,6667E+11	Pa	
14	Shear Modulus	7,6923E+10	Pa	

Slika 15. Pripadna svojstva čelika korištenog za analizu

Na Slici 15. može se vidjeti polje 2A, gdje je tablično definirana ambijentalna temperatura od 22°C. Polje A3 definira gustoću materijala koja iznosi 7850 kg/m<sup>3</sup>. Polje A5 definira koeficijent termalne ekspanzije koji iznosi  $1,2 \cdot 10^5 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . Izotropna elastičnost materijala definirana je Youngovim modulom koji je opisan omjerom naprezanja i relativnog produljenja [21]. Youngov modul za pripadni čelik iznosi  $2 \cdot 10^{11}$  Pa. Poissonov omjer (polje 9A) definiran je kao omjer kontrakcije okomito na silu i elongacije paralelno sa silom koja djeluje na tijelo i iznosi 0,3. [26]. Ostala elastična svojstva definirana su pomoću Youngovog modula i Poissonovog omjera.

Osnovnim svojstvima pridodano je polje A6. Ono definira prigušenje unutar materijala putem faktora prigušenja koji iznosi 0,1. Kao što je već prije izneseno, ovaj tip podvozja nema viskozno prigušenje, te se prigušenje ostvaruje unutar materijala. Stoga se može reći da je prigušenje prva definirana komponenta modalnog modela.

Osim Slikom 15. prikazanih svojstava materijala, materijalu je moguće pridružiti brojna druga svojstva ukoliko su relevantna za analizu.

Sljedeći korak analize na Slici 14. pod 3. definira geometriju koja je već prije razrađena u petom poglavlju. Geometriju je sada potrebno učitati u projekt.

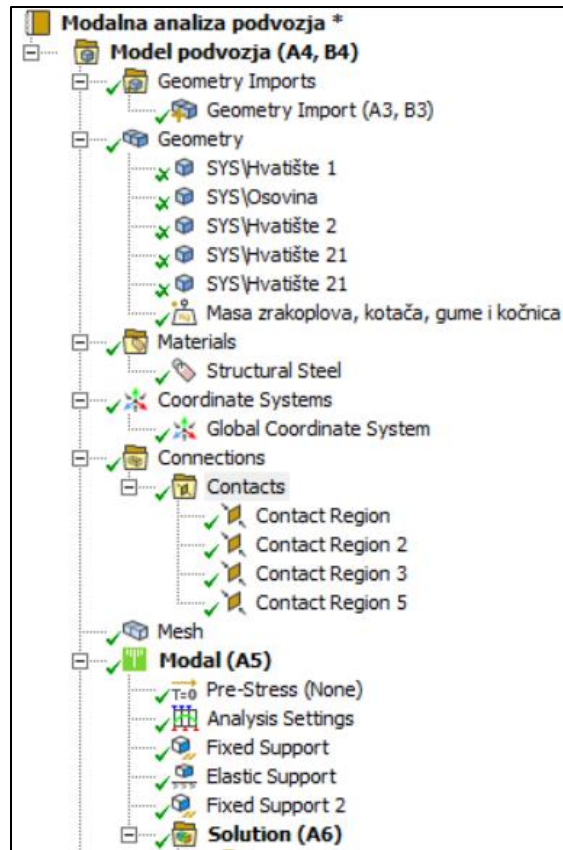
#### 6.4. Postavke modela

Sljedeći korak, na Slici 14. pod brojem 4 je *Model*. Otvaranjem koraka model, ANSYS nudi nastavak rada u programu računalnom programu *Mechanical*. Svi sljedeći koraci sa Slike 14. provode se u navedenom sučelju.

Na Slici 16. prikazane su postavke modela, koje se mogu modificirati kako bi se dobio željeni reprezentativni model. Izbornik *Geometry* u sučelju *Mechanical* prikazuje elemente geometrije koji su prisutni unutar modela. Cjelokupni model podijeljen je na osnovni potpornik, dio potpornika na koji se montira osovina te na dva hvatišta. Dva hvatišta su izdvojena zbog toga što će se na njima primjenjivati rubni uvjeti.

Kada se odabere jedan od elemenata geometrije, moguće je dodatno definirati pojedine funkcije. Primjerice, *Graphics properties* nudi grafičke opcije poput postavljanja boje elemenata, za bolje raspoznavanje, prozirnosti i sl. *Definition* izbornik nudi opcije potiskivanja elementa, ako se njegov učinak za analizu treba izostaviti. Također moguće je postaviti hoće li se element imati elastična svojstva ili će se ponašati kao kruto tijelo. Moguće je postaviti referentnu temperaturu ukoliko se razlikuje od one koja je zadana u prethodnim koracima kod definiranja materijala. Zatim, u izborniku geometrije prikazani su ostali podaci u elementu poput njegovog volumena, veličine dodirnih površina, momenta inercije i koordinata centra mase.

U izborniku *Geometry* je dodana i točkasta masa (eng *point mass*), koja će predstavljati masu zrakoplova koja djeluje na podvozje kada zrakoplov taksira. Na taj način dobit će se učinak inercije koju zrakoplov posjeduje bez da se modelira cijela konstrukcija.



Slika 16. Postavke modela u Ansys Mechanical

Potrebno je pozicionirati masu na podvozje i definirati veličine. Kolika masa zrakoplova djeluje na kotač. To je moguće aproksimirati putem zapisa o vaganju zrakoplova 9A-DMB koji je postavljen kao Prilog 1. Vaganje pokazuje da tri vage postavljene ispod kotača podvozja pokazuju sljedeće: lijevi glavni kotač 295 kg, desni glavni kotač 295,5 kg, nosni kotač 206,5 kg. Vaganje je provedeno sa zrakoplovom koji je imao 35 USgal (130,9 l) goriva u spremnicima. No, za potrebe ove analize uzet će se da zrakoplov ima 40 USgal (149,6 l) goriva, te da su u njemu dvije osobe koje predstavljaju instruktora letenja i studenta. Takva konfiguracija mase izabrana je zbog toga što je to najčešća konfiguracija u kojoj zrakoplov taksira kada odlazi na let. Tada zrakoplov ima ukupnu masu 975,5 kg. S obzirom na distribuciju mase moguće je aproksimirati masu na jednom kotaču glavnog podvozja i ona iznosi 368,85 kg. Ukupnoj masi oduzeta je masa potpornika koja iznosi 5,5 kg i masa kočnica i kotača zbog toga što su te mase već modelirane na modelu. Masa kočnica i naplatka iznosi 4,17 kg, a guma ima masu 3,35 kg [27], [28].

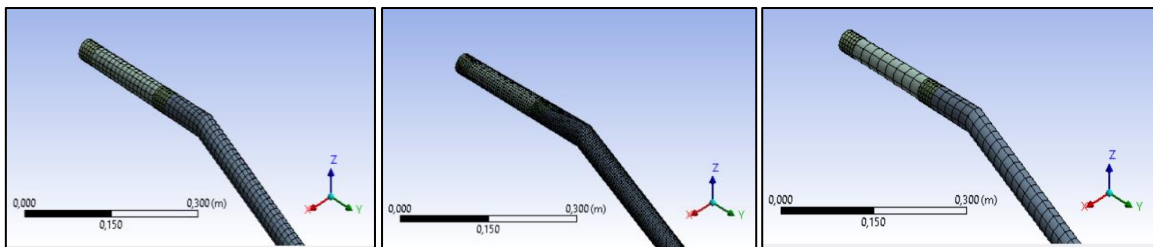
Prema Slici 15. sljedeći element u izborniku jest materijal. U izborniku je prikazan materijal koji će se koristiti. U slučaju ove analize već je prije definiran materijal u *Workbenchu* te je tako definiran materijal dostupan u *Mechanical* programu.

Nadalje koordinatni sustav definiran je kao kartezijev i orijentacija je kao na Slici 13.

Nadalje, izbornik nudi pregled kontaktnih površina između pojedinih struktura unutar modela. Moguće je postaviti, ukoliko postoji potreba specifične uvjete kontakata poput trenja,

izostavljanja trenja, elastičnosti veze između dvije strukture i sl. Strukture unutar modela tvore jednu cjelinu stoga za ovaj model nije potrebno postavljati posebne uvjete u tom smislu.

Postavljanje mreže (eng. *mesh*) esencijalno je za FEA kao što je spomenuto. Upravo je to sljedeći korak (Slika 16.). U izborniku mreže potrebno je odrediti za kakvu analizu će se koristiti mreža, u ovom slučaju mehaničku (ostale opcije su elektromagnetska, dinamika fluida, hidrodinamička). Također moguće je odrediti željenu veličinu elemenata no u slučaju ove analize, ostavljeno je programu da prema veličini modela samostalno odredi potrebnu veličinu elemenata mreže kako bi analiza bila valjana. Veličinu elementa je moguće definirati putem tri stupnja: *fine*, *medium* i *coarse*. Za ovu analizu odabrana je *medium* mreža a razlika između tri mreže na modelu moguće je vidjeti na Slici 17. Od statističkih podataka zanimljivo je da prvi model sa Slike 17. ima 6446 *nodova* i 1183 elementa, drugi model ima 16012 *nodova* i 3200 elementa (i korišten je za analizu), a treći model ima 144708 *nodova* i 31879 elementa. Čim je mreža gušća to znači da sadrži veći broj elemenata a time i dobiva na točnosti izračuna.



Slika 17. Razlika u gustoći mreže

## 6.5. Postavke analize

Na Slici 14. sljedeći korak koji je pod brojem 5 jest *Setup*. Na Slici 16. *Setup* korak odnosi se na izbornik koji se u programu zove *Modal*. Prvi element u izborniku je *Pre-Stress*, koji za ovu analizu nije postavljen no uobičajeno se koristi kada se rezultati prijašnje analize koriste za izračun novih rezultata. Primjer takve analize bila bi statička analiza, kojom se konstrukcija optereti a zatim se statički opterećen model dalje analizira primjerice u modalnoj analizi.

Sljedeća stavka izbornika je *Analysis Settings* kojom se definiraju osnovne odrednice modalne analize. Potrebno je odabrati broj modalnih modova koji je potrebno pronaći. Moguće je odabrati koliko god modova korisnik želi, no preveliki broj modova daje veliki broj podataka na vrlo visokim frekvencijama što za podvozje u eksploataciji ne daje na značaju. No, premali broj modova može rezultirati manjkavom analizom koja neće detektirati sve bitne modove. Indikator koji se koristi je li dovoljan bodova unesen u analizu jest efektivna modalna masa. Ukoliko je omjer ukupne i modalne mase u svim modovima relativno visok znači da modovi zahvaćaju cijelu strukturu. Za ovu analizu proizvoljno je odabrano 10 modova i pritom je omjer ukupne i modalne mase za sve modove i sve osi gibanja preko 0,99. To ukazuje da je pripadni broj modova dovoljan i da modovi zahvaćaju gotovo cijelu strukturu.

Nadalje, može se postaviti i gornje ograničenje frekvencije do kojeg će se tražiti modovi. Ta opcija može biti korisna ako se prethodno zna kojim je frekvencijama vibracija izložen

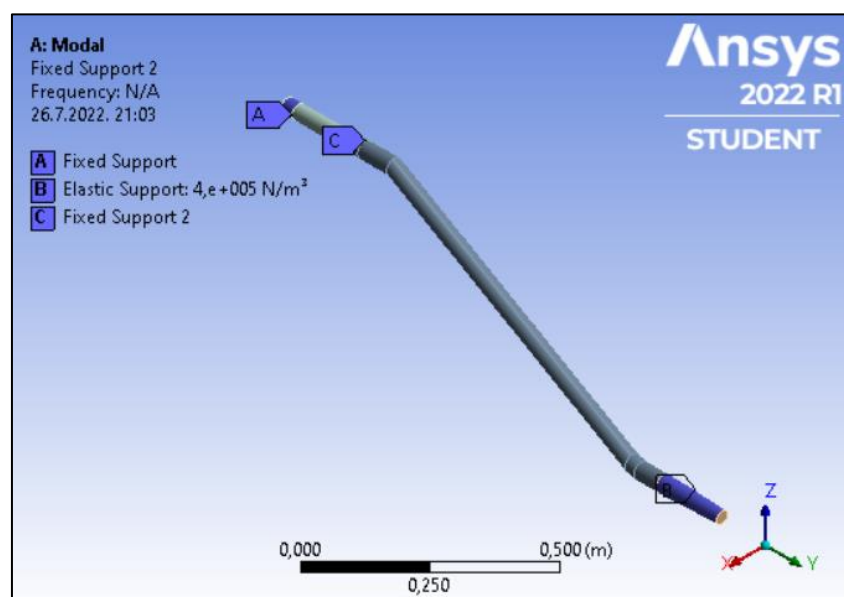
promatrani model u eksploataciji. Za ovu analizu nije postavljeno gornje ograničenje već je programu dozvoljeno da odredi prvih 10 prirodnih frekvencija i modalnih modela bez obzira na visinu frekvencije.

U izborniku *Analysis Settings* moguće je postaviti prigušenje u sustavu. Primjerice, neki sustavi sadrže prigušenje poput nosnog kotača koji ima shimmy damper. Ako se ne želi prikazivati njegova modalna svojstva, no njegov učinak je ipak bitan, može se postaviti prigušenje koje se definira konstantom prigušenja. Za promatrani model glavnog podvozja prigušenje je već definirano unutar korištenog materijala, i to je jedino prigušenje prisutno u sustavu, stoga ova mogućnost sustava nije korištena.

Prije je već spomenuto da za pravilnu modalnu analizu glavnog podvozja nije potrebno modelirati cijeli zrakoplov sa mnoštvom svojih sustava, iako zrakoplov izravno djeluje na podvozje. Umjesto toga, postavljeni su rubni uvjeti na određena mjesta strukture i predstavljaju utjecaj ostalih elemenata zrakoplova.

Tako se na Slici 16. vidi kako su u izborniku *Modal* dodana dva čvrsta oslonca (eng. *Fixed Support*). Točka, rub, površina ili cijeli volumen elementa koji je odabran i označen kao čvrsti oslonac, predstavlja čvrstu vezu i čini označenu geometriju nepomičnom. Površine koje su za modalnu analizu glavnog podvozja odabrane kao čvrsti oslonci prikazani su na Slici 18. i označeni oznakama A i C. Čvrste oslonce predstavljaju provrti u platformi podvozja koji je dio konstrukcije trupa i gdje je potpornik glavnog podvozja uglavljen.

Osim čvrstog oslonca na model je dodan i elastični oslonac koji je postavljen na geometriju modela i na Slici 18. je prikazan i označen oznakom B. Elastični oslonac predstavlja elastična svojstva koja ima kotač zbog pneumatika. Elastična svojstva definirana su faktorom koji definira iznos sile koji je potreban za deformaciju određenog volumena tijela, stoga i mjerna jedinica [ $\text{N}/\text{m}^3$ ]. Iznos elastične konstante kotača aproksimiran je prema podacima iz literature.



Slika 18. Smještaj čvrstih i elastičnog oslonca

## 6.6. Rezultati analize

Kako je definirano u drugom poglavlju, cjelokupan modalni model definiraju četiri elementa: prigušenje sustava (definirano u poglavlju 6.2), prirodna frekvencija, efektivna modalna masa i oblici modalnog moda. Elementi su navedeni redoslijedom kojim će biti prezentirani u ovom poglavlju.

### 6.6.1. Prirodna frekvencija i efektivna modalna masa

Nakon što su postavke analize definirane u prethodnom poglavlju, potrebno je provesti analizu u računalnom programu i iščitati dobivene rezultate. Prvi dobiveni rezultat su podaci u Tablici 2. Tablica prikazuje prirodne frekvencije modela glavnog podvozja za svaki pojedini izračunati modalni mod. To znači da je izračunat još jedan element modalnog modela.

