

Primjena heurističkih metoda u procesu određivanja ruta

Brebrić, Luka

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Transport and Traffic Sciences / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:119:036108>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-11-19**



Repository / Repozitorij:

[Faculty of Transport and Traffic Sciences -
Institutional Repository](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET PROMETNIH ZNANOSTI

Luka Brebrić

**PRIMJENA HEURISTIČKIH METODA U PROCESU ODREĐIVANJA
RUTA**

DIPLOMSKI RAD

Zagreb, 2019.

Zagreb, 3. travnja 2019.

Zavod: **Zavod za transportnu logistiku**
Predmet: **Prijevozna logistika II**

DIPLOMSKI ZADATAK br. 5229

Pristupnik: **Luka Brebrić (0135237312)**
Studij: **Inteligentni transportni sustavi i logistika**
Smjer: **Logistika**

Zadatak: **Primjena heurističkih metoda u procesu određivanja ruta**

Opis zadatka:

U radu će se objasniti ciljevi i svrha prijevozne logistike- Prikazati će se elementi transportne mreže te određivanje ruta primjenom heurističkim metoda.

Mentor:

Predsjednik povjerenstva za
diplomski ispit:

izv. prof. dr. sc. Jasmina Pašagić Škrinjar

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet prometnih znanosti

DIPLOMSKI RAD

**PRIMJENA HEURISTIČKIH METODA U PROCESU ODREĐIVANJA
RUTA**

**APPLICATION OF HEURISTIC METHODS IN THE PROCESS OF
DETERMINING ROUTES**

Mentor: prof. dr. sc. Jasmina Pašagić Škrinjar

Student: Luka Brebrić

JMBAG: 0135237312

Zagreb, rujan 2019.

SAŽETAK

Transportna mreža sastoji se od međusobno povezanih transportnih čvorova, prometnica, koridora, ruta i linija te predstavlja kompleksan sustav što dovodi do raznih problema. Svakim danom sve više rastu očekivanja korisnika koji želi kvalitetnu, brzu i povoljnu uslugu te zbog toga, glavni cilj svake tvrtke je potpuno zadovoljiti zahtjevima korisnika. Cilj je da proizvod bude dostupan korisniku u pravo vrijeme, na pravom mjestu uz što niže troškove, a to se može postići pravilnom organizacijom prijevoza. U ovom radu provodi se određivanje, odnosno projektiranje ruta upotrebom heurističkih metoda. Heurističke metode koje će se koristiti u ovom radu su: *Clark-Wright-ov algoritam ušteda*, *Clark-Wright-ov algoritam ušteda kod metode s indikatorom T*, *Heuristika najbližeg susjeda* i *Christofides-ov algoritam*. Prikazani su i objašnjeni konkretni postupci navedenih metoda te na kraju rezultati određivanja ruta prijevoza.

KLJUČNE RIJEČI: Prijevozna logistika; transportna mreža; određivanje ruta; heurističke metode

SUMMARY

Transport network consists of interconnected transport nodes, roads, corridors, routes and lines and represents a complex system leading to various problems. Every day, the expectations are growing by users who want a quality, fast and convenient service, and therefore, the main goal of each company is to fully meet customer requirements. The goal is to make the product available to the user at the right time, in the right place with the lowest possible cost and this can be achieved by a proper transport organization. This paper describes determination, i.e., planning routes using heuristic methods. The heuristic methods to be used in this paper are: Clark-Wright's algorithm of savings, Clark-Wright's algorithm of savings in T-method, Heuristics closest neighbors, and Christofides algorithm. The procedures of these methods are explained and the results of the determining routes are shown at the end.

KEY WORDS: Transport Logistics; transport network; routing; heuristic methods

Sadržaj

1. UVOD	1
2. CILJEVI I SVRHA PRIJEVOZNE LOGISTIKE.....	3
3. ELEMENTI TRANSPORTNE MREŽE.....	6
4. ODREĐIVANJE RUTA PRIMJENOM HEURISTIČKIH METODA.....	13
4.1. Rute na području Slavonije.....	13
4.1.1. Ruta broj 1	13
4.1.2. Ruta broj 2	24
4.1.3. Ruta broj 3	29
4.1.4. Ruta broj 4.....	34
4.2. Rute na području Istre.....	38
4.2.1. Ruta broj 1	38
4.2.2. Ruta broj 2	43
4.2.3. Ruta broj 3.....	48
4.3. Rute na području Sjeverne Hrvatske	52
4.3.1. Ruta broj 1	52
4.3.2. Ruta broj 2.....	58
4.3.3. Ruta broj 3.....	64
4.3.4. Ruta broj 4.....	68
5. ANALIZA REZULTATA ISTRAŽIVANJA	74
6. ZAKLJUČAK	77
LITERATURA.....	78
POPIS SLIKA	80
POPIS TABLICA.....	81
POPIS GRAFIKONA	85

1. UVOD

Logistika je proces strateškog upravljanja nabavom, kretanjem i skladištenjem materijala, dijelova i gotovog inventara (i povezanih informacijskih tokova) kroz organizaciju i njene marketinške kanale na takav način da se sadašnja i buduća profitabilnost maksimizira kroz isplativo ispunjenje reda. Cilj joj je ispunjenje zahtjeva kupaca ili korisnika uz najmanje troškove. Obuhvaća proces planiranja, implementiranja te kontrole toka robe, informacija i financijskih sredstava pri dopremi robe do krajnjih korisnika.

U radu će se koristiti heurističke metode s kojima će se pokušati približiti optimalnom planu ruta u svrhu određivanja prijevoza. Metode se temelje na problemu trgovačkog putnika, što znači da je cilj krenuti iz početne točke, obići sve lokacije samo jednom i na kraju vratiti se u početnu točku, uz što kraći put.

Svrha istraživanja je analizirati različite načine optimizacija ruta te pronaći optimalno rješenje, odnosno metodu po kojoj se mogu minimizirati transportni troškovi. S obzirom da skraćanjem puta koji vozila moraju proći, trošak transporta pada, a budući da je direktno vezan za trošak distribucije, može se reći da smanjenjem ukupnih prijeđenih kilometara dolazi do smanjenja ukupnih troškova poslovanja. Cilj istraživanja je prikazati efikasnost korištenja heurističkih metoda.

Diplomski rad podijeljen je u šest cjelina:

1. Uvod
2. Ciljevi i svrha prijevozne logistike
3. Elementi transportne mreže
4. Određivanje ruta primjenom heurističkih metoda
5. Analiza rezultata istraživanja
6. Zaključak

U drugom poglavlju definirana je prijevozna logistika te su navedeni i objašnjeni njezini ciljevi. Također spomenuta je i svrha prijevozne logistike.

U trećem poglavlju objašnjena je i prikazana transportna mreža sa svojim glavnim elementima koji ju opisuju. Uz elemente transportne mreže, navedeni su i problemi koji se javljaju te koje je potrebno optimizirati kako bi transportna mreža bila što kvalitetnija i kako bi se povećala njena iskoristivost.

U četvrtom poglavlju prikazani su izračuni određivanja ruta primjenom heurističkih metoda. Heurističke metode koje se koriste u ovom radu su: *Clark-Wright-ov algoritam ušteda*, *Clark-Wright-ov algoritam ušteda kod metode s indikatorom T*, *Heuristika najbližeg susjeda* i *Christofides-ov algoritam* u računskom i grafičkom obliku.

U petom poglavlju su prikazani i analizirani rezultati određivanja ruta primjenom navedenih heurističkih metoda, odnosno uspoređeni su izračuni svih ruta i odabrano je optimalno rješenje.

Šesto, posljednje poglavlje je zaključak o procesu određivanja ruta te osvrt o svim navedenim poglavljima.

2. CILJEVI I SVRHA PRIJEVOZNE LOGISTIKE

Transportna logistika koja je ujedno i grana opće logistike može se definirati kao prijevoz, odnosno prijenos stvari, ljudi i informacija s jednog na drugo mjesto i predstavlja ključni element u lancu snabdijevanja. Vrlo je ovisna o mjestu i mora imati dobar odnos između zemalja jer olakšava rješavanje prepreka koje proizlaze iz samog prometa. [1]

Transportna logistika je znanstvena disciplina i stručna djelatnost koja se bavi organizacijom i optimizacijom prijevoza robe i ljudi [2]. Prijevozna logistika obuhvaća planiranje, upravljanje i nadzor nad svim fizičkim procesima premještanja robe (putnika) i svim logičkim procesima koji se odnose na tok informacija od izvorišta (proizvodnja) do odredišta (krajnji korisnik). Omogućuje pokretanje proizvodnih procesa, otpremu gotovih proizvoda, povrat proizvoda. Djelovanje transportne logistike, s pomoću odgovarajućih elemenata, proizvodi transportno logističku uslugu i omogućuje obavljanje transportnih aktivnosti. [3]

Prijevozna logistika kao segment opskrbnog lanca omogućuje pozitivne efekte izmijenjenim oblicima suradnje proizvodnih i trgovačkih gospodarskih subjekata u cilju udovoljenja stalnim težnjama za smanjenjem cijena, troškova i marži.