Tablica 2. Frekvencije prvih 10 modalnih modova

Modalni mod	Frekvencija [Hz]
1.	1,7899
2.	1,9808
3.	24,856
4.	94,216
5.	183,18
6.	272,1
7.	572,93
8.	624,8
9.	683,67
10.	1055,7

U Tablici 2. može se vidjeti relativno velik raspon frekvencija, od 1,7899 Hz pa sve do 1055,7 Hz. Poznavanje prirodne frekvencije korisno je ako se poznaju frekvencije vibracija koje djeluju na model u okruženju u eksploataciji. Ipak, modovi se razlikuju po važnosti, zbog toga što neki modovi imaju veći doprinos od drugih u različitim ravninama. Doprinos nije moguće iščitati na temelju podataka iz Tablice 2, već je potrebno imati podatke o efektivnoj modalnoj masi.

### 6.6.2. Efektivna modalna masa

Efektivna modalna masa jest ona masa koja sudjeluje u oscilacijama određenog moda. Što je efektivna modalna masa veća to znači da veći udio modela oscilira, odnosno da se mogu

očekivati vibracije većih amplituda. Izračun veličina efektivne modalne mase, faktora efektivne modalne mase i relativne modalne mase napravljen je prema jednadžbama (32), (33), (34), (35), (36) u četvrtom poglavlju.

Udjeli modela koji sudjeluju u određenom modu prikazani su u Tablici 3. i Tablici 4. Tablica 3. definira faktore modalne mase za određeni mod, a Tablica 4. relativne modalne mase odnosno omjere modalne mase i cjelokupne mase što je intuitivnije za interpretaciju.

Tablica 3. Faktori modalne mase za pojedine modove

Mod	Frekvencija [Hz]	Pomak uz osi			Rotacija oko osi		
		X	Y	Z	X	Y	Z
1.	1,7899	$2,6613 \cdot 10^{-2}$	6,7046	18,126	20,521	$1,0137 \cdot 10^{-2}$	$2,6374 \cdot 10^{-2}$
2.	1,9808	19,329	$9,103 \cdot 10^{-4}$	$2,4998 \cdot 10^{-2}$	$2,8249 \cdot 10^{-2}$	7,363	19,156
3.	24,856	$1,0658 \cdot 10^{-4}$	17,776	6,2291	-0,35919	$5,1163 \cdot 10^{-5}$	$1,3249 \cdot 10^{-4}$
4.	94,216	1,4427	$4,3791 \cdot 10^{-4}$	$4,0496 \cdot 10^{-4}$	$1,8446 \cdot 10^{-5}$	0,26059	0,35926
5.	183,18	$1,5217 \cdot 10^{-4}$	2,5845	2,7859	0,4089	$3,8741 \cdot 10^{-5}$	$4,6263 \cdot 10^{-6}$
6.	272,1	0,95288	$7,6502 \cdot 10^{-4}$	$7,7597 \cdot 10^{-4}$	$1,2847 \cdot 10^{-4}$	$7,4375 \cdot 10^{-3}$	0,18999
7.	572,93	$9,3321 \cdot 10^{-4}$	1,8091	0,23146	$2,5785 \cdot 10^{-2}$	$2,4927 \cdot 10^{-5}$	$9,2707 \cdot 10^{-5}$
8.	624,8	0,66017	$5,1862 \cdot 10^{-3}$	$2,2282 \cdot 10^{-3}$	$1,1301 \cdot 10^{-4}$	$2,2986 \cdot 10^{-2}$	$7,8454 \cdot 10^{-2}$
9.	683,67	$8,2298 \cdot 10^{-4}$	2,0336	1,4567	0,12497	$3,0627 \cdot 10^{-5}$	$1,0639 \cdot 10^{-4}$
10.	1055,7	0,40682	$1,3985 \cdot 10^{-3}$	$8,7418 \cdot 10^{-5}$	$1,661 \cdot 10^{-5}$	$1,2472 \cdot 10^{-2}$	$4,9013 \cdot 10^{-2}$

Tablica 4. Relativne modalne mase za pojedine modove

Mod	Frekvencija [Hz]	Pomak uz osi			Rotacija oko osi		
		X	Y	Z	X	Y	Z
1.	1,7899	$1,8645 \cdot 10^{-6}$	0,11834	0,865	0,99921	$1,893 \cdot 10^{-6}$	$1,894 \cdot 10^{-6}$
2.	1,9808	0,98354	$2,181 \cdot 10^{-7}$	$1,6451 \cdot 10^{-6}$	$1,8935 \cdot 10^{-6}$	0,99872	0,99947
3.	24,856	$2,990 \cdot 10^{-11}$	0,83186	0,10215	$3,0613 \cdot 10^{-4}$	$4,82 \cdot 10^{-11}$	$4,78 \cdot 10^{-11}$
4.	94,216	$5,4796 \cdot 10^{-3}$	$5,04 \cdot 10^{-10}$	$4,317 \cdot 10^{-10}$	$8,0739 \cdot 10^{-13}$	$1,251 \cdot 10^{-3}$	$3,515 \cdot 10^{-4}$
5.	183,18	$6,096 \cdot 10^{-11}$	$1,758 \cdot 10^{-2}$	$2,0432 \cdot 10^{-2}$	$3,9672 \cdot 10^{-4}$	$2,76 \cdot 10^{-11}$	$5,82 \cdot 10^{-14}$
6.	272,1	$2,3904 \cdot 10^{-3}$	$1,540 \cdot 10^{-9}$	$1,5852 \cdot 10^{-9}$	$3,9164 \cdot 10^{-11}$	$1,019 \cdot 10^{-6}$	$9,830 \cdot 10^{-5}$
7.	572,93	$2,2927 \cdot 10^{-9}$	$8,616 \cdot 10^{-3}$	$1,4104 \cdot 10^{-4}$	$1,5776 \cdot 10^{-6}$	$1,14 \cdot 10^{-11}$	$2,34 \cdot 10^{-11}$
8.	624,8	$1,1474 \cdot 10^{-3}$	$7,081 \cdot 10^{-8}$	$1,3071 \cdot 10^{-8}$	$3,0302 \cdot 10^{-11}$	$9,733 \cdot 10^{-6}$	$1,676 \cdot 10^{-5}$
9.	683,67	$1,7831 \cdot 10^{-9}$	$1,088 \cdot 10^{-2}$	$5,5867 \cdot 10^{-3}$	$3,7058 \cdot 10^{-5}$	$1,72 \cdot 10^{-11}$	$3,08 \cdot 10^{-11}$
10.	1055,7	$4,3571 \cdot 10^{-4}$	$5,148 \cdot 10^{-9}$	$2,011 \cdot 10^{-11}$	$6,546 \cdot 10^{-13}$	$2,865 \cdot 10^{-6}$	$6,542 \cdot 10^{-6}$
Σ		0,993	0,98729	0,99331	0,99995	0,99999	0,99994

Tablicu 3. i Tablicu 4. potrebno je promatrati na način da se pregledom modova izdvoje vrijednosti su značajno velike u odnosu na druge veličine tog moda. Time se dobiva predodžba

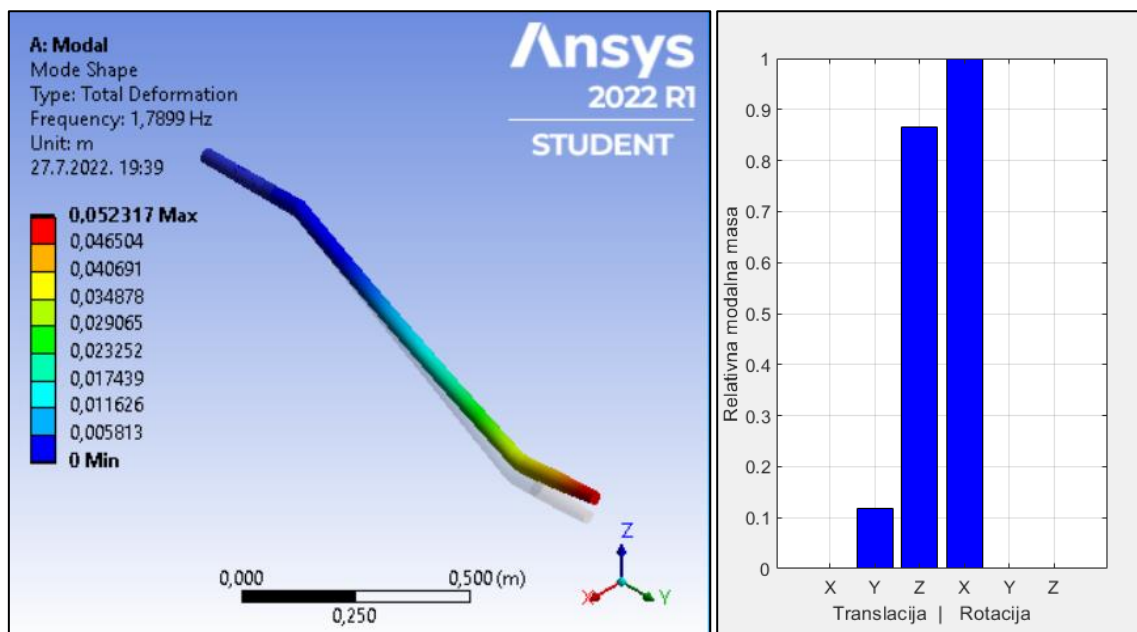


o tome kako model oscilira, odnosno može se predvidjeti smjer titranja. Ono najvažnije, kod efektivnih masa, može se odrediti koja je dominantna os duž koje, odnosno oko koje se događa pomak mase tijekom vibracija. To omogućuje da se s obzirom na frekvenciju odredi koji modalni mod treba detaljnije promotriti zbog toga što je u eksploataciji vjerojatno da će model titrati u tom modu. Pri konstrukciji to omogućava da se konstrukcijski pomiču frekvencije a u smislu održavanja omogućuje da se prate dijelovi konstrukcije koji su potencijalno izloženi vibracijama koje mogu djelovati na nepredviđen način.

Na dnu Tablice 4. vide se sume relativnih modalnih masa za sve modove. Vrlo visoka vrijednost sume relativnih masa ukazuje da je u 10 izračunatih modova pobuđena gotovo cijela masa modela što ukazuje da je odabran dovoljan broj modova, odnosno da su svi važni modovi prikazani. S izračunom modalne mase dobivena su tri od ukupnih četiri elementa modalnog modela. Preostaje još napraviti uvid u modalne oblike.

### 6.6.3. Modalni oblici

U ovom poglavlju napravljen je pregled svih modalnih oblika pojedinih modova, skupa s relativnim efektivnim masama i prirodnim frekvencijama čime se dobiva potpuna slika modalnog modela. Modalni oblici predstavljaju formu koju model zauzima tijekom vibriranja određenom prirodnom frekvencijom. Također iz Tablice 4. za svaki pojedini modalni oblik je komentirana relativna modalna masa. Računalni program *Ansys Mechanical* nudi opciju iscertavanja modalnih oblika za svaki mod, stoga su napravljene simulacije kako bi se uočili oblici i mjesta na modelu koja postižu najveće otklone.



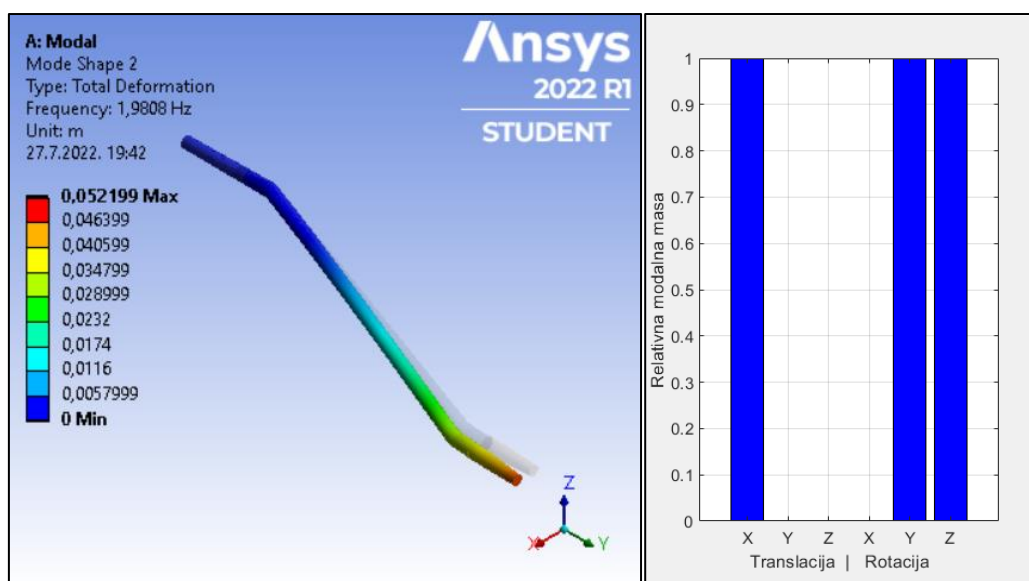
Slika 19. Simulacija prvog modalnog oblika (1.7899 Hz) i stupčasti dijagram relativnih modalnih masa za translacije i rotacije masa za sve osi

Na Slici 19. prikazan je prvi modalni oblik koji se odvija pri 1,7899 Hz. Slika prikazuje modalni oblik u otklonu, a za bolju predodžbu iscrtano je i ravnotežno stanje u obliku prozirne strukture. Model je obojan specifičnim bojama koje predstavljaju skalu veličine otklona iz ravnotežnog stanja. Korištene boje na modelu su i na lijevoj strani Slike 19., u legendi koja pojašnjava pojedine otklone. Iako u gornjem lijevom kutu Slike 19. pojašnjenje govori da su legendi pridružene vrijednosti izražene u metrima, vrijednosti su relativne i ne govore egzaktne otklone. Modalna analiza nije u stanju odrediti egzaktne otklone već samo odrediti oblike titranja i prirodne frekvencije skupa s relativnim masama. Kako bi se dobilo egzaktne otklone pri određenoj pobudi potrebno je koristiti neke druge dinamičke analize koje program nudi poput *Harmonic response analysis*, *Random vibration analysis* i sl.

S obzirom na naznačene boje u legendi može se uočiti kako model ima najveći otklon kod kotača, odnosno mjesta najudaljenijeg od čvrstog hvatišta. Također može se primijetiti kako se otklon najviše odvija u vertikalnoj ravnini, odnosno da noga vibrira gore-dolje.

Desna strana Slike 19. prikazuje stupčasti dijagram relativne modalne mase za prvi modalni oblik. Na apscisi se nalaze osi modela duž kojih odnosno osi oko kojih se relativna modalna masa giba. Stupčasti dijagram je napravljen kako bi se lakše vizualizirali podaci relativne modalne mase za određeni modalni oblik iz Tablice 4. Iz stupčastog dijagrama Slike 19. može se iščitati da se masa manjim dijelom giba iz os Y, a većim dijelom uz os Z. Nadalje gotov cijela masa modela giba se oko osi X što zapravo potvrđuje inicijalnu ideju da noga titra gore-dolje.

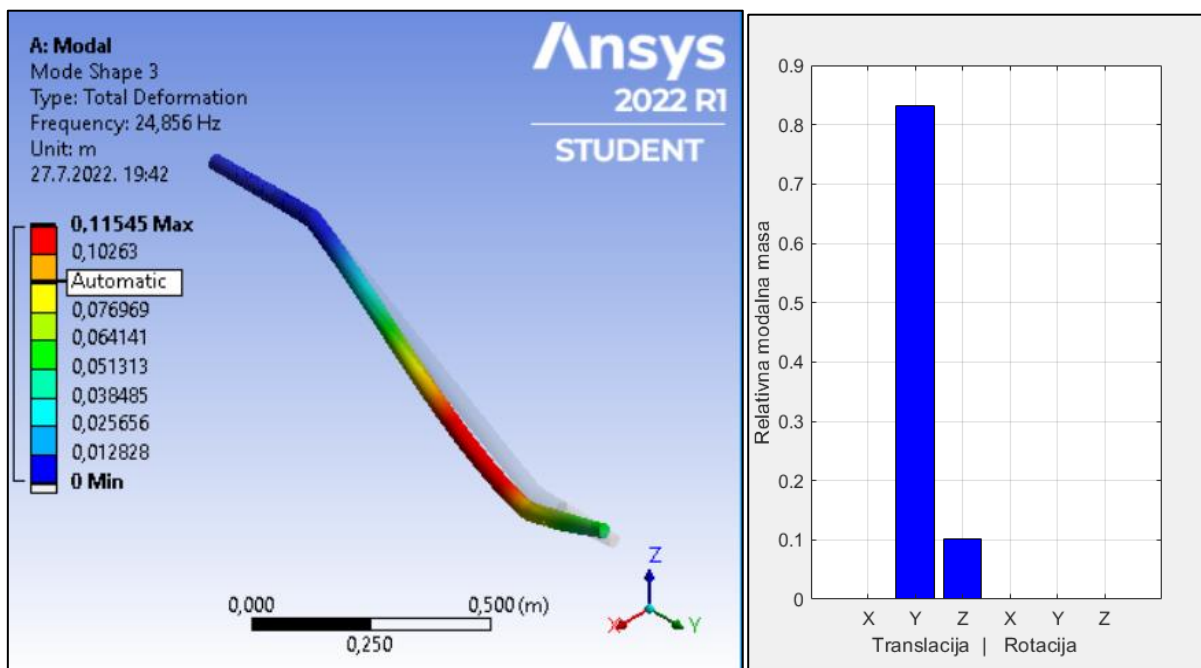
S obzirom na prirodnu frekvenciju koja je prilično niska i moguće ju je ostvariti primjerice u voženju po travnatoj površini koja je relativno neravna, može se reći da je prvi modalni oblik značajan za daljnje promatranje. Nadalje stupčasti dijagram ukazuje da gotovo cijela masa sudjeluje u rotaciji oko osi X i veliki udio mase u translaciji duž osi Z. Iz toga se također može zaključiti kako je prvi modalni oblik ima veliku važnost za vibracije glavnog podvozja ovog zrakoplova.



Slika 20. Simulacija drugog modalnog oblika (1,9808 Hz) i stupčasti dijagram relativnih modalnih masa za translacije i rotacije masa za sve osi

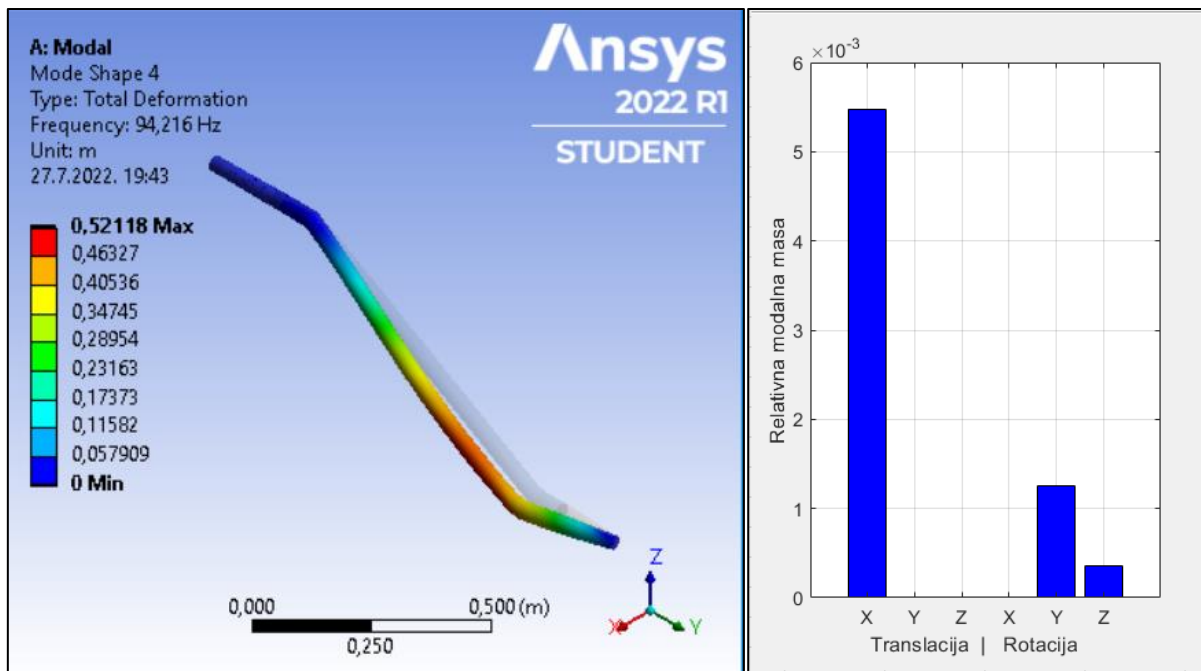
Na Slici 20. prikazan je drugi modalni oblik kojim model vibrira pri 1,9808 Hz. Gledajući u lijevi dio slike, može se primijetiti kako se model podvozja giba uglavnom naprijed natrag, gledano s gledišta pilota koji sjedi u zrakoplovu.

Na desnoj strani Slike 20. može se očitati da se masa pomiče uglavnom duž osi X a s time i oko osi Z odnosno Y, zbog toga što je čvrsto vezana za hvatišta koja su već definirana. Udio mase koji sudjeluje u modalnom obliku, kao što je naznačeno u dijagramu, redom iznose: 0,9835, 0,9987, 0,9994. Dakle gotovo cijela masa sudjeluje u modalnom obliku zbog čega se može reći da ovaj modalni oblik kao i prethodni ima veliku važnost. Također, frekvenciju kojom se pobuđuje ovaj modalni oblik, moguće je postići u voženju po neravnim površinama zbog čega ovaj oblik dobiva još više na važnosti.



Slika 21. Simulacija trećeg modalnog oblika (24,856 Hz) i stupčasti dijagram relativnih modalnih masa za translacije i rotacije masa za sve osi

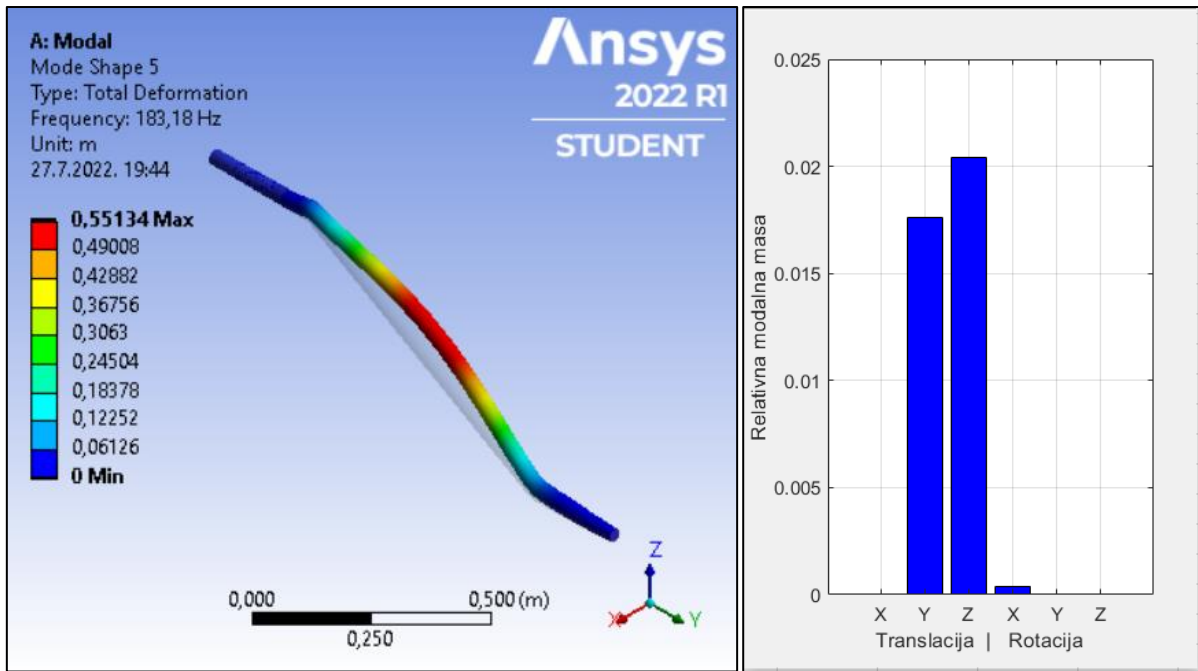
Na Slici 21. treći je modalni oblik koji vibrira pri 24,856 Hz. Gledajući u lijevi dio slike prema bojama naznačenim na modelu može se primijetiti kako se najveći otklon događa iznad donjeg pregiba glavnog potpornika, odnosno bliže kotaču. Pogledom na sliku simulacije nije moguće točno zaključiti gdje se modalna masa giba. Stoga, očitavanjem stupčastog dijagrama zaključuje se da se većina mase giba duž osi X (0,8319) a manji dio uzduž osi Z. (0,1022). Iako je udio mase i dalje relativno visok, manji je nego u prethodna dva moda. Nadalje, frekvencija kojom vibrira ovaj modalni oblik značajno je veća od prethodnih oblika, i tu frekvenciju teško je moguće pogoditi u voženju po aerodromskim površinama. Primjerice, ova frekvencija mogla bi biti pogođena od strane pogonskog sustava kada motor radi pri 1500 RPM i mogla bi imati veći značaj kada je zrakoplov u letu, odnosno kada težina zrakoplova ne djeluje na podvozje. No, s obzirom da je motor na nosačima i udaljen je od podvozja, ovaj mod u usporedbi s prethodna dva ima manji značaj.



Slika 22. Simulacija četvrtog modalnog oblika (94,216 Hz) i stupčasti dijagram relativnih modalnih masa za translacije i rotacije masa za sve osi

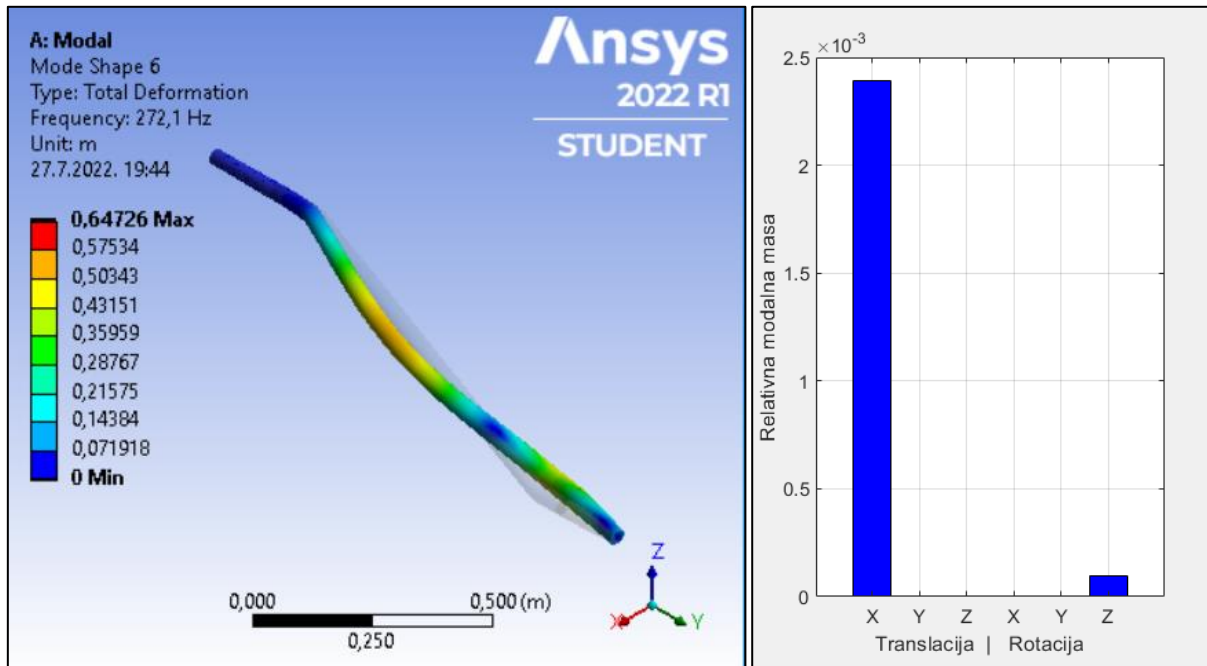
Na Slici 22. vidi se simulacija četvrtog modalnog oblika koji vibrira pri 94,216 Hz. Modalni oblik sličan je prethodnom trećem obliku. Položaj maksimalnog otklona također je na sličnom mjestu, no vidimo kako je smjer titranja mase sada uglavnom u smjeru osi X, te također masa rotira oko osi Y i Z no manjim udjelom na što ukazuje stupčasti dijagram. No, na grafu se mogu iščitati i vrijednost na osi ordinata koja za pomak duž osi X iznosi  $5,4796 \cdot 10^{-3}$ . Vrijednost je za ovaj modalni oblik značajno manja od prethodnih, što znači da manji udio mase modela sudjeluje u vibracijama. Frekvencija kojom ovaj model vibrira relativno je visoka i nije vjerojatno da će pobuda koja dolazi od voženja po aerodromskim površinama doseći tu frekvenciju.

Slika 23. prikazuje simulaciju petog modalnog oblika pri frekvenciji 183.18 Hz. Najveći otklon nalazi se na polovici modela a masa se otklanja u ravnini ZY. Spomenuti pomak potvrđuje i stupčasti dijagram koji ukazuje kako masa duž osi Y i Z imaju značajnije vrijednosti u odnosu na druge. Masa koja sudjeluje u pomaku duž osi Y iznosi  $1,758 \cdot 10^{-2}$ , a  $2,0432 \cdot 10^{-2}$  duž osi Z. Dakle udio mase je nešto veći nego kod prethodnog moda no ipak je znatni manji usporedivši ga sa prva dva moda. S obzirom na relativno visoku frekvenciju modalni oblik nema veliku važnost.