Služi odabiranju odgovarajuće vrste prometa (cestovni, željeznički, zračni, pomorski ili riječni), pripremi prijevozne dokumentacije, dogovaranju termina prijevoza i dr. [2]

Pojam opće ili univerzalne prometne logistike obuhvaća aktivnosti prema [4]:

- pakiranje
- signiranje (obilježavanje)
- ukrcaj
- iskrcaj
- prekrcaj
- premještanje
- skladištenje
- punjenje i pražnjenje kontejnera
- prijevoz
- otprema, doprema

Svrha prijevozne logistike kao cjeline je poboljšanje protoka supstrata i informacija kroz sustav, tako da se međusobnom koordinacijom elemenata sustava težnje za ostvarenjem ciljeva pojedinih podsustava svedu na minimalnu razinu. U cilju boljeg zadovoljenja želja krajnjeg korisnika (kupca) i smanjenja troškova procesa, potrebno je prostorno i vremenski približiti proizvodnju i potrošnju, uz minimalne troškove, odnosno upravljanje robnim tokovima uzduž cijelog opskrbnog lanca.

Opširnije, svrha sustava prijevozne logistike je kroz funkcije prijevozne logistike kao što su prijevozna funkcija, skladišna funkcija i funkcija držanja zaliha, ostvariti ciljeve prijevozne logistike.

Cilj joj je ispunjenje zahtjeva kupaca ili korisnika uz najmanje troškove. Obuhvaća proces planiranja, implementiranja te kontrole toka robe, informacija i financijskih sredstava pri dopremi robe do krajnjih korisnika. [2]

Postoje razni ciljevi prijevozne logistike, a najlakše se mogu objasniti kroz oblik prema [3]:

- izjednačavanje prostora, odnosno mjesto proizvodnje i mjesto potrošnje robe koji su u pravilu dislocirani i stoga im je potrebno prostorno izjednačavanje.
- izjednačavanje vremena jer je vrijeme postavljanja zahtjeva za robom (potražnja) različito od vremena završetka proizvodnje (ponude), stoga kroz skladišnu funkciju
- izjednačavanje količine, naime količina robe pri ekonomičnoj proizvodnji ili ponudi u pravilu je različita od tražene količine robe ili potražnje te je stoga potrebno količinsko izjednačavanje
- izjednačavanje asortimana, budući da se proizvodnja raznolikog asortimana robe provodi na različitim lokacijama, ali se cjelokupni asortiman čuva na određenoj lokaciji ili se određeni kupac opskrbljuje kroz nekoliko distribucijskih vožnji gdje je usklađenost transportnih ruta izuzetno bitna, stoga se koristi skladišna i/ili prijevozna funkcija.

Prijevozna logistika stoga obuhvaća planiranje, upravljanje i nadzor na svim fizičkim procesima premještanja robe od izvorišta A do odredišta B.

Operativni ciljevi prijevozne logistike određeni su zahtjevima tržišta koje utječe na promjene i poboljšanje razine kvalitete logističkih usluga, a odnosi se prema [5] na:

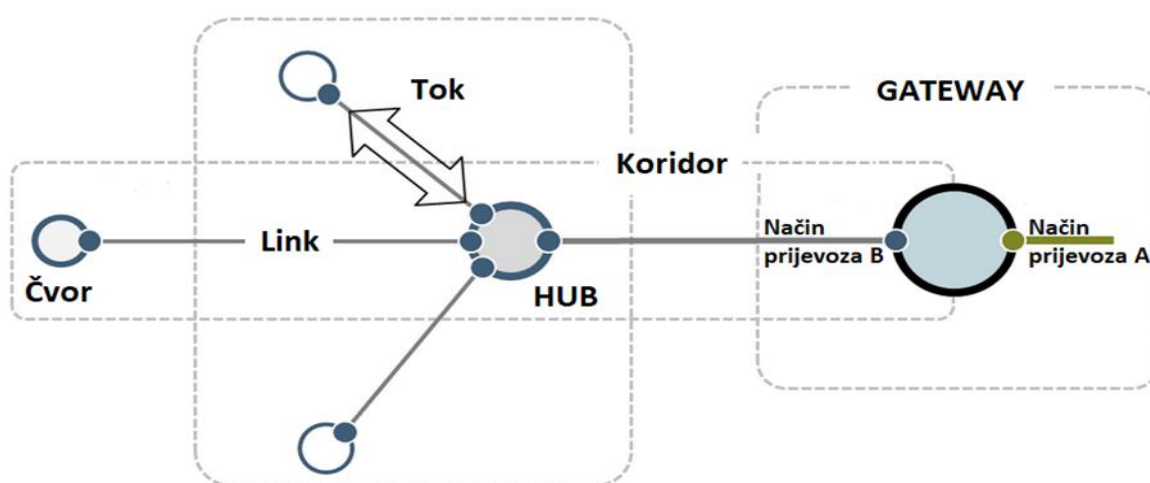
- povećanje brzine transporta,
- smanjenje vremena isporuke,
- povećanje točnosti isporuke,
- povećanje sigurnosti robe i drugo, uz stalno prisutno zahtijevanje o minimalizaciji logističkih troškova.

Glavni cilj prijevozne logistike, odnosno distribucijske logistike, je zajedno s ostalim sudionicima logističkog procesa, krajnjem potrošaču omogućiti sustav odnosno koncept koji najviše odgovara njegovim potrebama, kao što su „pravi proizvod na pravome mjestu u pravo vrijeme“, „od vrata do vrata“, povratna logistika i slično [6]. Zajedno ti sustavi pokrivaju procese od dobave potrebnih sirovina proizvođaču do trenutka kada krajnji korisnik konzumira proizvod odnosno uslugu.

3. ELEMENTI TRANSPORTNE MREŽE

Transportna mreža se može definirati kao sustav međusobno povezanih i interesno povezanih transportnih čvorišta, prometnica, koridora, ruta, linija, transportnih lanaca koji omogućuju brze, sigurne i racionalne procese proizvodnje transportnih proizvoda. [7] Svrha transportnih mreža je transport određene robe, materijala ili putnika s jednog mjesta na drugo.

Glavni elementi koji opisuju prometnu mrežu su: čvor, link, tok, Gateway, HUB i koridor (Slika1.).



Slika 1. Elementi transportne mreže

Izvor: https://transportgeography.org/?page_id=643

Transportni čvor

Čvorovi su mrežni elementi u kojima se: koncentriraju, propuštaju i usmjeravaju, križaju, slijevaju ili odlijevaju prometni tokovi vozila (vlakova, zrakoplova, brodova, informacija, podatkovnih paketa), obavlja naplata karata, skladištenje, informiranje korisnika itd. Predstavlja svako mjesto koje ima pristup transportnoj mreži. [8]

Transportni čvor je interakcija nekoliko komponenti koje služe za kretanje putovanja, susjedstva, tereta i putnika te uređenje transportnih postupaka. Čvorove na mreži predstavlja infrastruktura poput: distribucijskih centara, skladišta, terminala i drugo.

Karakteristike transportnih čvorova:

- Povezivanje kontinuiranog postupka svih načina prijevoza, uz povoljno i potpuno ispunjenje potreba gospodarstva i stanovništva
- Suradnja različitih metoda prijevoza, sortiranja, slaganja i pražnjenja tereta itd.

Linkovi

Međusobno povezuju čvorove u prometnoj mreži i služe za fizički transport bez dodatnih usluga. Primjeri linkova/grana: ulice, ceste, plovni putovi, zračni putovi, željezničke pruge

Tok

Količina prometa koja kruži na vezi između dva čvora i količine prometa koji prolazi kroz čvor.

Gateway

Predstavlja vezu između dva sustava ili čini povezanost između raznovrsnih sustava, odnosno predstavlja vrata, tj. prolaz (eng. Gateway) određenog sustava. Mogu predstavljati vezu ili prolaz između različitih vidova transporta

HUB

Čvor koji upravlja znatnom količinom prometa i povezuje elemente iste prometne mreže ili različite mreže (npr. Regionalne i međunarodne). Naziv za glavni čvor, odnosno mjesto za najveće koncentracije ulaznih i izlaznih tokova i najšire ponude logističkih usluga. Svojom nazivom asocira na prometno središte koje povezuje sve radijalno raspoređene manje centre, koji su najčešće povezani istim transportnim podsustavom.

Koridori

Slijed čvorova i veza koji podržavaju modalni protok putnika ili tereta. Oni su općenito koncentrirani duž komunikacijske osi, imaju linearnu orijentaciju i spojeni na Gateway. [8]

Transportne mreže se sastoje od transportnih puteva i čvorova u kojima transportni putevi počinju i završavaju. Iz tog razloga transportnu mrežu je moguće preslikati u grafove u kojima su transportni putevi, odnosno prometnice, bridovi grafa, dok su čvorišta lokacije koje je potrebno obići. Na taj način je moguće stvoriti matematičke modele koji mogu kvantitativno prikazati složene dinamičke odnose u prometu.