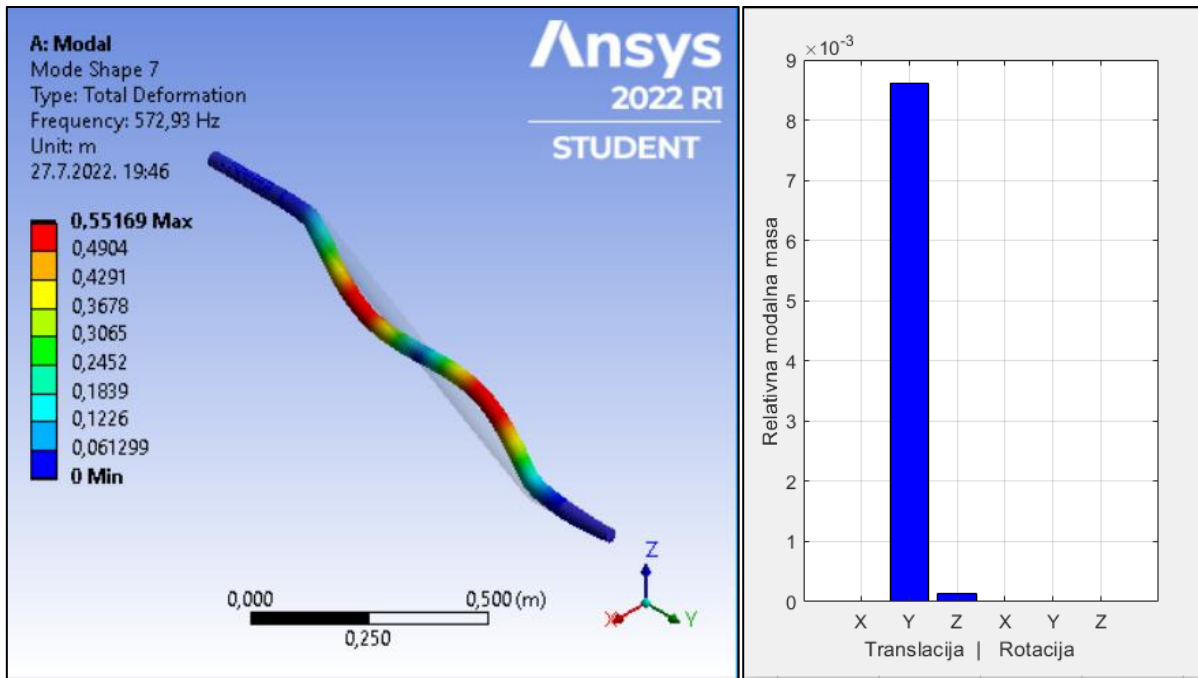


Slika 23. Simulacija petog modalnog oblika (183,18 Hz) i stupčasti dijagram relativnih modalnih masa za translacije i rotacije masa za sve osi

Na Slici 24. vidi se simulacija šestog modalnog oblika na modelu pri 272,1 Hz. Ovaj oblik moda zanimljiv je zbog toga što za razliku od prethodnih modela ima dva maksimuma, jedan na polovici modela i jedan u donjem pregibu što se može uočiti zbog specifičnih boja. Ovaj karakterističan oblik često se naziva S jer struktura u maksimalnim otklonima zauzima položaj nalik na slovo S. Stupčasti dijagram ukazuje da glavina mase mijenja položaj duž X osi i to maksimalnim udjelom od  $2,3904 \cdot 10^{-3}$ .

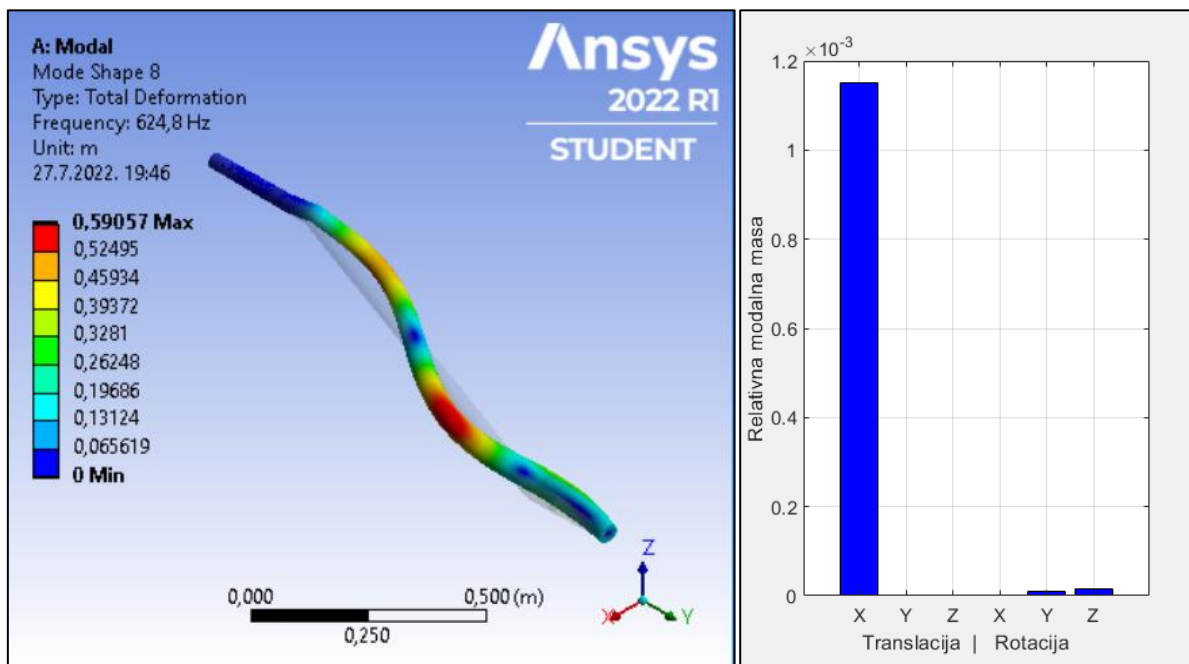


Slika 24. Simulacija šestog modalnog oblika (272,1 Hz) i stupčasti dijagram relativnih modalnih masa za translacije i rotacije masa za sve osi



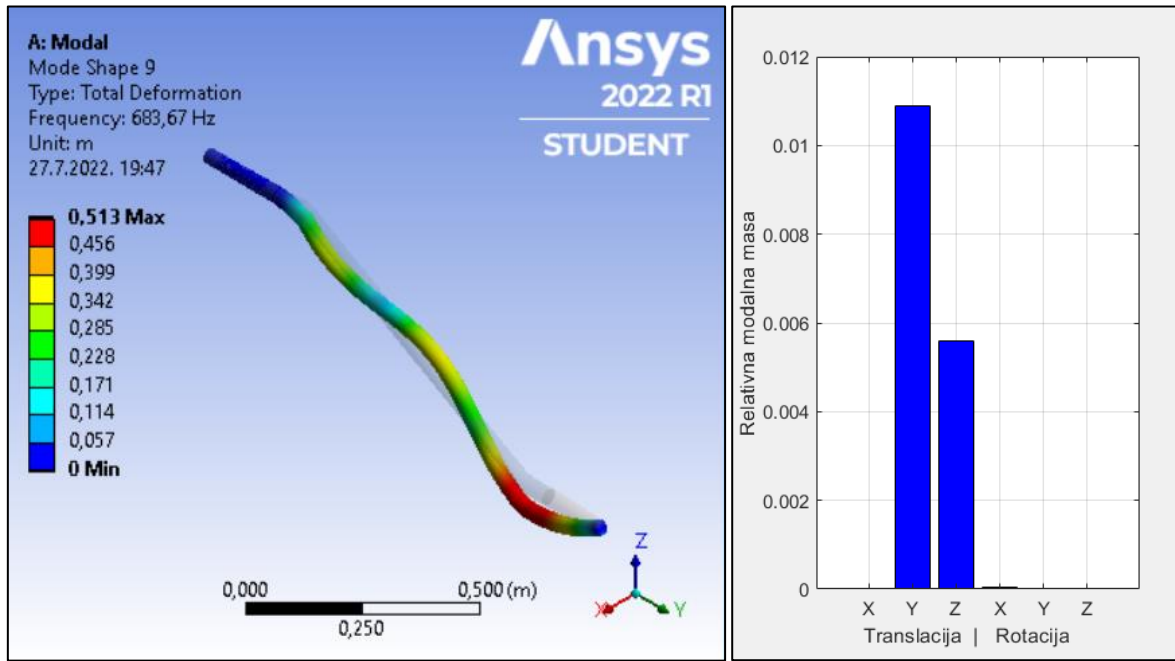
Slika 25. Simulacija sedmog modalnog oblika (572,93Hz) i stupčasti dijagram relativnih modalnih masa za translacije i rotacije masa za sve osi

Slika 25. prikazuje simulaciju sedmog modalnog oblika na modelu pri sedmoj prirodnoj frekvenciji 572,93 Hz. Dva maksimuma daju ponovno karakterističan oblik S. Očitavanjem stupčastog dijagrama zaključuje se da najveći udio mase vibrira uzduž osi Y i manji udio uz os Z. Udio relativne modalne mase u modalnom obliku iznosi  $8,616 \cdot 10^{-3}$  i  $1,4104 \cdot 10^{-4}$ . Relativno mali udjeli relativnih masa i visoka frekvencija umanjuju važnost ovog moda zbog toga što je vrlo malo vjerojatno da će podvozje biti pobuđeno ovako visokom frekvencijom.



Slika 26. Simulacija osmog modalnog oblika (624,8 Hz) i stupčasti dijagram relativnih modalnih masa za translacije i rotacije masa za sve osi

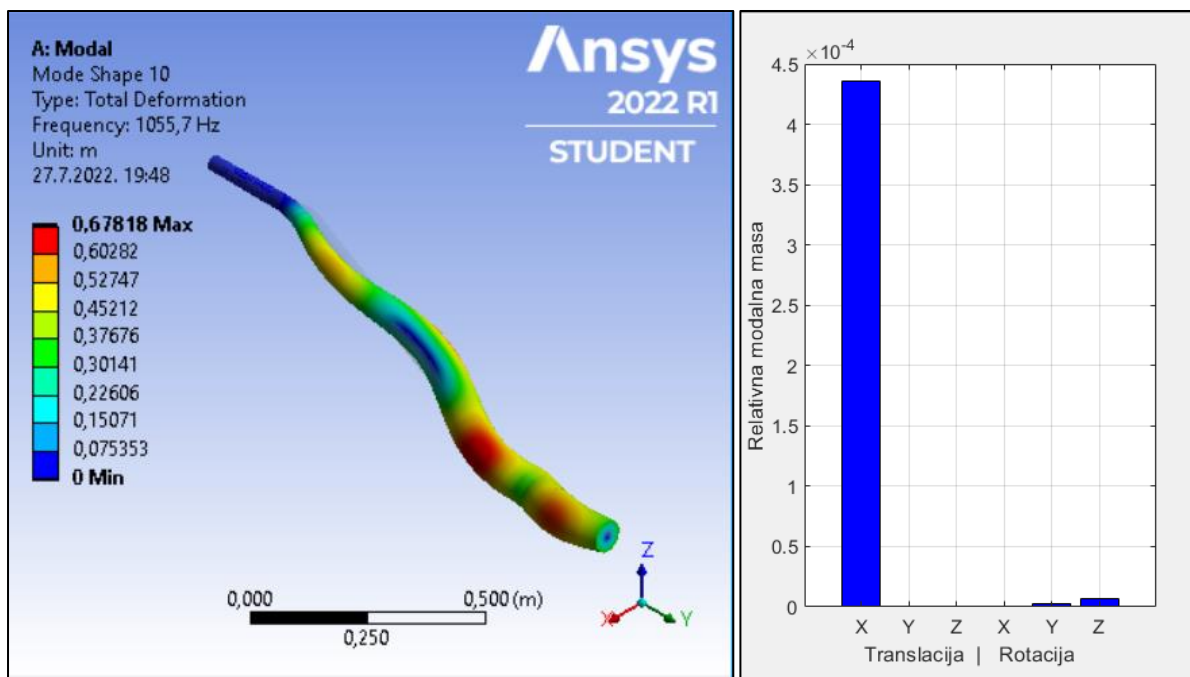
Na Slici 26. prikazana je simulacija osmog modalnog oblika pri 624,8 Hz. Oblik na slici ukazuje na to da model sada poprima oblik s tri maksimuma, od kojih je jedan slabo vidljiv, no nalazi se u donjem pregibu potpornika. Takav karakterističan oblik naziva se W oblik zbog toga što model poprima oblik tog slova dok vibrira ovim oblikom moda. Masa modela uglavnom se pomiče uzduž osi X što je vidljivo iz stupčastog dijagrama sa Slike 26. a udio relativne modalne mase za os X iznosi  $1,1474 \cdot 10^{-3}$ .



Slika 27. Simulacija devetog modalnog oblika (683,67 Hz) i stupčasti dijagram relativnih modalnih masa za translacije i rotacije masa za sve osi

Slika 27. prikazuje simulaciju devetog modalnog oblika pri prirodnoj frekvenciji od 683.67 Hz. Model poprima karakterističan W oblik s tri maksimuma, kao i u prethodnom obliku, no sada su maksimumi nešto izraženiji. Najveći dio mase giba se uzduž osi Y i Z što potvrđuje i stupčasti dijagram na slici. Udjeli relativnih masa za os Z i Y ovog oblika moda su  $5,5867 \cdot 10^{-3}$  i  $1,088 \cdot 10^{-2}$ . S obzirom na prošli modalni oblik, relativna masa značajno je veća, no vrlo visoka frekvencija za pobudu ovog podvozja i dalje daje vrlo malu vjerojatnost da će ovaj modalni mod biti pogođen.

Slika 28. prikazuje simulaciju desetog modalnog oblika pri frekvenciji od 1055,7 Hz. Model poprima oblik s četiri maksimuma što se može vidjeti zbog karakterističnih boja na modelu. Glavnina mase giba se uzduž osi X ali i rotira oko Y i Z osi, što se može iščitati uz stupčastog dijagrama. Udio modalne mase najmanji je od svih modalnih oblika i za os X iznosi  $4,3571 \cdot 10^{-4}$ . Najviša frekvencija od svih modova te najmanja relativna modalna masa smanjuju važnost ovog moda za analizu vibracija na podvozju jer je vrlo malo vjerojatno da će podvozje biti pobuđeno ovom frekvencijom u eksploataciji.



Slika 28. Simulacija desetog modalnog oblika (1055,7 Hz) i stupčasti dijagram relativnih modalnih masa za translacije i rotacije masa za sve osi

Sada kada su pregledani svi modovi, njihove frekvencije i modalne mase valja dati pregled modalnih oblika koji su simulirani za potrebe ovog rada. U ovom poglavlju prikazano je kako prvi modovi imaju niže frekvencije i kako raste broj moda raste i vrijednost prirodne frekvencije koja karakterizira. Porast frekvencije uglavnom prati pad relativne modalne mase koja sudjeluje u vibriranju određenog moda. To znači da model na višim prirodnim frekvencijama slabije reagira na pobudu.

S obzirom na sve spomenuto prvi i drugi modalni oblik najvjerojatniji su da će se pojaviti u eksploataciji, najprije zbog frekvencije koja je ostvariva i moguće ju je postići u vožnju a zatim i zbog samog oblika. Prvi i drugi oblik moda imaju specifične oblike kakvi se očekuju kod savijanja kotača. Neravnine će učiniti da podvozje vibrira u vertikalnoj ravnini, dok će tangencijalno naprezanje na kotač učiniti da podvozje titra u horizontalnoj ravnini.

S obzirom na spomenuto prvi i drugi modalni oblik imati će dominantan utjecaj na podvozje, stoga valja obratiti posebnu pažnju pri održavanju na utjecaj vibracija ta dva moda na podvozje. Simulacije modalnih oblika i poznavanje kako se masa otklanja doprinosi tome što je moguće prije daljnjih analiza predvidjeti lokacije gdje se mogu očekivati oštećenja. Na mjestima gdje postoji značajnija deformacija mjesto je gdje postoji veća mogućnost oštećenja strukture. Stoga modalna analiza može poslužiti kao alat kojim se može odrediti mjesta važna da daljnje analize kako bi se utvrdilo stanje komponente kao što se to čini u metodologiji održavanja zvanom *Condition monitoring*.



## 7. Usporedba rezultata modalne analize i podataka iz eksploatacije

Ovo poglavlje prikazuje rezultate mjerenja vibracija u eksploataciji u odnosu na provedenu modalnu analizu. Time će se za početak evaluirati model, odnosno pokazati koliko točno model reprezentira stvarno podvozje. Zatim će se napraviti pregled snimljenih vibracija te povezati s modalnim oblicima i prirodnim frekvencijama. To će pokazati koje frekvencije se pojavljuju u eksploataciji i postoji li podudaranje prirodnih frekvencija i onih iz eksploatacije.

Podaci snimljeni u eksploataciji preuzeti su iz rada referenciranog pod brojem [4].

### 7.1. Evaluacija modela modalne analize

Na modelu podvozja provedena je modalna analiza i dobiveni rezultati su prezentirani, no je li model točno dizajniran i može li on reprezentirati stvarno glavno podvozje ugrađeno na zrakoplov ispitat će se daljnjom analizom. Analiza uključuje usporedbu odziva stvarnog podvozja u eksploataciji s odzivom modela podvozja na slučajnu pobudu (simulacija voženja).

Za početak potrebno je pregledati podatke snimljene u eksploataciji i preuzeti relevantne dijelove koji opisuju slučaj voženja. Za potrebe isctavanja podataka korišten je računalni program *Matlab*.

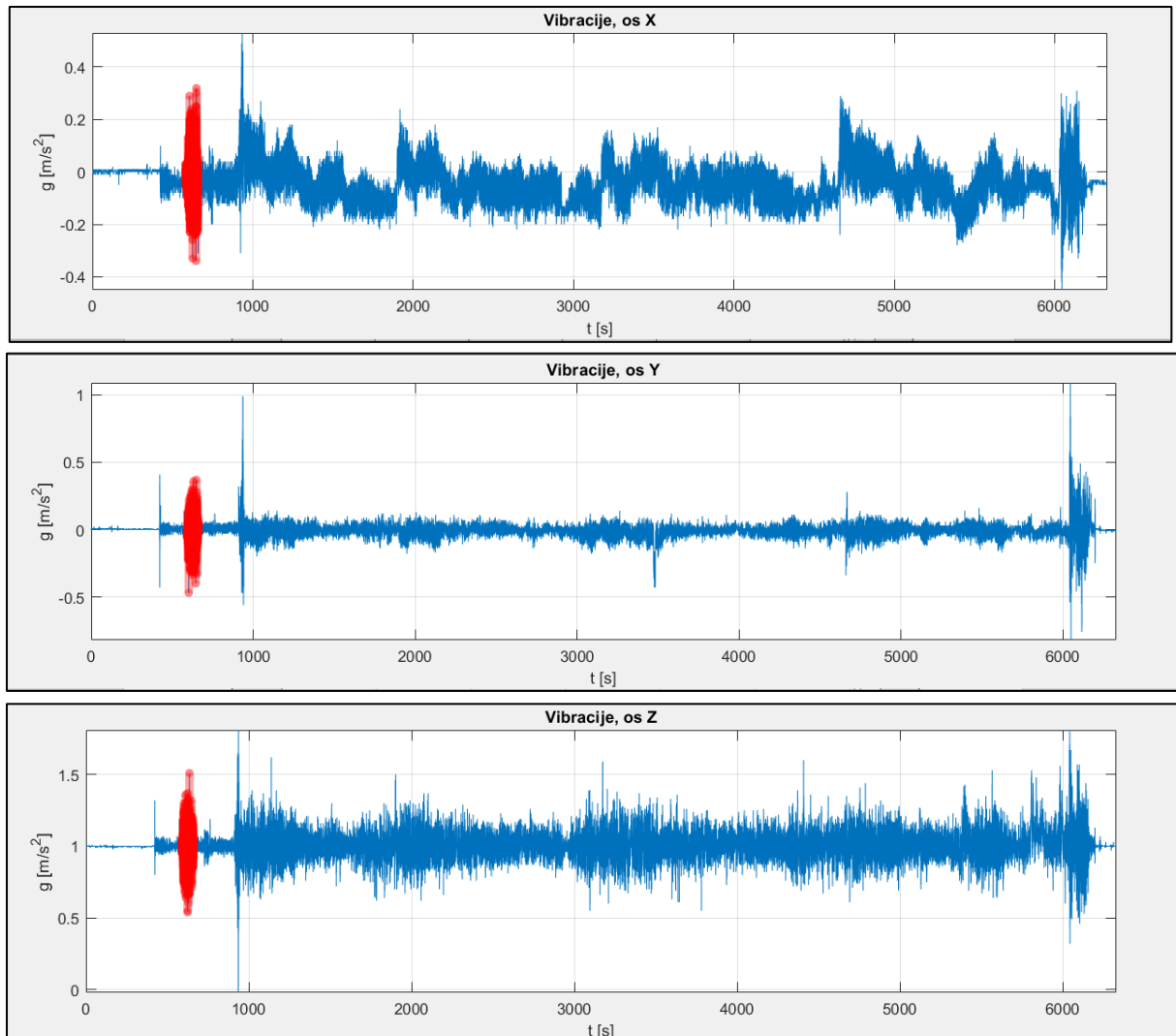
Na Slici 29. prikazani su grafikoni koji prikazuju podatke koji su snimljeni tokom jednog leta, za svaku os posebno. Snimanje je obavljeno na trenажnom letu u školovanju studenta Fakulteta prometnih znanosti, modula Civilni pilot. Let je proveden u svrhu vježbe instrumentalnih prilaza na Zračnu luku Franjo Tuđman u Zagrebu. Let se sastoji od tri instrumentalna prilaza.

Uređaj za mjerenje vibracija montiran je na konstrukciju stražnjeg sjedišta i nalazi se iznad glavnog podvozja. S obzirom da senzori nisu postavljeni točno na podvozje snimljen je doprinos vibracija svih sustava.

Zapisivanjem vremena pojedinih faza leta, prema vibracijama moguće je iščitati kojoj fazi pripadaju koji podaci. No, za ovu analizu potrebno je ekstrahirati podatke koji pokazuju voženje po aerodromskim površinama zbog toga što je model podvozja konstruiran da reprezentira tu fazu leta.

Let tokom kojeg je snimanje provedeno, uključivao je voženje po asfaltnoj stajanki i po travnatim rulnicama. Za promatrani slučaj podvozja za daljnju analizu odabran je dio snimanja koji predstavlja voženje po travnatim površinama zbog toga što voženje po takvim površinama pobuđuje model u većem spektru frekvencija. To je poželjno jer će se vidjeti odziv podvozja u većem rasponu frekvencija odnosno moći će se napraviti usporedba s odzivom modela.

Na Slici 29. grafički su prikazani podaci snimanja cijelog leta za osi X, Y, Z. Crvenom bojom označen je dio snimanja koji predstavlja spomenuto voženje po travnatim površinama i koji je izdvojen za daljnju obradu.

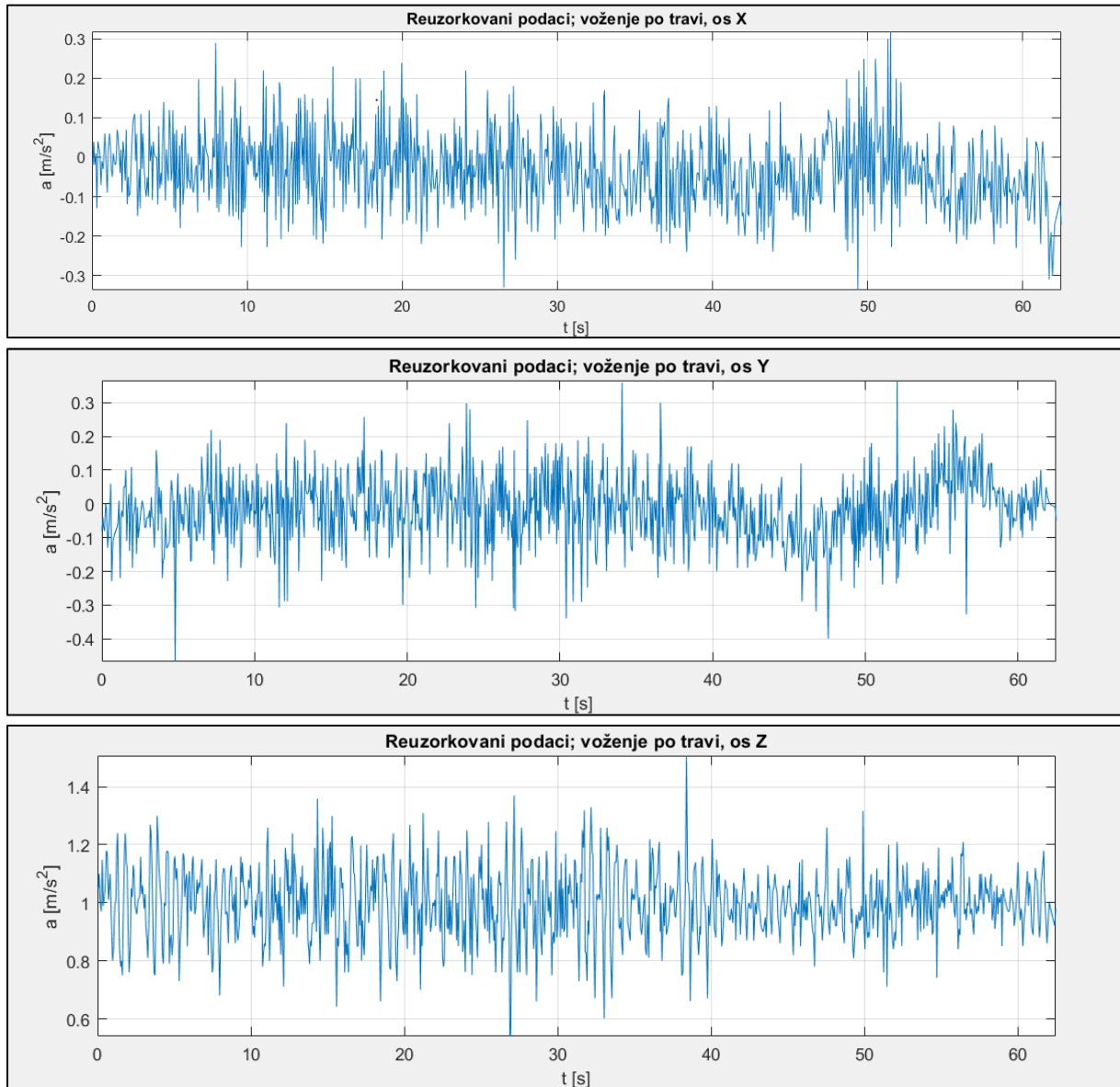


Slika 29. Prikaz snimljenih vibracija u letu [4]

Podaci su prikazani na grafikonu na čijoj apscisi je prikazano vrijeme u sekundama od početka snimanja, a na ordinati akceleracija u ubrzanju zemljine sile teže  $g$  [ $m/s^2$ ]. Prikazivanje vibracija u obliku veličine akceleracije uobičajeno je zbog toga što dobro reprezentira snimljene vibracije a ne zahtjeva dodatnu obradu nakon što je snimanje obavljeno akcelerometrima.

Na Slici 30. izdvojen je dio označen na Slici 29. Prikazan je period od 62.48 sekundi i pripadne akceleracije. Prije nego se podaci dalje obrađuju, zbog toga što daljnje analize to zahtijevaju, snimanje je preuzorkovano. Snimanje podataka napravljeno je u nejednakim vremenskim razmacima što je nepoželjno za analize koje slijede, i zbog toga je vremenski vektor ponovno raspodijeljen u jednake vremenske razmake od 1 ms, a vrijednosti akceleracija interpolirane kako bi svaki element vektora vremena imao pridruženu vrijednost. Izgled grafova prije i poslije se ne razlikuje jer je novi uzorak manji od najmanjeg vremenskog razmaka prije

preuzorkovanja. Samo pogledom na grafikone na Slici 30. može se uočiti maksimalna akceleracija, te je moguće iščitavati ostale vrhove krivulje. No, podaci koji mogu koristiti modalnoj analizi su frekvencije signala prikazanog na Slici 30. Takve podatke nije moguće iščitati izravno s grafa već je potrebna daljnja analiza.



Slika 30. Podaci snimanja vibracija u voženju po travi za osi X, Y, Z

Ovaj signal prikazan je u vremenskoj domeni, no kako bi se vibracije mogle analizirati u smislu frekvencije potrebno je signal prebaciti u frekvencijsku domenu. To će omogućiti da se iz ovog signala koji se može nazvati šum očitaju spektralne komponente odnosno dominantne frekvencije i pripadni harmonici.

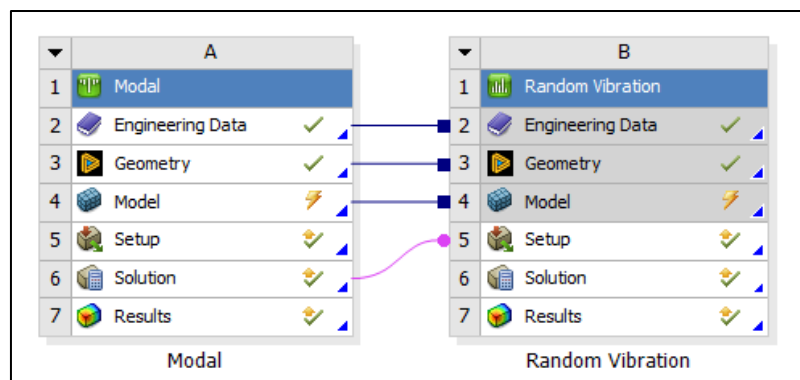
Kako bi se ovakav signal prikazao u frekvencijskoj domeni potrebno je provesti Fourierovu transformaciju. Fourierova analiza temelji se na ideji da se svaka periodička funkcija zapiše kao zbroj sinusoida različitih frekvencija, amplituda i faza [17], [29]. Za računalne programe često se koristi FFT (eng. *Fast Fourier Transform*) i takav jedan algoritam korišten je u računalnom

programu *Matlab* kako bi se prikazala frekvencijska svojstva odziva zrakoplova na pobudu u eksploataciji.

Odziv sustava izračunat FFT algoritmom prikazan je kasnije u poglavlju, kada će biti potreban za usporedbu s ostalim podacima. Spomenuti podaci izračunati FFT algoritmom dalje su obrađeni kako bi se prikazao PSD (eng. *Power Spectral Density*) funkcija. PSD pokazuje intenzitet veličine (u ovom slučaju akceleracije) u funkciji frekvencije. Mjerna jedinica kojom je izražen intenzitet je  $[g^2/Hz]$  što predstavlja varijancu po frekvencijskom intervalu koji je određen. PSD je koristan način prikazivanja vibracija u frekvencijskoj domeni jer statistički određuje frekvencijske komponente u određenim intervalima, a time se dobiva izglađenija funkcija lakša za očitavanje [30]. Izgled PSD je na Slici 34. koja je postavljena kasnije u poglavlju za lakšu usporedbu.

Ovim korakom analize prikazan je odziv stvarnog podvozja u frekvencijskoj domeni na temelju snimanja vibracija u eksploataciji. Sada je potrebno provesti isto na računalnom modelu podvozja. Spomenuto će se postići analizom u računalnom programu Ansys. Na modelu je provedena *Random Vibration Analysis*, odnosno analiza koja pobuđuje model pobudom slučajnih frekvencija i intenziteta u okviru zadanih postavki. Takva pobuda simulira vožnju po neravnim površinama jer u tom slučaju nije moguće odrediti stalnu frekvenciju pobude već se frekvencija pobude mijenja nasumično.

Na postojeću modalnu analizu na *Workbench* sučelju dodana je *Random Vibration Analysis* kako je to prikazano na Slici 31.



Slika 31. Shematski prikaz analize

Poveznice između dva osnovna bloka ukazuju na to kako se podaci međusobno koriste. Dakle *Engineering Data*, *Geometry* i *Model* obje analize koriste iste postavke koje su već prije objašnjene. Nadalje, rješenja modalne analize koristit će u procesu izrade *Random Vibration Analysis* i poslužiti će kao informacije o svojstvima modela.