Transportna mreža predstavlja kompleksan sustav, pa stoga nije iznenađujuće što na njoj dolazi do raznih problema. Problema koje je potrebno optimizirati kako bi transportna mreža bila što kvalitetnija, te kako bi se povećala njena iskoristivost. Posvećenost ovim problemima je izrazito velika, te je razvojem logistike i računalnih tehnologija postala još veća. Stoga se danas u optimiziranju problema nastalih na transportnoj mreži primjenjuju razne matematičke metode i programski alati, koji će biti detaljnije definirani u sljedećim poglavljima ovoga rada. Neki od problema koji nastaju na transportnoj mreži su sljedeći [9]

- Transportni problem
- Problem najkraćeg puta
- Problem trgovačkog putnika
- Problem usmjeravanja vozila
- Lokacijski problemi

Transportni problem

Na transportnoj mreži rješavanjem transportnog problema dobije se optimalan način odvijanja transporta između većeg broja centara za opskrbu i centara potražnje. Centar opskrbe ima svoj vlastiti kapacitet, primjerice može biti određen distributer. Centar potražnje ima razinu potražnje, a može biti krajnji korisnik, odnosno krajnji kupac. Transportni putovi između navedenih centara (čvorišta), imaju različite jedinične cijene transporta te se rješavanjem ovoga problema želi postići odabir što kvalitetnijeg rješenja za transport između čvorova. [10]

Kako bi se postiglo optimalno rješenje problema, moraju se zadovoljiti sljedeća dva uvjeta. Prvi uvjet je da potražnja na mreži mora biti zadovoljena, a drugi uvjet je da se to učini uz minimalne transportne troškove.

Kod određivanja optimalnog rješenja transportnog problema bez primjene programskih alata, prvo se mora pronaći početno rješenje pomoću metoda: Metoda sjeverozapadnog kuta, Metoda najmanjeg troška, Vogelova aproksimativna metoda. Zatim se određuje optimalno rješenje primjenom metoda relativnih troškova ili metode skakanja s kamena na kamen.

Transportni problem uz primjenu u transportu između dva čvora, primjenjuje se i u slučaju lokacije višestrukih kapaciteta. Lokacija višestrukih kapaciteta predstavlja problem traženja najpovoljnijih lokacija za veći broj centara različitog kapaciteta, koje se mogu smjestiti na veći broj lokacija. Kao i kod slučaja kod transporta između čvorova, traži se rješenje koje će dati najmanje transportne troškove. Problem se rješava tako da se za svaku moguću kombinaciju smještaja čvora na skupinu mogućih lokacija riješi odgovarajući transportni problem, čime se za svaku takvu kombinaciju dobije optimalno rješenje transporta za koje je vrijednost ukupnih transportnih troškova minimalna. [11]

Usporedbom optimalnih rješenja različitih kombinacija smještaja centara na skupinu mogućih lokacija dobije se lokacija koja je najpovoljnija s obzirom na transportne troškove.

Problem najkraćeg puta

Problem najkraćeg puta predstavlja jedan od osnovnih i najčešćih problema koji se susreću pri istraživanju transportne mreže, također čest je problem i u telekomunikacijskim mrežama [12]. Do problema najkraćeg puta dolazi kada je potrebno utvrditi najkraći, najjeftiniji ili najpouzdaniji put između jednog ili više čvorova na transportnoj mreži. Također, algoritmi za rješavanje velikog broja optimizacijskih problema kao što su usmjeravanje vozila i dizajn mreže, često koriste velik broj problema najkraćih putova kako bi došli do rješenja. Razvoj algoritama za problem najkraćeg puta predstavlja jedno od glavnih područja istraživanja u domeni optimizacije transportne mreže.

Problem najkraćeg puta se može najjednostavnije prikazati ako se zamisli neka mreža G , koja se sastoji od m čvorova i n lukova i troška $S_{i,j}$ koji je povezan sa svakim lukom (i, j) na mreži G . Put je definiran kao zbroj lukova, a udaljenost puta kao zbroj duljine svakog luka. Problem najkraćeg puta se bavi pronalaženjem puta s najkraćom udaljenosti.

Razlikuju se četiri vrste modela najkraćeg puta prema [13]

1. Pronalaženje najkraćih putova od jednog prema više različitih čvorova kada su duljine lukova pozitivne
2. Pronalaženje najkraćih putova od jednog prema više čvorova na mrežama s proizvoljnom duljinom lukova
3. Pronalaženje najkraćih putova od svih čvorova prema svim čvorovima
4. Pronalaženje različitih tipova ograničenih najkraćih putova između čvorova

Problem trgovačkog putnika

Problem trgovačkog putnika je vrlo česta pojava u transportnoj mreži. Javlja se u situacijama kad je potrebno odabrati najpovoljniju rutu kojom se treba kretati trgovački putnik (osoba) koji obilazi više gradova (odredišta), krećući iz jednog grada u drugi, a da pri tome svaki grad, odnosno svako odredište posjeti samo jednom. Drugim riječima potrebno je odabrati rutu s najmanjim troškovima putovanja ili najmanjom udaljenosti. Za troškove putovanja uobičajeno se uzimaju udaljenosti između gradova izražene u km, ali to mogu biti i cijene transporta.

S problemom trgovačkoga putnika susreće se pri obavljanju distribucije robe, sakupljanja robe i sl. Pri rješavanju problema trgovačkoga putnika teži se pronaći najkraću rutu koja započinje u određenom čvoru logističke mreže, prolazi kroz ostale čvorove mreže najmanje jedanput i završava u početnom čvoru. [14]

U problemu trgovačkoga putnika mogu postojati i stroži zahtjevi, tj. da se kroz svaki čvor prođe točno jedanput. Jasno je kako se pri postavljanju ovakvoga zahtjeva pretpostavlja kako je moguće pronaći takvu rutu.

Slučaj kada trgovački putnik mora posjetiti svaki čvor na transportnoj mreži točno jedanput, pri čemu se vraća u početni čvor prešavši najmanju moguću udaljenost, obično se naziva klasičnim problemom trgovačkoga putnika. Ako udaljenost između bilo kojih dvaju gradova ne ovisi o pravcu putovanja od jednoga k drugom, ovaj se problem naziva simetrični problem trgovačkoga putnika. [14]

U različitim problemima u prometu, koji se mogu svesti na problem trgovačkoga putnika, prijevozna sredstva (zrakoplovi, brodovi, kamioni...) mogu se promatrati u ulozi trgovačkoga putnika koji obilazi zadana odredišta (čvorove). Pritom prijevozna sredstva mogu isporučivati ili preuzimati robu, odnosno putnike ili se isporuke i preuzimanja mogu obavljati istodobno. Mnoge tvrtke ovom problemu pristupaju intuitivno, no primjenom heurističkih metoda i GIS¹ alata moguće je smanjiti transportne troškove.

Problem usmjeravanja vozila

Određivanje najpovoljnijeg puta, kojeg koristi grupa vozila prilikom posluživanja skupa korisnika predstavlja problem usmjerenja vozila. Radi se o raspodjeli dobara u određenom vremenu, određenom broju korisnika određenim brojem vozila koji su smješteni u jednoj ili više centrala. Slobodni su za opsluživanje raznih narudžbi kupaca (opskrba robom, ili prikupljanje robe). Svaka narudžba kupca ima specifičnu lokaciju i veličinu. Zadani su transportni troškovi između svih lokacija. Cilj je dizajnirati najpovoljniji broj ruta za sva vozila, da su pritom svi kupci jednom posjećeni, te da je zadovoljeno ograničenje kapaciteta.

Vozila se kreću po zadanoj mreži prometnica. Rješavanje takvog problema obično se sastoji u pronalaženju ruta, gdje po svakoj ruti vozi jedno vozilo koje kreće iz centrale i vraća se u nju, sva zadana ograničenja moraju biti zadovoljena i ukupna cijena puta (tj. udaljenost koju će vozila prijeći) mora biti najmanja moguća. Proces odabira ruta, omogućava odabir bilo koje kombinacije kupaca, u cilju utvrđivanja opskrbnih ruta za svako vozilo. Na temelju toga se može zaključiti da je problem usmjeravanja vozila kombinatorno optimizacijski problem, gdje se broj prihvatljivih rješenja za problem eksponencijalno povećava s povećanjem broja kupaca koje je potrebno opskrbiti. Problem usmjeravanja vozila se može podijeliti na klasičan problem usmjeravanja i vremenski ograničen problem usmjeravanja. [15]

¹ **Geografski informacijski sustav** (GIS) sustav je za upravljanje prostornim podacima i osobinama pridruženima njima. U najstrožem smislu to je računalni sustav sposoban za integriranje, spremanje, uređivanje, analiziranje i prikazivanje geografskih informacija. U općenitijem smislu GIS je oruđe „pametne karte” koje dopušta korisnicima stvaranje interaktivnih upitnika (istraživanja koja stvara korisnik), analiziranje prostornih informacija i uređivanje podataka.

Lokacijski problemi

Lociranje objekata na transportnoj mreži predstavlja vrlo složen posao, jer lokacija određenih objekata uvelike utječe na rad i odvijanje logističkih procesa na toj mreži te na kvalitetu transporta i logističke troškove. Upravo zbog toga potrebno je razmotriti sve moguće opcije i uzeti u obzir sve čimbenike koji mogu utjecati na izbor određene lokacije te metode s kojima se taj izbor olakšava.