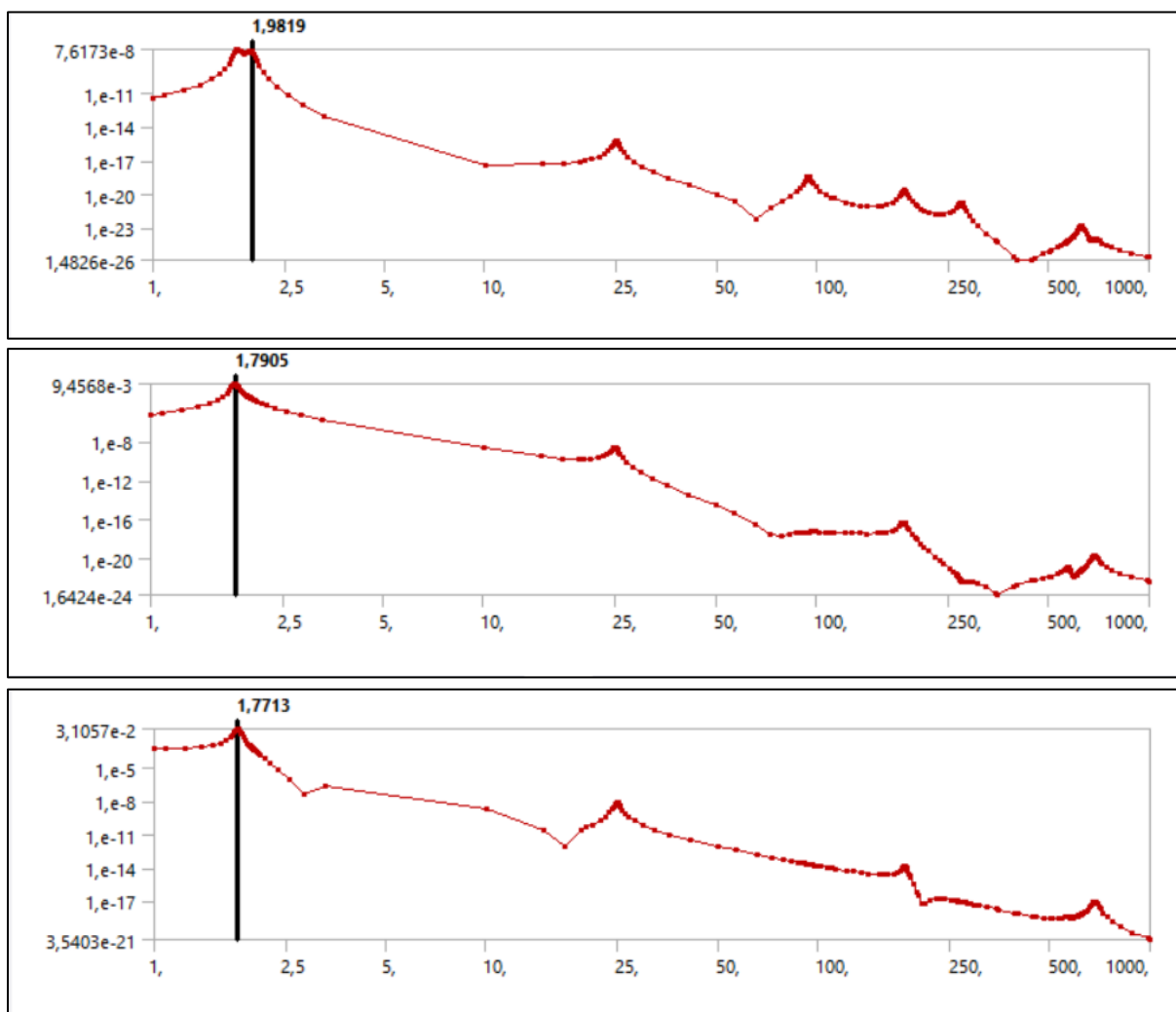
Sljedeće je potrebno postaviti pobudu koja će djelovati na model i na temelju koje će se izračunati odziv. S obzirom da je odziv u frekvencijskoj domeni prikazan na Slici 34. pobudu se može postaviti tako da odgovara grafu na Slici 34.

Veličine pobude pri određenim frekvencijama prikazane su na Slici 32.

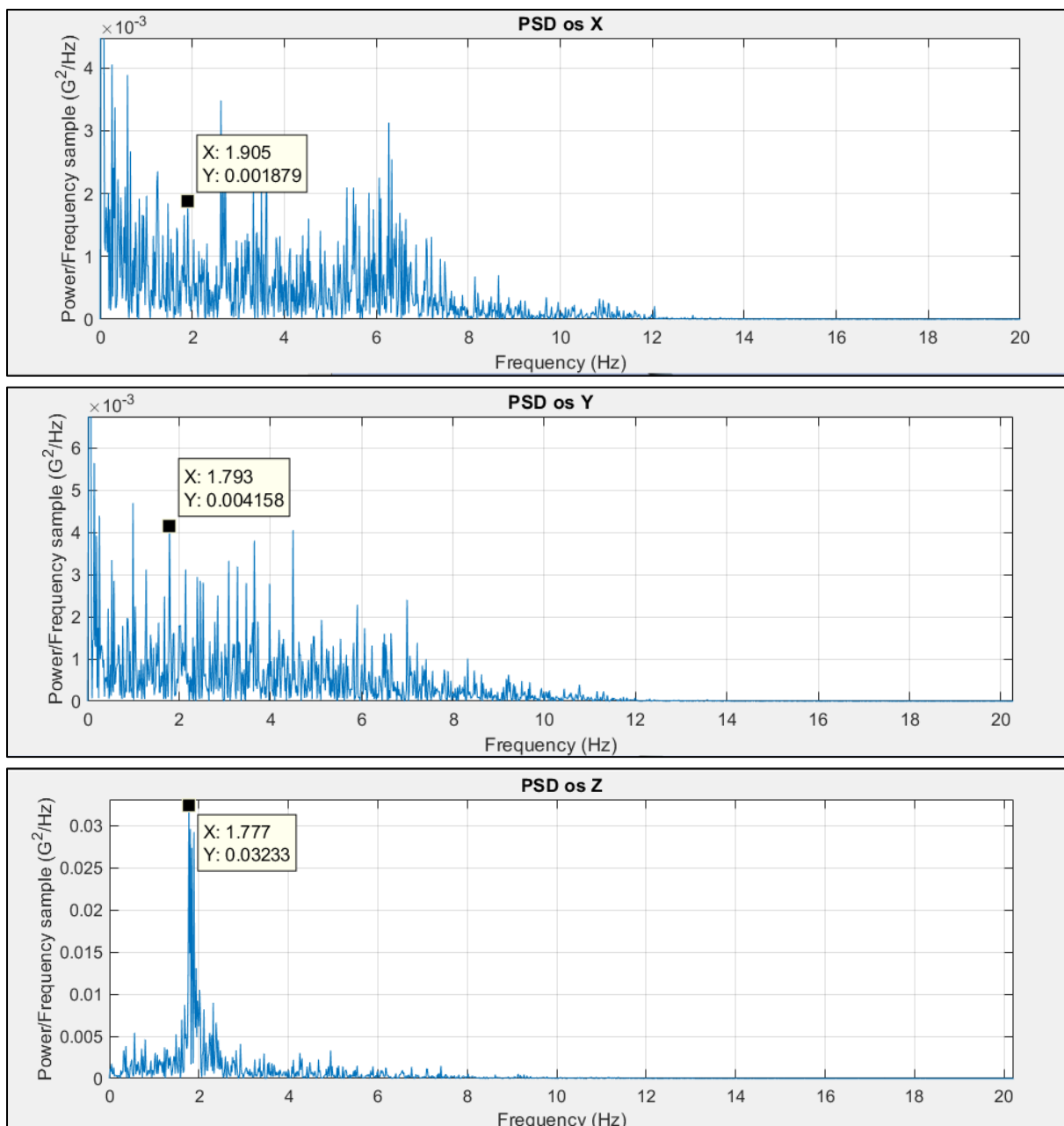
	Frequency [Hz]	<input checked="" type="checkbox"/> G Acceleration [G <sup>2</sup> /Hz]
1	1,	5,e-003
2	2,	3,e-002
3	10,	3,e-003
4	20,	5,e-004
5	50,	7,e-005
6	200,	7,e-006
7	500,	1,e-007
8	1000,	1,e-007
*		

Slika 32. Pobuda modela

Nakon što su definirani parametri pobude potrebno je provesti analizu i prikazati rezultate. Rezultati su prikazani na Slici 33. Grafikoni su preuzeti iz sučelja *Mechanical* i prikazuju PSD funkciju sustava redom: os X, os Y, os Z. Na osi apscisa prikazana je frekvencija, a na osi ordinata intenzitet vibracija izražen u g<sup>2</sup>/Hz.



Slika 33. Odziv računalnog modela podvozja na slučajnu pobudu



Slika 34. PSD odziv podvozja u eksploataciji

Na Slici 33. i Slici 34. prikazani su odzivi najprije računalnog modela a onda i stvarnog podvozja u eksploataciji. Potrebno ih je analizirati odnosno usporediti. Iako na prvi pogled ne izgledaju slično potrebno je detaljnije pogledati kako bi se uočili harmonici koji mogu ukazivati na sličnosti. Prvi grafikon na Slici 33. vide se vrhovi krivulja kod kojih je intenzitet vibriranja veći i to su prirodne frekvencije modela. Na osi X odziva računalnog modela na Slici 33. vidi se prva frekvencija koja ima značajan udio u titranju i iznosi 1,9819 Hz. Pritom je intenzitet vrlo mali i iznosi  $7,617 \cdot 10^{-8}$  g<sup>2</sup>/Hz. Zatim na Slici 34. treba pogledati u prvi grafikon koji prikazuje stvarni odziv za os X. s obzirom da je snimanje provedeno na razini cijelog zrakoplova vidi se mnoštvo harmonika te nije točno poznato koji sustav doprinosi kojoj frekvenciji. No ipak je izdvojen harmonik pri 1,905 Hz koji ima isti odziv kao i simulirani

model. Ostale spektralne komponente sa Slike 33. imaju premale vrijednosti kako bi se ispravno evaluirala njihova točnost.

Nadalje, na Slici 33. drugi grafikon prikazuje računalnu simulaciju modela pobuđenog slučajnim vibracijama u osi Y. Sa slike se vidi kako pri 1,7905 Hz struktura vibrira  $3,1 \cdot 10^{-3}$  g<sup>2</sup>/Hz. Usporedivši spomenuto sa PSD odzivom snimljenim tokom leta sa Slike 34. postoji podudarnost. Stvarni model u eksploataciji vibrirao je 1.793 Hz intenzitetom  $4,158 \cdot 10^{-3}$  g<sup>2</sup>/Hz. Također prisutne su i ostale komponente no još jednom valja napomenuti kako porijeklo ostalih spektralnih komponenti nije moguće definirati bez daljnjih analiza.

Na poslijetku donji grafikon sa Slike 33. prikazuje odziv računalnog modela u osi Z. Pri frekvenciji 1,7713 Hz vidljiv je intenzitet od  $3,1 \cdot 10^{-2}$  g<sup>2</sup>/Hz. Ako se uspoređi frekvencija i intenzitet ove komponente sa odzivom stvarnog modela na Slici 34. uočava se podudarnost, odnosno relativno malo odstupanje u frekvenciji kao i u intenzitetu vibracija. Frekvencija harmonika stvarnog modela iznosi 1.777 Hz a intenzitet  $3,233 \cdot 10^{-2}$  g<sup>2</sup>/Hz. Najveća podudarnost se i očekivala u osi Z, zbog toga što se i očekuje najveće oscilacije i osi Z u fazi voženja. Zbog toga graf ima izražene vibracije u osi Z jer je uzduž te osi najviše pobuđen.

Ostali harmonici kao i u prethodna dva primjera premali su za analizu s ovakvim podacima mjerenja. Vidljivo je kako je prvi sljedeći harmonik pri 24,5 Hz za os Z ima intenzitet  $1,8 \cdot 10^{-8}$  što je teško usporediti sa stvarnim snimanjem vibracija.

Valja zaključiti kako visoka podudarnost frekvencijskih komponenti odziva računalnog modela i odziva snimljenog u eksploataciji potvrđuje reprezentativnost modela zato što model pokazuje karakteristike stvarnog modela što i je njegova funkcija.

Ostale frekvencijske komponente teže je promatrati jer u eksploataciji zrakoplov nije pobuđen tako visokim frekvencijama što daje za rezultat vrlo mali odziv. Kako bi se utvrdila podudarnost odziva pri višim frekvencijama potrebno bi bilo eksperimentalno pobuditi model na višim frekvencijama i tada usporediti odzive.

## 7.2. Usporedba prirodnih frekvencija i snimanja vibracija u letu

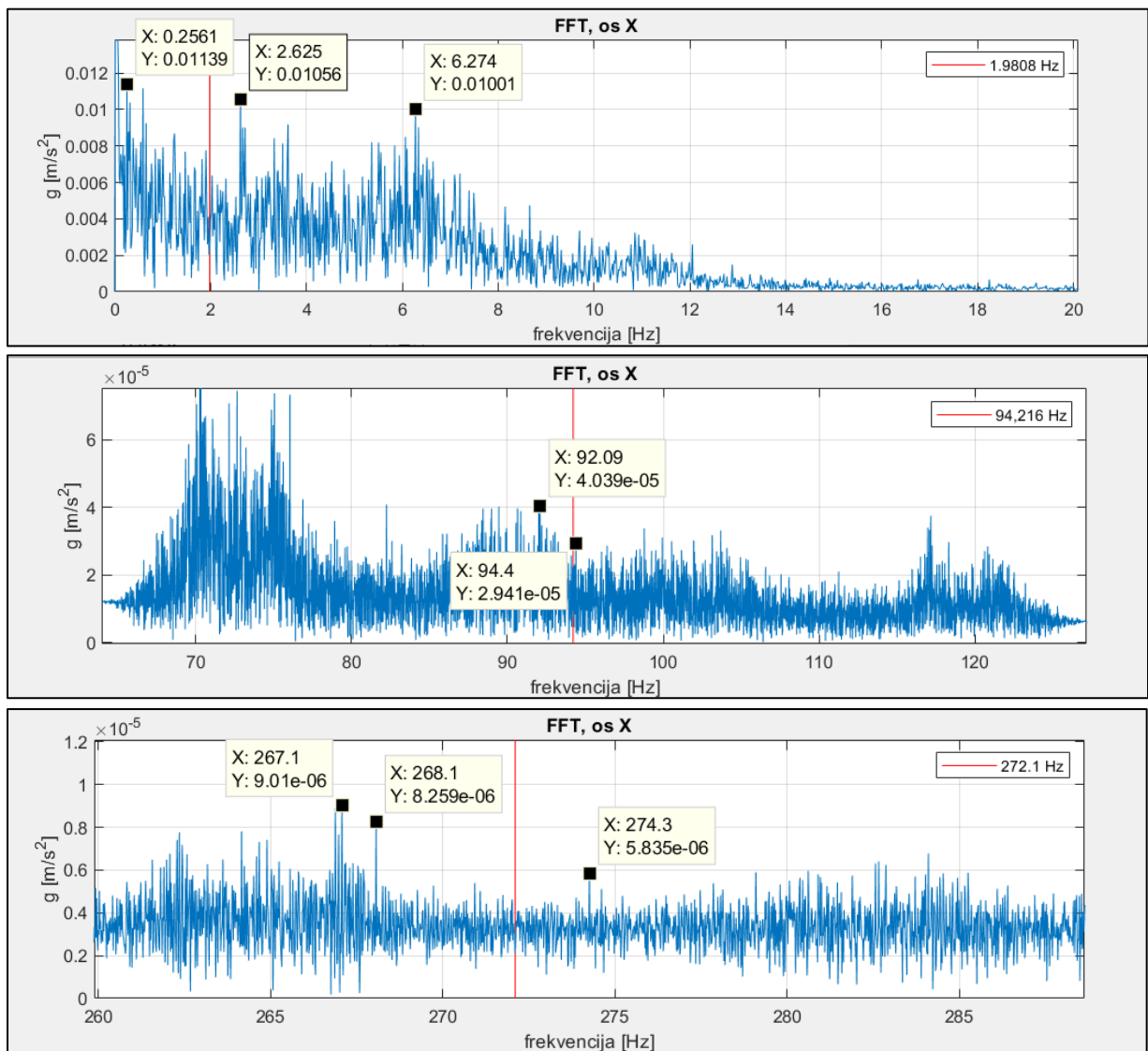
Nakon što je napravljena usporedba stvarnog odziva u eksploataciji i odziva računalnog modela potrebno je još jednom prikazati rezultate snimanja u eksploataciji ali ovaj put usporediti s prirodnim frekvencijama dobivenih kod modalnog modela. Spomenuto je posljednji korak analize ovog rada. Svrha ovog koraka analize je utvrditi postoje li značajnije vibracije koje imaju frekvencije bliske prirodnim frekvencijama. Takvo podudaranje može rezultirati rezonancijom a posljedično i vibracijama visokih amplituda koje mogu oštetiti strukturu.

Vibracije su u ovom potpoglavlju prikazane opet u frekvencijskoj domeni, no ne kao funkcija PSD, već kao rezultati FFT algoritma. Razlog tome je što je na osi ordinata prikazana veličina akceleracije izražena u konstanti g što je intuitivnije za interpretaciju. Na osi apscisa vektor je frekvencije.

Podaci koji su prikazani snimljeni su tijekom voženja po travnatim površinama što je pogodno jer je uzbuda podvozja najraznolikija glede frekvencije. Snimljeni podaci pregledat će se za svaku os pojedinačno. Stoga je najprije potrebno vratiti se u poglavlje gdje je napravljena modalna analiza te pomoću stupčastih dijagrama (napravljenih na temelju Tablice 4.) odrediti prirodne frekvencije koje su značajne za pojedinu os. To će se odrediti na temelju relativnih modalnih masa. Čim je veća relativna modalna masa za pojedinu os to je veći značaj promatranja te osi za određeni mod.

Započet će se sa osi X uzduž koje značajna relativna modalna masa vibrira u sljedećim prirodnim frekvencijama:

- 2. prirodna frekvencija (1,9808 Hz),
- 4. prirodna frekvencija (94,216 Hz),
- 6. prirodna frekvencija (272,1 Hz),
- 8. prirodna frekvencija (624,8 Hz),
- 10. prirodna frekvencija (1055,7 Hz).



Slika 35. Signal snimljenih vibracija u frekvencijskoj domeni za os X



Na Slici 35. je signal snimljenih vibracija na zrakoplovu u frekvencijskoj domeni. Na Slici 35. su tri grafikona zbog toga što više frekvencije imaju vrlo malu vrijednost  $g$  pa kada bi cijeli spektar frekvencija bio prikazan na jednom grafikonu teško bi se raspoznale veličine. Na grafikonima su dodani vertikalni pravci koji označavaju prirodnu frekvenciju čija je vrijednost ispisana u legendi.

Na prvom grafikonu označene su vrijednosti vrhova koji predstavljaju intenzitet vibracija za određenu frekvenciju. Može se vidjeti kako akceleracije u vrhovima signala poprimaju vrijednosti reda veličine  $1 \cdot 10^{-2}g$ . Vrijednost akceleracije kod frekvencija bliskih prirodnoj frekvenciji iznosi  $0,77 \cdot 10^{-3}g$ . Dakle u ovom dijelu grafikona najviše vrijednosti akceleracije ne poklapaju se s prirodnom frekvencijom.

Vrlo visoke vrijednosti akceleracije kod vrlo malih frekvencija pripisuju se ubrzanju i usporavanju kod voženja zbog čega su frekvencije izuzetno niske odnosno periodi relativno dugi. Također na FFT dijagramu otklonjena je DC komponenta koja predstavlja srednju vrijednost akceleracije za sve frekvencije.

Drugi grafikon na Slici 35. prikazuje više frekvencije iste osi X. Akceleracija koja je izmjerena na frekvenciji 94,4 Hz što je vrlo blisko prirodnoj frekvenciji (94,216 Hz), iznosi  $2,941 \cdot 10^{-5}g$ . Ovom prirodnom frekvencijom ne poklapaju se značajne vibracije.

Treći grafikon na Slici 35. prikazuje vibraciju oko šeste prirodne frekvencije (272,1 Hz). Može se iščitati kako vibracije pridružene toj frekvenciji postižu vrijednosti od  $5 \cdot 10^{-6}g$  što se smatra nedovoljnim za značajno osciliranje podvozja.

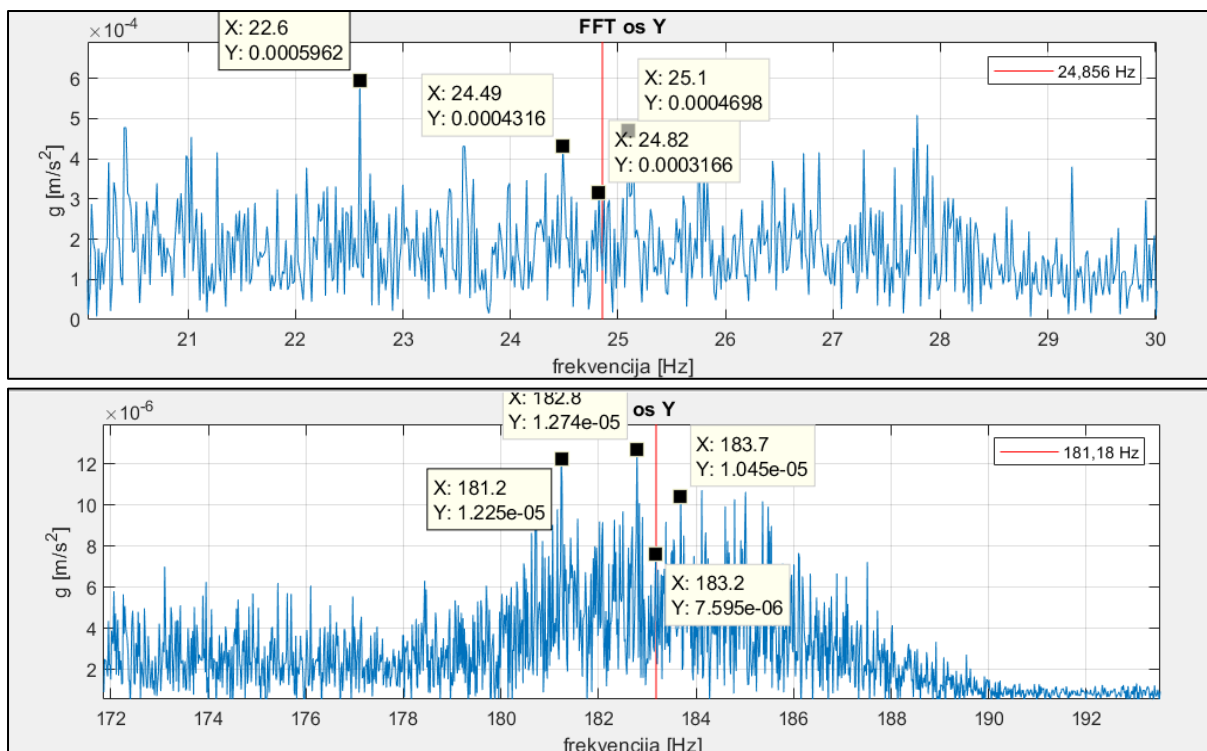
Više frekvencije imaju sve manji odziv odnosno osciliraju manjim akceleracijama zbog čega se više frekvencije neće dalje analizirati. Također vrlo je malo vjerojatno da će podvozje biti pobuđeno više od 300 Hz vožnjom po travnatoj površini.

Nastavit će se proces analize sa osi Y uzduž koje značajna relativna modalna masa vibrira u sljedećim prirodnim frekvencijama:

- 3. prirodna frekvencija (24,856 Hz),
- 5. prirodna frekvencija (183,18 Hz).

Na Slici 36. može se vidjeti snimljene vibracije u frekvencijskoj domeni za os Y. Prvi grafikon prikazuje područje oko treće prirodne frekvencije (24,856 Hz). Može se iščitati kako vibracije za frekvenciju koja je bliska prirodnoj iznose  $3 \cdot 10^{-4}g$ . U blizini nalaze se komponente također bliske prirodnoj frekvenciji koje imaju neznatno veće akceleracije, no istog reda veličine zbog čega se ovim vibracijama neće dati na važnosti.

Drugi grafikon Slike 36. prikazuje područje oko pete prirodne frekvencije (183,18 Hz). Akceleracije pri toj frekvenciji iznose  $7,6 \cdot 10^{-6}g$ . Iako vrlo mala akceleracija kod prirodne frekvencije primjetan je porast u rasponu od 6 Hz oko prirodne frekvencije.



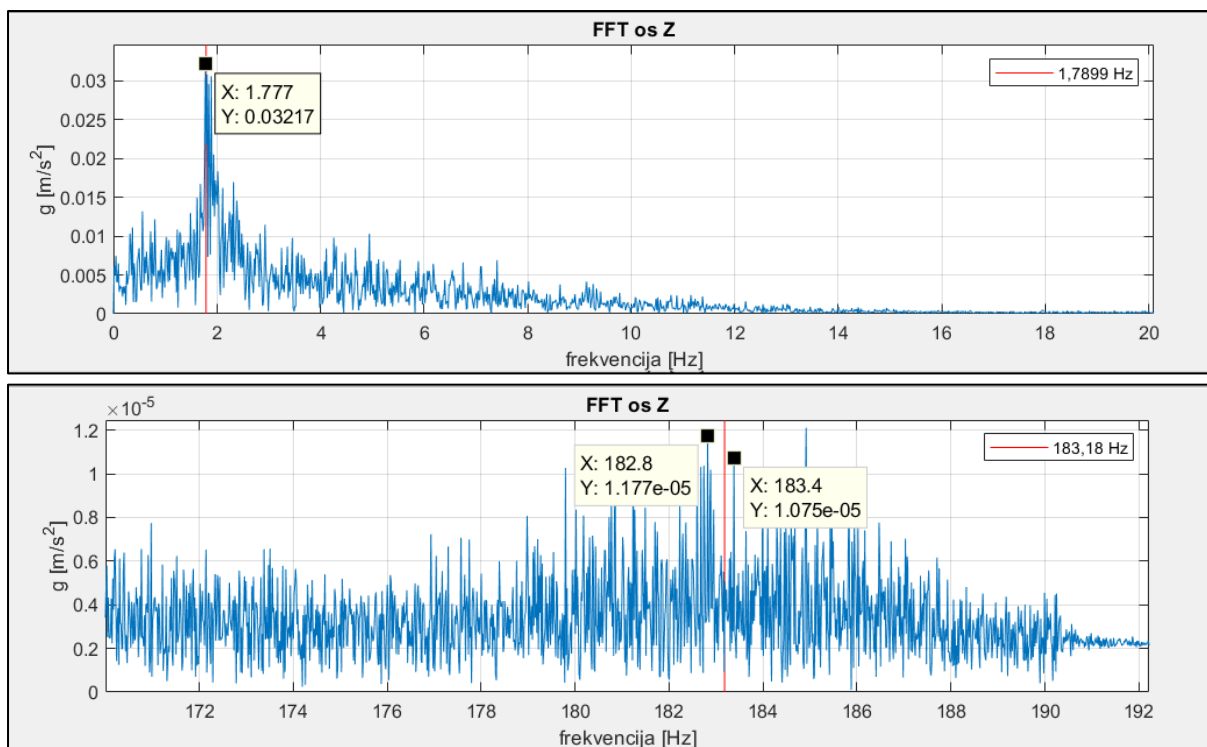
Slika 36. Signal snimljenih vibracija u frekvencijskoj domeni za os Y

Nastavit će se proces analize sa osi Z uzduž koje značajna relativna modalna masa vibrira u sljedećim prirodnim frekvencijama:

- 1. prirodna frekvencija(1,7899 Hz),
- 5. prirodna frekvencija(183,18 Hz).

Na Slici 37. može se vidjeti snimljene vibracije u frekvencijskoj domeni za os Z. Prva prirodna frekvencija (1.7899 Hz) iscrtana je crvenom bojom. Za razliku od ostalih osi i promatranih vibracija kod prve prirodne frekvencije za os Z vidi se značajna podudarnost vibracija snimljenih u eksploataciji i prirodne frekvencije. Prirodna frekvencija (1,7899 Hz) i najizraženiji vrh krivulje vibracija (1.777 Hz) gotovo se idealno pokapaju. Iznos akceleracije mjeren pri toj frekvenciji  $3,2 \cdot 10^{-2} g$ . Iznos je značajno veći od dosad promatranih vrijednosti zbog čega je potrebno dati na važnosti ovom prekalapnju.

Na drugom grafikonu Slike 37. vidi se područje oko pete prirodne frekvencije. Primjetno je povećanje akceleracija oko prirodne frekvencije no najveće akceleracije poprimaju vrijednosti od  $1,075 \cdot 10^{-5} g$  što je vrlo mala vrijednost u odnosu na akceleracije manjih frekvencija.



Slika 37. Signal snimljenih vibracija u frekvencijskoj domeni za os Z

Ovo poglavlje dalo je uvid u preklapanje prirodnih frekvencija i vibracija snimljenih u eksploataciji. Može se zaključiti da kod većine prirodnih frekvencija ne postoji preklapanje s značajnim vibracijama za osi X i Y. No, kod osi Z postoji preklapanje prve prirodne frekvencije s vibracijama koje imaju najjaču akceleraciju zabilježenu u snimanju za os Z. S obzirom na modalni oblik koji je pridružen prvoj prirodnoj frekvenciji očekivano je da će taj oblik biti najzastupljeniji kod osciliranja podvozja zbog vožnja po neravnoj podlozi.

S obzirom na analizirane podatke prva prirodna frekvencija i pridruženi modalni oblik imaju temelj za daljnje proučavanje. Za početak z obzirom na modalni oblik potrebno je obratiti posebnu pažnju u održavanju na glavno podvozje. Potrebno je potražiti mjesta savijanja strukture i utvrditi postoje li oštećenja. No, moguće je napraviti i daljnje analize gdje će se proučavati naprezanje materijala zbog vibracija te analizirati utjecaj istih na strukturu podvozja. Takva analiza neće biti provedena u okviru ovog rada.