Pri odabiru lokacije objekta, razlikuju se šira i uža lokacija. Na odabir šire lokacije utječu sljedeći čimbenici: tržište, značajke robe, raspoloživost stručnog kadra i prijevozne mogućnosti. Čimbenici koji utječu na odabir uže lokacije su: veličina i konfiguracija terena, urbanistički plan područja, blizina mreže javnog prometa i pristupačnost, cijena zemljišta i trošak izgradnje, blizina servisa za popravak opreme, javno mišljenje. Dakako određeni čimbenici nose veću težinu pri donošenju odluke o lokaciji objekta. [16]

Tehnologija svakim danom sve više napreduje pa se tako razvio i određen broj matematičkih metoda i programskih alata koji omogućavaju lakše, brže i jednostavnije rješavanje problema. Također postoji veliki broj literature, znanstvenih radova i istraživanja koja se bave lokacijom objekata na transportnim mrežama.

4. ODREĐIVANJE RUTA PRIMJENOM HEURISTIČKIH METODA

U ovom poglavlju izvršit će se analiza, projektiranje, odnosno određivanje ruta za logističku tvrtku InterEx. U procesu određivanja uključeno je jedanaest ruta koja su podijeljena na tri područja: područje Slavonije, Istre i Sjeverne Hrvatske. Područje Slavonije obuhvaća četiri rute, područje Istre tri rute te područje Sjeverne Hrvatske četiri rute. Za određivanje ruta koristit će se četiri heurističke metode: *Clark-Wright-ov algoritam ušteda*, *Clark-Wright-ov algoritam ušteda – metoda s indikatorom T*, *Metoda najbližeg susjeda* i *Christofides-ov algoritam*, odnosno *metoda minimalnog razapinjućeg stabla*.

4.1. Rute na području Slavonije

Pomoću navedenih heurističkih metoda za rute na području Slavonije bit će prikazan postupak izračuna najkraćeg puta u cilju organizacije ruta prijevoza. Zatim prikazat će se rješenja organizacije svake od ruta na navedenom području. Podaci o narudžbama koji će biti potrebni za organizaciju ruta, bit će prikazani u tablicama.

4.1.1. Ruta broj 1

U prvoj ruti na području Slavonije detaljno će biti prikazan postupak izračuna najkraćeg puta po svim navedenim heurističkim metodama. U tablici 1 prikazani su potrebni podaci koji služe za izračun. U tablici se nalazi polazna (početna) točka, odnosno Velika Gorica (čvor x_0) te ostale lokacije koje je potrebno opskrbiti robom i njihove udaljenosti od polazišta.

Tablica 1. Podaci o ruti broj 1 (Slavonija)

Čvor	Lokacija	Udaljenost od početne točke (km)
x_0	Velika Gorica	0
x_1	Kutina	81
x_2	Novska	103
x_3	Pakrac	127
x_4	Daruvar	128
x_5	Lipik	123
x_6	Garešnica	100

Prema tablici 1 u tablici 2 prikazane su međusobne udaljenosti koje su bazirane na podacima iz Google Maps-a tako da su uzimane najkraće rute koje je Google Maps ponudio.

Tablica 2. Matrični prikaz međusobnih udaljenosti za rutu broj 1 (Slavonija)

	x ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₀	0	81	103	127	128	123	100
x ₁	81	0	31	41	49	38	20
x ₂	103	31	0	26	47	22	32
x ₃	127	41	26	0	21	4	34
x ₄	128	49	47	21	0	25	30
x ₅	123	38	22	4	25	0	29
x ₆	100	20	32	34	30	29	0

Clark-Wright-ov algoritam ušteta

Za početak potrebno je iz matrice udaljenosti izračunati uštete za svaki par čvorova međusobno. Uštete se izračunavaju prema formuli (1), a rješenje svakog pojedinačnog izračuna prikazuje vrijednost uštete između dva odabrana čvora. Naprimjer, ušteta za relaciju između čvorova x_1 i x_2 računa se na način da se njihova udaljenost koja iznosi 31 km oduzme od zbroja dviju udaljenosti, udaljenosti od početnog čvora (x_0) do čvora x_1 koja iznosi 81 km i udaljenosti od čvora x_0 do čvora x_2 koja iznosi 103 km. Vrijednosti uštete za tu relaciju je 153 km. U nastavku je prikazan postupak izračuna:

Uštete se izračunavaju prema formuli (1):

$$S_{ij} = d(0, i) + d(0, j) - d(i, j) \quad (1)$$

$$S_{12} = d(0,1) + d(0,2) - d(1,2) = 81 + 103 - 31 = 153$$

$$S_{13} = 81 + 127 - 41 = 167$$

$$S_{14} = 81 + 128 - 49 = 160$$

$$S_{15} = 81 + 123 - 38 = 166$$

$$S_{16} = 81 + 100 - 20 = 161$$

$$S_{23} = 103 + 127 - 26 = 204$$

$$S_{24} = 103 + 128 - 47 = 184$$

$$S_{25} = 103 + 123 - 22 = 204$$

$$S_{26} = 103 + 100 - 32 = 171$$

$$S_{34} = 127 + 128 - 21 = 234$$

$$S_{35} = 127 + 123 - 4 = 246$$

$$S_{36} = 127 + 100 - 34 = 193$$

$$S_{45} = 128 + 123 - 25 = 226$$

$$S_{46} = 128 + 100 - 30 = 198$$

$$S_{56} = 123 + 100 - 29 = 194$$

U tablici 3 su prikazane vrijednosti ušteta za svaku granu pomoću formule (1).

Tablica 3. Matrični prikaz ušteta za rutu broj 1 (Slavonija), Clark-Wright-ov algoritam

	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₁	0	153	167	160	166	161
x ₂	153	0	204	184	204	171
x ₃	167	204	0	234	246	193
x ₄	160	184	234	0	226	198
x ₅	166	204	246	226	0	194
x ₆	161	171	193	198	194	0

Radi lakšeg izvršavanja *Clark-Wright-ovog algoritma*, odnosno radi lakšeg organiziranja ruta, potrebno je rangirati vrijednosti ušteta od najveće prema najmanjoj. Tablica 4 prikazuje vrijednost ušteta prema redoslijedu od najveće prema najmanjoj vrijednosti.

Tablica 4. Rangirane uštete prema veličini za rutu broj 1 (Slavonija)

Grana (i, j)	Ušteta (i, j)	Grana (i, j)	Ušteta (i, j)	Grana (i, j)	Ušteta (i, j)
(3,5)	246	(4,6)	198	(1,3)	167
(3,4)	234	(5,6)	194	(1,5)	166
(4,5)	226	(3,6)	193	(1,6)	161
(2,3)	204	(2,4)	184	(1,4)	160
(2,5)	204	(2,6)	171	(1,2)	153

U posljednjem koraku *Clark-wright-ovog algoritma* izračunava se ruta prema rangiranim vrijednostima ušteda iz tablice 4, uz zadovoljavanje operativnih ograničenja, odnosno uvjeta. U nastavku je prikazan postupak projektiranja rute:

(3,5) \rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0, najveća ušteda nam predstavlja početak rute,

(3,4) \rightarrow 0 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0,

(4,5) \rightarrow čvorovi se već nalaze u ruti,

(2,3) \rightarrow povezivanje čvorova u ovom slučaju nije moguće jer je čvor 3 (x3) unutarnji čvor u ruti,

(2,5) \rightarrow 0 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0,

(4,6) \rightarrow 0 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0,

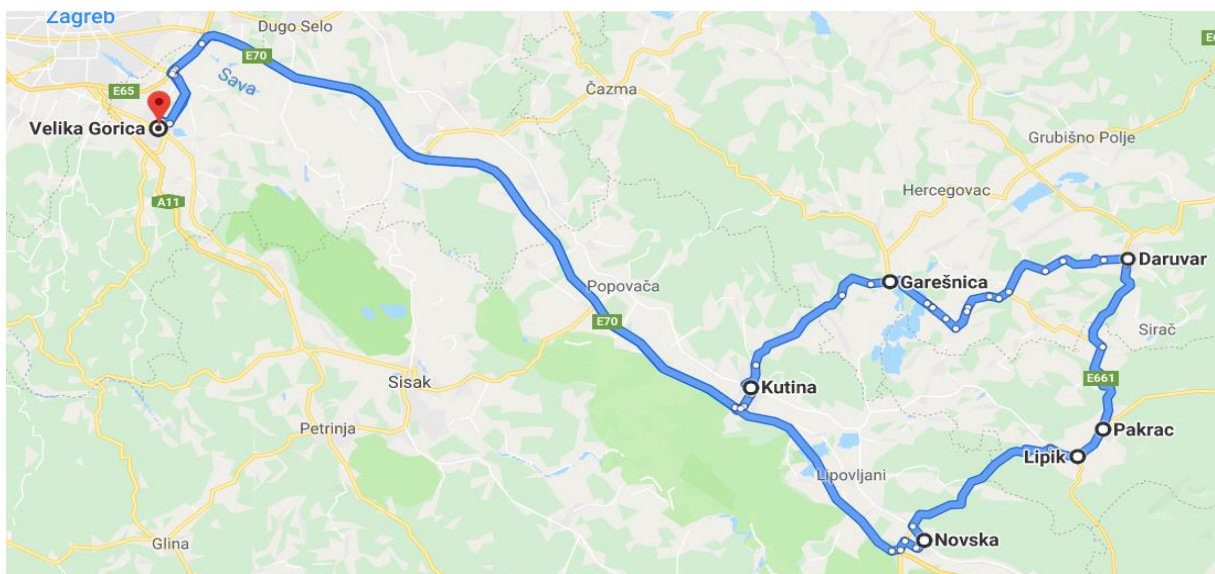
(5,6), (3,6), (2,4), (2,6) \rightarrow povezivanje nije moguće jer se navedeni čvorovi već nalaze u ruti,

(1,3), (1,5) \rightarrow čvorovi x3 i x5 su unutarnji čvorovi u ruti, uvjet nije zadovoljen,

(1,6) \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0 = 281 km.