## 8. Zaključak

Ovaj rad proučava vibracije podvozja lakog zrakoplova kroz izradu računalne modalne analize glavnog podvozja lakog zrakoplova C-172. U okviru rada napravljen je pregled osnovnih pojmova koji su potrebni za razumijevanje modalne analize. Nadalje, prezentiran je zrakoplov, njegove tehničko-eksploatacijske karakteristike te su detaljnije opisani dijelovi koji su važni za modalnu analizu. Razrađeni su i matematički postupci kojima je moguće napraviti modalnu analizu, kako bi se pokazalo koji rezultati će se dobiti računalnim modelima. Zatim je napravljen računalni model koji predstavlja stvarno podvozje kada je zrakoplov u fazi voženja te je na njemu provedena modalna analiza. Rezultati su pokazali prirodne frekvencije, modalne mase i modalne oblike modela glavnog podvozja. S obzirom na modalnu masu određene su prirodne frekvencije koje mogu imati veći značaj za proučavanje u eksploataciji zbog toga što imaju relativno veliku relativnu modalnu masu. Na modelu je napravljena i simulacija pobuđivanja modela slučajnim vibracijama kako bi se dobio odziv modela i usporedio sa snimanjima u eksploataciji. Cilj usporedbe je utvrđivanje reprezentativnosti modela u odnosu na stvarno podvozje u eksploataciji. Podudaranjem pojedinih komponenti spomenutih odziva u frekvencijskoj domeni utvrđeno je da model dobro predstavlja stvarno glavno podvozje. Zatim je odziv sustava koji je snimljen u eksploataciji (prikazan u frekvencijskoj domeni) uspoređen s prirodnim frekvencijama. Većina prirodnih frekvencija nije pokazala podudaranje. No, prva prirodna frekvencija koja ima visoku relativnu modalnu masu točno se podudara s frekvencijom koja kod snimanja u eksploataciji ima značajan intenzitet. Ta činjenica je temelj za daljnje razmatranje spomenutog podudaranja. Također, s obzirom da je poznat modalni oblik pri prvoj prirodnoj frekvenciji rezultati ove modalne analize mogu poslužiti u sustavu održavanja za lakši pronalazak eventualnih oštećenja koje se događaju pri vibriranju glavnog podvozja u voženju.

## Literatura

- [1] Harish A. *Simscale Blog*. Preuzeto s: <https://www.simscale.com/blog/2016/12/what-is-modal-analysis/> [Pristupljeno 20.06.2022.]
- [2] Cyprien, *FEA for all*. Preuzeto s: <https://feaforall.com/what-modal-analysis-fea-basics/>. [Pristupljeno 30. 06. 2021.]
- [3] Elmer P. *Perkinselmer* Preuzeto s: [https://www.perkinelmer.com/CMSResources/Images/44-74546GDE\\_IntroductionToDMA.pdf](https://www.perkinelmer.com/CMSResources/Images/44-74546GDE_IntroductionToDMA.pdf). [Pristupljeno 30. 06. 2021.]
- [4] Juretić F. *Mjerenje i analiza vibracija zrakoplova s klipnim motorom*. Završni rad. Sveučilište u Zagrebu: Fakultet prometnih znanosti; 2019.
- [5] C. P. Solutions, *Cadence* Preuzeto s: <https://resources.pcb.cadence.com/blog/2020-natural-frequency-formula-what-is-it-and-why-is-it-important>. [Pristupljeno 30. 06. 2021.]
- [6] F. A. Saad. *Shutterstock* Preuzeto s: <https://www.shutterstock.com/es/image-vector/simple-harmonic-oscillator-1328615783>. [Pristupljeno 30. 06. 2021.]
- [7] Cheever E. *Ipsa*. Preuzeto s: <https://ipsa.swarthmore.edu/Transient/TransInputs/TransStep.html>. [Pristupljeno 02. 07. 2021.]
- [8] Crystal Instruments, *Crystal Instruments* Preuzeto s: <https://www.crystalinstruments.com/basics-of-modal-testing-and-analysis>. [Pristupljeno: 03. 07. 2021.]
- [9] Irvine T. *VibrationData*. Preuzeto s: <http://www.vibrationdata.com/tutorials2/ModalMass.pdf>. [Pristupljeno 03. 07. 2021.]
- [10] Visser G. *Simteq* Preuzeto s: [https://simteq.co.za/wp-content/uploads/2017/11/modal-analysis\\_gerritvisser.pdf](https://simteq.co.za/wp-content/uploads/2017/11/modal-analysis_gerritvisser.pdf). [Pristupljeno 05. 07. 2021.]
- [11] Zhao J. *Crystal Instruments* Preuzeto s: <https://www.crystalinstruments.com/blog/2017/8/28/experimental-modal-analysis-overview>. [Pristupljeno 05. 07. 2021.]
- [12] Richardson M. H. *Vibetech* Preuzeto s: <http://papers.vibetech.com/Paper10-IsItAModeShapeOrODS.pdf>. [Pristupljeno 05. 07. 2021.]
- [13] *Textron aviation* Preuzet s: <https://cessna.txtav.com/en>. [Pristupljeno 05. 07. 2021.]
- [14] Cessna Aircraft Company. *Pilot's operating handbook Cessna Skyhawk*, Wichita, Kansas, SAD. 1977.

- [15] Lycoming. *IO360L2A Series Illustrated Parts Catalog*, Preuzeto s: <https://www.lycoming.com/sites/default/files/IO-360-L2A%20Parts%20Catalog%20PC-406-L2A.pdf>. [Pristupljeno 10. 07. 2019.]
- [16] Hartog D. *Vibracije u mašinstvu*, New York, London, Toronto: McGraw Hill Book Company; 1956.
- [17] Stegić M. *Teorija vibracija linearnih diskretnih mehaničkih sustava*, Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje; 2012.
- [18] Rao S. *Mechanical Vibrations 6th Global Edition*, Pearson; 2017.
- [19] Baličević V, Bokšić M. *Model samostabilizirajućeg vozila na jednom kotaču*. Zagreb: Fakultet elektrotehnike i računarstva 2011. Preuzeto s: <https://apps.unizg.hr/ректорова-nagrada/javno/stari-radovi/1171/preuzmi> [Pristupljeno: 15.08.2022.]
- [20] Antunović Ž. *Klasična mehanika* Preuzeto s: [https://mapmf.pmfst.unist.hr/~zeljko/TEORIJSKA\\_MEHANIKA.pdf](https://mapmf.pmfst.unist.hr/~zeljko/TEORIJSKA_MEHANIKA.pdf). [Pristupljeno: 15.08.2022.]
- [21] *Hrvatska enciklopedija* Preuzeto s: <https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=49737>. [Pristupljeno 25. 07. 2022.]
- [22] Lengovarsky P. *SciMechanicalEngineering* Preuzeto s: <http://article.scimechanicalengineering.com/pdf/ajme-1-7-4.pdf>. [Pristupljeno: 05. 07. 2021.]
- [23] Scia Engineer, *Scia Engineer* Preuzeto s: [https://help.scia.net/17.0/en/sr/dynamic\\_analysis\\_troubleshooting/modal\\_mass\\_definition.htm](https://help.scia.net/17.0/en/sr/dynamic_analysis_troubleshooting/modal_mass_definition.htm). [Pristupljeno: 06. 07. 2021.]
- [24] *Ansys for Students* Preuzeto s: <https://www.ansys.com/academic/students>.
- [25] *Simscale* Preuzeto s: <https://www.simscale.com/docs/simwiki/fea-finite-element-analysis/what-is-fea-finite-element-analysis/>. [Pristupljeno: 26. 07. 2022.]
- [26] *Physics Catalyst* Preuzeto s: [https://physicscatalyst.com/mech/elasticity\\_2.php](https://physicscatalyst.com/mech/elasticity_2.php). [Pristupljeno: 27. 07. 2022.]
- [27] Goodyear, *Aps - aviation* Preuzeto s: <https://www.aps-aviation.com/wp-content/uploads/goodyear-aircraft-tire-data.pdf>. [Pristupljeno 26. 07. 2022.]
- [28] *Groveaircraft* Preuzeto s: <https://www.groveaircraft.com/60-1.html>. [Pristupljeno: 28. 07. 2022.]
- [29] Matijević D. *Fourierov red i Fourierova transformacija* Preuzeto s: <https://hrcak.srce.hr/file/121546>. [Pristupljeno: 28. 07. 2022.]

- [30] *Cygnus Research International* Preuzeto s: <https://www.cygres.com/OcnPageE/Glosry/SpecE.html>. [Pristupljeno: 29. 07. 2022.]
- [31] Hirvonen V. *Profound Physics* Preuzeto s: <https://profoundphysics.com/generalized-coordinates/>. [Pristupljeno: 25. 07. 2022.].

## Popis slika

Slika 1. Primjer odziva sustava na pobudu, [4].....	4
Slika 2. Harmonički oscilator, [6] .....	5
Slika 3. Primjer odziva za različite faktore prigušenja, [7] .....	7
Slika 4. Primjeri oblika moda, [8] .....	8
Slika 5. Izgled motora IO-360 L2A, [15] .....	16
Slika 6. Prikaz komponenti glavnog podvozja, [15] .....	17
Slika 7. Prednji dio podvozja, [15].....	19
Slika 8. Pojednostavljeni model podvozja, [18].....	21
Slika 9. Primjer modela koji se sastoji od n tijela, [18].....	22
Slika 10. Model slobodnog tijela, [18] .....	22
Slika 11. Slikovni prikaz dinamičkog sustava, [16].....	28
Slika 12. Skica jedne noge glavnog podvozja.....	31
Slika 13. Model podvozja u SpaceClaim-u .....	32
Slika 14. Shema projekta modalne analize .....	35
Slika 15. Pripadna svojstva čelika korištenog za analizu .....	35
Slika 16. Postavke modela u Ansys Mechanical.....	37
Slika 17. Razlika u gustoći mreže .....	38
Slika 18. Smještaj čvrstih i elastičnog oslonca .....	39
Slika 19. Simulacija prvog modalnog oblika (1.7899 Hz) i stupčasti dijagram relativnih modalnih masa za translacije i rotacije masa za sve osi.....	42
Slika 20. Simulacija drugog modalnog oblika (1,9808 Hz) i stupčasti dijagram relativnih modalnih masa za translacije i rotacije masa za sve osi.....	43
Slika 21. Simulacija trećeg modalnog oblika (24,856 Hz) i stupčasti dijagram relativnih modalnih masa za translacije i rotacije masa za sve osi.....	44
Slika 22. Simulacija četvrtog modalnog oblika (94,216 Hz) i stupčasti dijagram relativnih modalnih masa za translacije i rotacije masa za sve osi.....	45
Slika 23. Simulacija petog modalnog oblika (183,18 Hz) i stupčasti dijagram relativnih modalnih masa za translacije i rotacije masa za sve osi.....	46
Slika 24. Simulacija šestog modalnog oblika (272,1 Hz) i stupčasti dijagram relativnih modalnih masa za translacije i rotacije masa za sve osi.....	46
Slika 25. Simulacija sedmog modalnog oblika (572,93Hz) i stupčasti dijagram relativnih modalnih masa za translacije i rotacije masa za sve osi.....	47
Slika 26. Simulacija osmog modalnog oblika (624,8 Hz) i stupčasti dijagram relativnih modalnih masa za translacije i rotacije masa za sve osi.....	47
Slika 27. Simulacija devetog modalnog oblika (683,67 Hz) i stupčasti dijagram relativnih modalnih masa za translacije i rotacije masa za sve osi.....	48
Slika 28. Simulacija desetog modalnog oblika (1055,7 Hz) i stupčasti dijagram relativnih modalnih masa za translacije i rotacije masa za sve osi.....	49
Slika 29. Prikaz snimljenih vibracija u letu [4].....	51
Slika 30. Podaci snimanja vibracija u voženju po travi za osi X, Y, Z .....	52
Slika 31. Shematski prikaz analize .....	53
Slika 32. Pobuda modela .....	54



Slika 33. Odziv računalnog modela podvozja na slučajnu pobudu.....	54
Slika 34. PSD odziv podvozja u eksploataciji .....	55
Slika 35. Signal snimljenih vibracija u frekvencijskoj domeni za os X.....	57
Slika 36. Signal snimljenih vibracija u frekvencijskoj domeni za os Y.....	59
Slika 37. Signal snimljenih vibracija u frekvencijskoj domeni za os Z .....	60

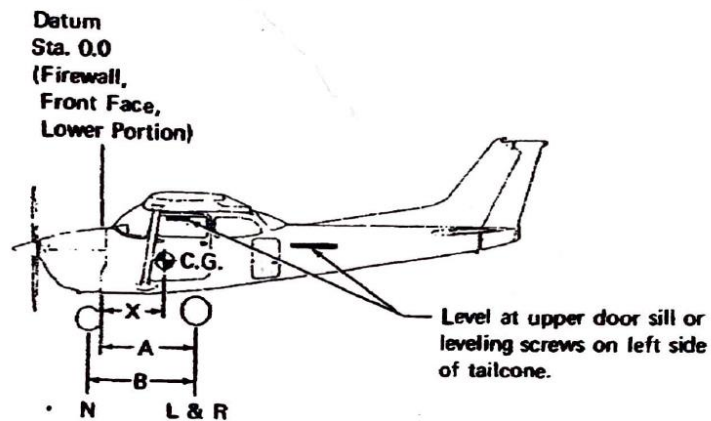
## Popis tablica

Tablica 1. Tehničko eksploatacijske karakteristike zrakoplova C-172, [14].....	14
Tablica 2. Frekvencije prvih 10 modalnih modova.....	40
Tablica 3. Faktori modalne mase za pojedine modove .....	41
Tablica 4. Relativne modalne mase za pojedine modove.....	41

Prilog 1.

<b>Maintenance work cards Cessna model 172</b>	Annex
	<b>CARD A.3</b>

Zrakoplov :	Cessna 172N	Vaga : Intercomp s AC II Weighting System
reg.oz.:	9A- DMB	P/N 100407 , S/N 0614M306070
s/n:	17269959	Calibration Due:.. 01.04.2017



Položaj vage	Očitavanje vage	Tara	Netto (kg)	Udaljenost (m)	Moment (kgm)
Lijevi glavni kotač (L)	295	0	295	A= 1,48	436,6
Desni glavni kotač (D)	295,5	0	295,5		437,34
Nosni kotač (N)	206,5	0	206,5	A-B = - 0,175	-36,1375
Ukupna izmjerena težina: TMW =N+R+L = 797 kg				UM=A x D+A x L- (A-B) x N = 837,883 kgm	

Gorivo: 38 Gal – Unusable fuel (3 gal) = 35 gal 35 gal x 3,74= 130,9 lit	Masa goriva	Udaljenost od referentne linije do CG rezervoara goriva	Moment goriva
Usable fuel (130,9 lit ) x spec fuel gravity (cca 0,720) 130,9 lit x 0,724	94,77 kg	1,22m (48.3 Inch)	115,620 kgm
BEW = Measured weight – Fuel weight =	702,23 kg	Total Moment = UM - Fuel Moment	722,27 kgm
Basic Empty weight	Osnovna Težina praznog aviona BEW=702,23 kg = 1560,51 lbs	CG Arm= BEW / Total moment CG arm= 1,0285 m or 40,49 inch	

Signature of Authorized Person:

Date: 28.11.2016.

W/O: DMB161101

P/N: 01212-1	Issue: 2 Revision:0 Date: August 19, 2012	Page 1
--------------	---	--------

Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet prometnih znanosti  
Vukelićeva 4, 10000 Zagreb

## IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI I SUGLASNOSTI

Izjavljujem i svojim potpisom potvrđujem da je \_\_\_\_\_ Diplomski rad \_\_\_\_\_  
(vrsta rada)

isključivo rezultat mojega vlastitog rada koji se temelji na mojim istraživanjima i oslanja se na objavljenu literaturu, a što pokazuju upotrijebljene bilješke i bibliografija. Izjavljujem da nijedan dio rada nije napisan na nedopušten način, odnosno da je prepisan iz necitiranog rada te da nijedan dio rada ne krši bilo čija autorska prava. Izjavljujem, također, da nijedan dio rada nije iskorišten za bilo koji drugi rad u bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili obrazovnoj ustanovi.

Svojim potpisom potvrđujem i dajem suglasnost za javnu objavu završnog/diplomskog rada pod naslovom \_\_\_\_\_ Modalna analiza podvozja lakog zrakoplova \_\_\_\_\_, u Nacionalni repozitorij završnih i diplomskih radova ZIR.

Student/ica:

U Zagrebu, \_\_\_\_\_ 15.09.2022. \_\_\_\_\_

Fabijan Juretić Fabijan Juretić  
(ime i prezime, potpis)