Povezivanjem posljednjeg čvora u rutu, *Clark-Wright-ov algoritam* završava te se ostale uštede ne uzimaju u obzir. Konačna ruta prikazana je na slici 2 i glasi:

0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0.



Slika 2. Rješenje rute broj 1 (Slavonija) s *Clark-Wright-ovim algoritmom ušteda*

Clark-Wright-ov algoritam ušteta – metoda s indikatorom T

U nastavku je prikazana polu-matrica (tablica 5) u kojoj se nalaze uštete prema čvorovima. Vrijednosti ušteta se izračunavaju na identičan način kao i kod *Clark-Wright-ovog algoritma* ušteta prema formuli (1). Jedna ušteta prikazuje jednu relaciju između dva čvora, a u prvom retku nalazi se indikator vrijednosti 2, što u prijevodu znači obostrano putovanje, do lokacije te povratak.

Tablica 5. Matrični prikaz ušteta za rutu broj 1 (Slavonija), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	2	2	2	2	2	2
x_1		153	167	160	166	161
x_2			204	184	204	171
x_3				234	246	193
x_4					226	198
x_5						194
x_6						

Najveća ušteta nalazi se između čvorova x_3 i x_5 , a njezin iznos je 246 km te se mogućnost korištenja navedenih čvorova smanjuje za 1 (tablica 6). Postavlja se ruta $0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0$.

Tablica 6. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 1 (Slavonija), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	2	2	1	2	1	2
x_1		153	167	160	166	161
x_2			204	184	204	171
x_3				234	246 ¹	193
x_4					226	198
x_5						194
x_6						

Sljedeća najveća ušteda iznosi 231 km i uključuje čvorove x_3 i x_4 . Na isti način se oduzimaju mogućnosti korištenja navedenih čvorova, kao što je prikazano u tablici 7. S obzirom na oduzimanje mogućnosti korištenja, čvor x_3 iskorišten je maksimalno dva puta te sada ima funkciju unutarnjeg čvora u novo nastaloj ruti koja glasi: $0 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0$.

Tablica 7. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 1 (Slavonija), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	2	2	0	1	1	2
x_1		153	167	160	166	161
x_2			204	184	204	171
x_3				234 ¹	246 ¹	193
x_4					226	198
x_5						194
x_6						

Sljedeće najveće uštede po veličini koje iznose 226 i 204, nije moguće koristiti jer se čvorovi x_4 i x_5 , već nalaze u ruti, a čvor x_3 je iskorišten maksimalni broj puta. Najveća ušteda koju je moguće koristiti iznosi 204 i povezuje čvorove x_2 i x_5 . povezivanjem čvorova x_2 i x_5 , čvor x_5 postaje unutarnji čvor te ga više nije moguće koristiti, odnosno iskorišten je maksimalno dva puta (tablica 8). Novo nastala ruta glasi: $0 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0$.

Tablica 8. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 1 (Slavonija), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	2	1	0	1	0	2
x_1		153	167	160	166	161
x_2			204	184	204 ¹	171
x_3				234 ¹	246 ¹	193
x_4					226	198
x_5						194
x_6						

Sljedeća ušteta uključuje čvorove x_4 i x_6 , a iznosi 198. Oduzimanjem mogućnosti korištenja, čvor x_4 više ne može biti korišten jer je iskorišten dva puta (tablica 9). Povezivanjem čvorova x_4 i x_6 nastaje ruta koja glasi: $0 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0$.

Tablica 9. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 1 (Slavonija), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	2	1	0	0	0	1
x_1	153	167	160	166	161	
x_2	204	184	204 ¹	171		
x_3	234 ¹	246 ¹	193			
x_4	226	198 ¹				
x_5	194					
x_6						

Budući da su čvorovi x_3 , x_4 i x_5 već iskorišteni dva puta te čvorovi x_2 i x_6 se već nalaze u ruti, uštete 194, 193, 184, 171, 167 i ušteta 166 ne mogu se koristiti. Sljedeća najveća ušteta koju je moguće koristiti iznosi 161 km i povezuje čvorove x_1 i x_6 (tablica 10). Uvrštavanjem čvora x_1 , kompletirana je ruta koja glasi: $0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0$.

Tablica 10. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 1 (Slavonija), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	1	1	0	0	0	0
x_1	153	167	160	166	161 ¹	
x_2	204	184	204 ¹	171		
x_3	234 ¹	246 ¹	193			
x_4	226	198 ¹				
x_5	194					
x_6						

$$0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0 = 281 \text{ km}$$

Metoda najbližeg susjeda

Heuristika najbližeg susjeda jedna je od najjednostavnijih heurističkih metoda koja nalaže odabir minimalnih udaljenosti. Prvi korak je odabrati minimalnu vrijednost, odnosno udaljenost u prvom retku x_0 , koja u ovom slučaju iznosi 81 km, a predstavlja poveznicu između čvorova x_0 i x_1 . Zatim se u retku x_1 traži minimalna udaljenost, ne uključujući čvor x_0 radi pod-rute. Minimalna udaljenost u retku x_1 iznosi 20 km i povezuje čvorove x_1 i x_6 . Ruta se nastavlja od čvora x_6 prema čvoru x_5 s obzirom na to da minimalna udaljenost između ta dva čvora iznosi 29 km. Odabirom minimalne vrijednosti u retku x_5 koja iznosi 4 km, nastaje nova grana u ruti te povezuje čvorove x_5 i x_3 . U retku x_3 najmanja udaljenost je između čvorova x_3 i x_4 , a njezin iznos je 21 km. S obzirom da su čvorovi x_5 i x_6 već iskorišteni, a čvor x_0 treba biti posljednja točka u ruti, odnosno biti krajnji čvor rute, sljedeća neiskorištena minimalna udaljenost iznosi 47 km i povezuje čvorove x_4 i x_2 . Kako bi se kompletirala ruta, čvor x_2 povezuje se s čvorom x_0 , a njihova udaljenost je 103 km. Zbog povezivanja prema redosljedu, udaljenost između pretposljednjeg i posljednjeg čvora ne mora biti minimalna. Polazni čvor je uvijek posljednji, završni čvor i stoga posljednja vrijednost, tj. udaljenost ne mora nužno biti minimalna kao što *Metoda najbližeg susjeda* to nalaže, što je prikazano u tablici 11.

Tablica 11. Matrični prikaz udaljenosti za rutu broj 1 (Slavonija), Metoda najbližeg susjeda

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	0	81	103	127	128	123	100
x_1	81	0	31	41	49	38	20
x_2	103	31	0	26	47	22	32
x_3	127	41	26	0	21	4	34
x_4	128	49	47	21	0	25	30
x_5	123	38	22	4	25	0	29
x_6	100	20	32	34	30	29	0

Kompletirana ruta glasi: $0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0 = 305 \text{ km}$.

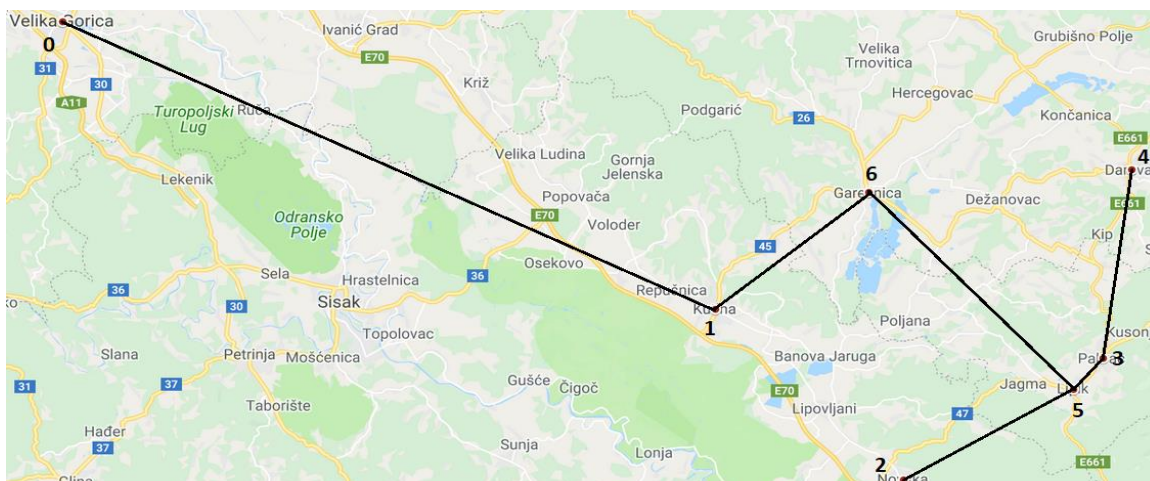
Christofides-ov algoritam

Prvi korak u *Christofides-ovom algoritmu*, odnosno metodi minimalnog razapinjućeg stabla je pronaći minimalno razapinjuće stablo. Iz matrice udaljenosti potrebno je odabrati minimalnu vrijednost (udaljenost) koja u ovom slučaju iznosi 4 km, a povezuje čvorove x_3 i x_5 .

Zatim je potrebno pronaći prvu sljedeću minimalnu udaljenost koja se nastavlja od povezanih čvorova, odnosno od čvorova x_3 i x_5 . Sljedeća minimalna udaljenost koja se nastavlja je udaljenost od čvora x_3 prema čvoru x_4 te njezin iznos je 21 km. Od čvora x_5 prema čvoru x_2 nalazi se sljedeća tražena minimalna udaljenost koja iznosi 22 km i koja zadovoljava uvjet povezivanja. Identičnim načinom pronalazi se sljedeća nova minimalna udaljenost koja se nastavlja na čvorove x_2 , x_3 , x_4 i x_5 . Tražena udaljenost povezuje čvorove x_5 i x_6 i iznosi 29 km. Čvorovi koji nisu još uključeni u rutu, odnosno u stablo su x_0 i x_1 . S obzirom na to da su udaljenosti u stupcu x_2 , odnosno retku x_2 manje od onih u retku x_0 , čvor x_2 uzima kao sljedeći čvor za uključivanje u stablo. Prilikom pregleda vrijednosti (udaljenosti) u njegovom stupcu ili retku može se prepoznati minimalna udaljenost koja povezuje čvorove x_1 i x_6 i koja iznosi 20 km. Posljednja grana u razapinjućem stablu grana koja povezuje čvorove x_1 i x_6 te je izrada stabla završena. Njihova udaljenost iznosi 81 km. U nastavku je prikazana tablica 12 s rješenjem odabira minimalne udaljenosti te ispod matrice slika koja prikazuje dobiveno razapinjuće stablo.

Tablica 12. Tablični prikaz izračuna za rutu broj 1 (Slavonija), Cristofides-ov algoritam

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	0	81	103	127	128	123	100
x_1	81	0	31	41	49	38	20
x_2	103	31	0	26	47	22	32
x_3	127	41	26	0	21	4	34
x_4	128	49	47	21	0	25	30
x_5	123	38	22	4	25	0	29
x_6	100	20	32	34	30	29	0



Slika 3. Razapinjuće stablo

Nakon što je u potpunosti izrađeno razapinjuće stablo (slika 3), slijedi označavanje neparnih vrhova, odnosno čvorova s neparnim stupnjem. Vrh koji ima neparan zbroj ulaznih i izlaznih linija smatra se neparnim vrhom. U ovom slučaju, to su vrhovi: x_0 , x_2 , x_4 , x_5 , što je vidljivo i na slici.

Međusobno povezivanje neparnih vrhova odvija se na način da se raspišu sve kombinacije neparnih vrhova, ne uključujući one vrhove koji su već međusobno direktno povezani. Odabrane (zaokružene) udaljenosti u tablici 13 označavaju udaljenosti koje ne mogu biti kombinirane prilikom povezivanja neparnih vrhova jer predstavljaju direktnu vezu između neparnih vrhova. U ovom slučaju čvorovi x_2 i x_5 ne mogu se odabrati. U nastavku je prikazana matrica udaljenosti koja uključuje samo neparne vrhove.

Tablica 13. Matrični prikaz neparnih vrhova za rutu broj 1 (Slavonija), Cristofides-ov algoritam

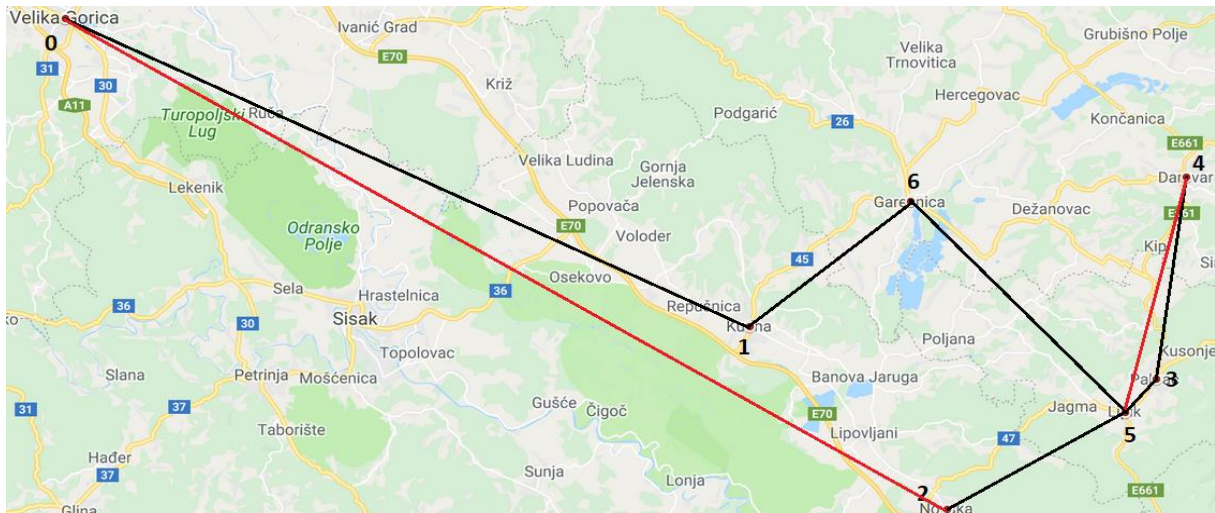
	x_0	x_2	x_4	x_5
x_0	0	103	128	123
x_2	103	0	47	(22)
x_4	128	47	0	25
x_5	123	(22)	25	0

Moguće kombinacije sparivanja neparnih vrhova te zbroj međusobnih udaljenosti između svakog od njih prikazane su u nastavku. Odabrana kombinacija veza između neparnih vrhova je ona koja daje minimalan zbroj udaljenosti dvije veze.

$$1. (0,2) + (4,5) = 103 + 15 = 128$$

$$2. (0,5) + (4,2) = 123 + 47 = 170$$

Kombinacija veza neparnih vrhova pod rednim brojem 1. daje najbolje rješenje, odnosno najmanji zbroj udaljenosti. Zatim se u razapinjućem stablu povezuju vrhovi x_0 i x_2 te x_4 i x_5 . Grafički prikaz rješenja prikazan je na slici 4, crvenom bojom označene su odabrane veze između neparnih vrhova.



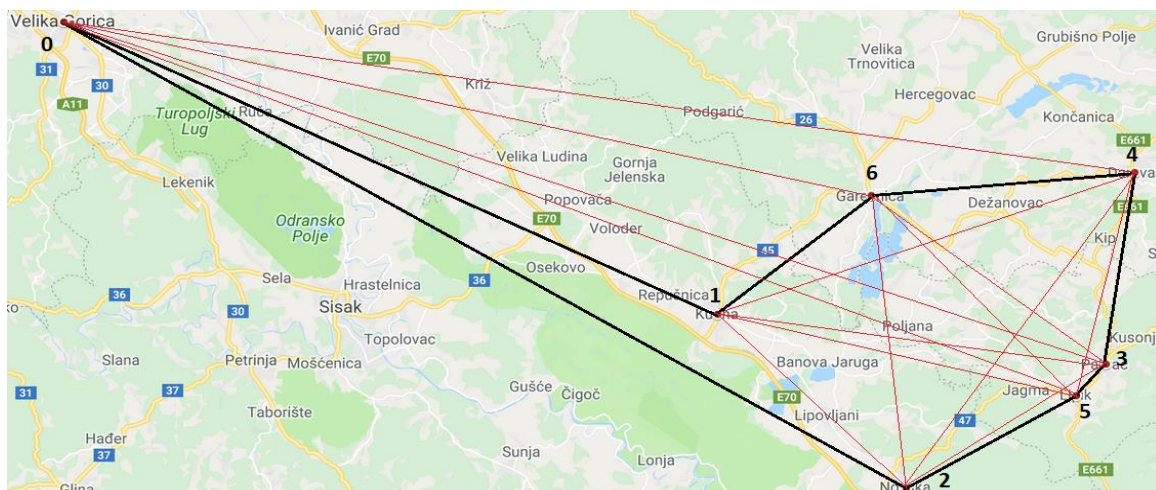
Slika 4. Povezivanje neparnih vrhova

Da bi se kompletirala ruta, odnosno da bi se dobilo konačno rješenje, potrebno je izvršiti posljednji korak. U posljednjem koraku ispisuju se kombinacije povezivanja vrhova kako bi se dobila jedinstvena ruta koja povezuje sve vrhove. Mogućnost spajanja vrhova imaju vrhovi koji sadrže četiri ili više ulaznih i izlaznih veza. U ovom slučaju to je vrh x_5 . Jedna od mogućih veza je veza između vrhova x_2 i x_3 . Njihova udaljenost mora biti manja ili jednaka zbroju udaljenosti veza x_2 i x_5 te x_5 i x_3 . Ukoliko uvjet nije zadovoljen, odabire se najveća razlika, tj. ušteda između svih kombinacija. U nastavku je prikazan postupak te moguće kombinacije:

1. $(2,3) \leq (2,5) + (3,5) = 22 + 4 = 26 \rightarrow 26 \leq 26 \rightarrow \Delta = 0$
2. $(2,4) \leq (2,5) + (4,5) = 22 + 25 = 47 \rightarrow 47 \leq 47 \rightarrow \Delta = 0$
3. $(6,3) \leq (6,5) + (3,5) = 29 + 4 = 33 \rightarrow 34 \leq 33 \rightarrow \Delta = -1$ Uvjet nije zadovoljen!
4. $(6,4) \leq (6,5) + (4,5) = 29 + 25 = 54 \rightarrow 30 \leq 54 \rightarrow \Delta = 24$

Veza pod rednim brojem 3. uzima se kao veza spajanja vrhova jer ima najveću vrijednost uštede. Dodana veza je između čvorova x_6 i x_4 , a oduzete veze su između x_6 i x_5 te x_5 i x_4 te se dobije konačno rješenje *Christofides-ovog algoritma*. Kompletiranja ruta prikazana je na slici 5, crnom bojom, dok su sve ostale međusobne udaljenosti prikazane crvenom bojom.

Konačna ruta glasi: $0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0 = 281 \text{ km}$



Slika 5. Rješenje rute broj 1 (Slavonija) s *Christofides-ovim* algoritmom

4.1.2. Ruta broj 2

U drugoj ruti na području Slavonije početna i završna točka je Velika Gorica, a potrebno je opskrbiti robom ostalih sedam lokacija, kao što je prikazano u tablici 14. Za preostale rute, uključujući i ovu, kod svakog izračuna metoda, bit će prikazan samo početak izračuna te krajnje rješenje. Postupci izračuna su identični kao i za prošlu rutu gdje su detaljno objašnjeni.

Tablica 14. Podaci o ruti broj 2 (Slavonija)

Čvor	Lokacija	Udaljenost od početne točke (km)
x_0	Velika Gorica	0
x_1	Zdenci	209
x_2	Slatina	178
x_3	Velika	187
x_4	Virovitica	148
x_5	Nova Gradiška	144
x_6	Orahovica	217
x_7	Požega	172

U nastavku je prikazana matrica međusobnih udaljenosti (tablica 15) između lokacija dobivenih pomoću Google Maps-a.

Tablica 15. Matrični prikaz međusobnih udaljenosti za rutu broj 2 (Slavonija)

	x ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇
x ₀	0	209	178	187	148	144	217	172
x ₁	209	0	27	48	59	83	9	52
x ₂	178	27	0	42	30	95	29	72
x ₃	187	48	42	0	73	47	37	16
x ₄	148	59	30	73	0	105	61	90
x ₅	144	83	95	47	105	0	75	32
x ₆	217	9	29	37	61	75	0	46
x ₇	172	52	72	16	90	32	46	0

Clark-Wright-ov algoritam ušteda

U tablici 16. nalaze se rangirane uštede, od najveće prema najmanjoj, izračunate prema formuli (1).

Tablica 16. Rangirane uštede prema veličini za rutu broj 2 (Slavonija)

Grana (<i>i, j</i>)	Ušteda (<i>i, j</i>)	Grana (<i>i, j</i>)	Ušteda (<i>i, j</i>)	Grana (<i>i, j</i>)	Ušteda (<i>i, j</i>)
(1,6)	417	(1,7)	329	(5,7)	284
(3,6)	367	(2,3)	323	(2,7)	278
(2,6)	366	(4,6)	303	(1,5)	270
(1,2)	360	(1,4)	297	(3,4)	261
(1,3)	348	(2,4)	295	(4,7)	229
(3,7)	343	(5,6)	286	(2,5)	227
(6,7)	343	(3,5)	284	(4,5)	186

Prema uštedama iz tablice 16 izračunavaju se rute prema rangiranim vrijednostima ušteda, uz zadovoljavanje uvjeta. U nastavku je postupak projektiranja rute:

$(1,6) \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 0,$

$(3,6) \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 0,$

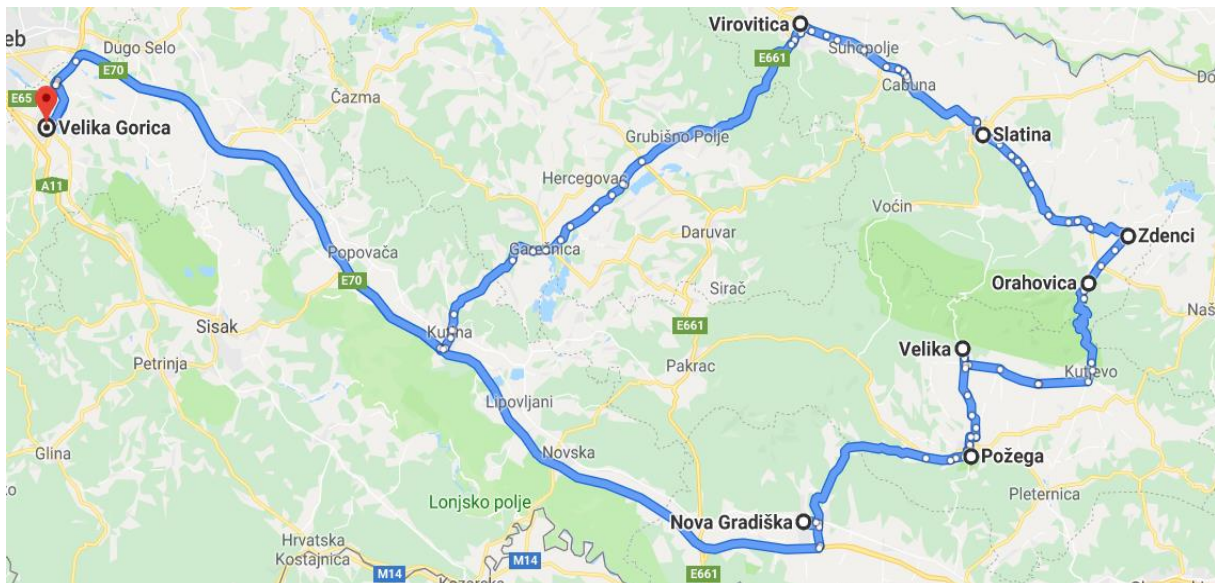
$(1,2) \rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 0,$

$(3,7) \rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 0,$

$(2,4) \rightarrow 0 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 0,$

$(5,7) \rightarrow 0 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0 = 443 \text{ km}.$

Na slici 6 prikazano je rješenje izračuna *Clark-wright-ovog algoritma* za rutu 2. Prikazana je ruta neovisno u kojem smjeru je usmjerena, koja obilazi čvorove redosljedom dobivenim izračunom spomenutoga algoritma.



Slika 6. Rješenje rute broj 2 (Slavonija) s *Clark-Wright-ovim algoritmom ušteda*

Clark-Wright-ov algoritam ušteta – metoda s indikatorom T

U nastavku je prikazana polu-matrica u kojoj se nalaze uštete prema čvorovima (tablica 17). Vrijednosti ušteta se izračunavaju prema formuli (1).

Tablica 17. Matrični prikaz ušteta za rutu broj 2 (Slavonija), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	2	2	2	2	2	2	2
x_1		360	348	297	270	417	239
x_2			323	295	227	366	278
x_3				261	284	367	343
x_4					186	303	229
x_5						286	284
x_6							343
x_7							

Sljedeća tablica 18 prikazuje konačno rješenje metode s indikatorom T prema, na isti način kao i na prethodnom primjeru.

Tablica 18. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 2 (Slavonija), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	0	0	0	1	1	0	0
x_1		360 1	348	297	270	417 1	239
x_2			323	295 1	227	366	278
x_3				261	284	367 1	343 1
x_4					186	303	229
x_5						286	284 1
x_6							343
x_7							

$$x_1 \rightarrow x_6 \rightarrow 1 \leftrightarrow 6,$$

$$x_6 \rightarrow x_3 \rightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 3$$

$$x_2 \rightarrow x_1 \rightarrow 2 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 3$$

$$x_3 \rightarrow x_7 \rightarrow 2 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 7$$

$$x_4 \rightarrow x_2 \rightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 7$$

$$x_7 \rightarrow x_5 \rightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 5$$

$$x_0 \rightarrow x_5 \rightarrow 0 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0 = 443 \text{ km.}$$

Metoda najbližeg susjeda

Metoda najbližeg susjeda rješava se odabirom minimalnih udaljenosti. U sljedećoj matrici (tablica 19) prikazane su međusobne udaljenosti između lokacija.

Tablica 19. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 2 (Slavonija), Metoda najbližeg susjeda

	x ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇
x ₀	0	209	178	187	148	144	217	172
x ₁	209	0	27	48	59	83	9	52
x ₂	178	27	0	42	30	95	29	72
x ₃	187	48	42	0	73	47	37	16
x ₄	148	59	30	73	0	105	61	90
x ₅	144	83	95	47	105	0	75	32
x ₆	217	9	29	37	61	75	0	46
x ₇	172	52	72	16	90	32	46	0

$$x_0 \rightarrow x_5,$$

$$x_5 \rightarrow x_7 \rightarrow 0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 7,$$

$$x_7 \rightarrow x_3 \rightarrow 0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 3,$$

$$x_3 \rightarrow x_6 \rightarrow 0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6,$$

$$x_6 \rightarrow x_1 \rightarrow 0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 1,$$

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow 0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2,$$

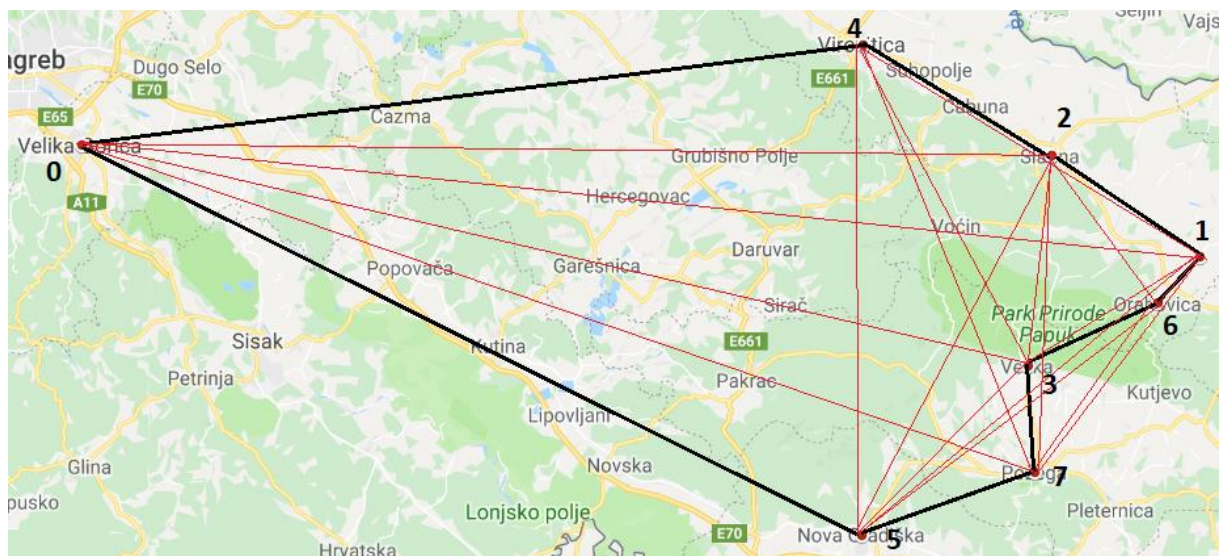
$$x_2 \rightarrow x_4 \rightarrow 0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4,$$

$$x_4 \rightarrow x_0 \rightarrow 0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0 = 443 \text{ km.}$$

Christofides-ov algoritam

Slika 7 prikazuje rješenje *Christofides-ovog algoritma*, izvedeno na način kao u prethodnom primjeru. Crne linije označavaju konačnu rutu prema izračunu *Christofides-ovog algoritma*, crvene linije označavaju međusobne udaljenosti između vrhova. Dobivena ruta glasi:

$$0 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0 = 443 \text{ km.}$$



Slika 7. Rješenje rute broj 2 (Slavonija) s *Christofides-ovim algoritmom*

4.1.3. Ruta broj 3

U trećoj ruti na području Slavonije početna i završna točka je Velika Gorica, a potrebno je opskrbiti robom ostalih šest lokacija, kao što je prikazano u tablici 20. Za preostale rute, uključujući i ovu, kod svakog izračuna metoda, bit će prikazan samo početak izračuna te krajnje rješenje. Postupci izračuna su identični kao i za rutu 1 na području Slavonije gdje su detaljno objašnjeni. Ispod tablice 20, prikazana je matrica međusobnih udaljenosti između lokacija (tablica 21).

Tablica 20. Podaci o ruti broj 3 (Slavonija)

Čvor	Lokacija	Udaljenost od početne točke (km)
x_0	Velika Gorica	0
x_1	Bizovac	252
x_2	Pleternica	181
x_3	Našice	222
x_4	Vinkovci	271
x_5	Osijek	272
x_6	Babina Greda	236

Tablica 21. Matrični prikaz međusobnih udaljenosti za rutu broj 3 (Slavonija)

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	0	252	181	222	271	272	236
x_1	252	0	73	32	59	22	80
x_2	181	73	0	42	101	105	78
x_3	222	32	42	0	75	54	68
x_4	271	59	101	75	0	43	31
x_5	272	22	105	54	43	0	70
x_6	236	80	78	68	31	70	0

Clark-Wright-ov algoritam ušteta

U tablici 22. nalaze se rangirane uštete, izračunate prema formuli (1).

Tablica 22. Rangirane uštete prema veličini za rutu broj 3 (Slavonija)

Grana (i, j)	Ušteta (i, j)	Grana (i, j)	Ušteta (i, j)	Grana (i, j)	Ušteta (i, j)
(1,5)	502	(3,5)	440	(2,3)	361
(4,5)	500	(5,6)	438	(1,2)	360
(4,6)	476	(3,4)	418	(2,4)	351
(1,4)	464	(1,6)	408	(2,5)	348
(1,3)	442	(3,6)	390	(2,6)	339

Prema uštedama iz tablice 22 izračunavaju se rute prema rangiranim vrijednostima ušteda, uz zadovoljavanje uvjeta. U nastavku je postupak projektiranja rute:

$$(1,5) \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0,$$

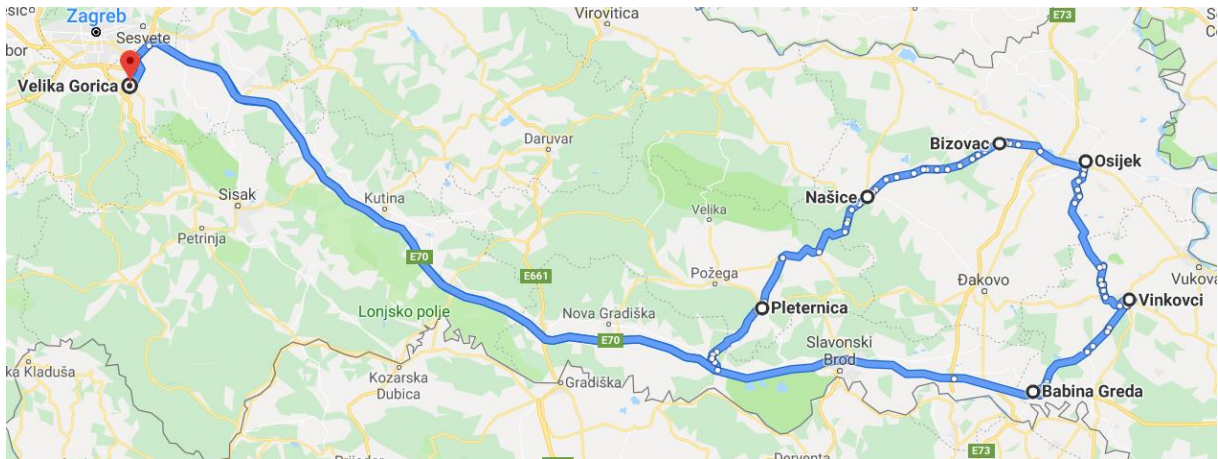
$$(4,5) \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0,$$

$$(4,6) \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 0,$$

$$(1,3) \rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 0,$$

$$(2,3) \rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 0 = 587 \text{ km}.$$

Na slici 8 prikazano je rješenje izračuna *Clark-Wright-ovog algoritma* za rutu 3. Prikazana je ruta neovisno u kojem smjeru je usmjerena, koja obilazi čvorove redosljedom dobivenim izračunom spomenutoga algoritma.



Slika 8. Rješenje rute broj 3 (Slavonija) s *Clark-Wright-ovim algoritmom ušteda*

Clark-Wright-ov algoritam ušteda – metoda s indikatorom T

U nastavku je prikazana polu-matrica u kojoj se nalaze uštede prema čvorovima (tablica 23). Vrijednosti ušteda se izračunavaju prema formuli (1).

Tablica 23. Matrični prikaz ušteta za rutu broj 3 (Slavonija), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	2	2	2	2	2	2
x_1		360	442	464	502	408
x_2			361	351	348	339
x_3				418	440	390
x_4					500	476
x_5						438
x_6						

Sljedeća polu-matrica prikazuje konačno rješenje metode s indikatorom T, na isti način kao i na prvom primjeru (tablica 24).

Tablica 24. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 3 (Slavonija), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	0	1	0	0	0	1
x_1		360	442 1	464	502 1	408
x_2			361 1	351	348	339
x_3				418	440	390
x_4					500 1	476 1
x_5						438
x_6						

$$x_1 \rightarrow x_5 \rightarrow 1 \leftrightarrow 5,$$

$$x_5 \rightarrow x_4 \rightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4,$$

$$x_4 \rightarrow x_6 \rightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6,$$

$$x_3 \rightarrow x_1 \rightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6,$$

$$x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6,$$

$$x_0 \rightarrow x_2 \rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 0 = 587 \text{ km.}$$

Metoda najbližeg susjeda

Algoritam najbližeg susjeda temelji se na pohlepnom dodavanju najbližeg vrha već dodanim vrhovima u ruti, kao što je prikazano u prethodnom primjeru. Prikaz pojedinačnih relacija, kompletirane rute te ispunjena matrica nalazi se u nastavku (tablica 25).

Tablica 25. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 3 (Slavonija), Metoda najbližeg susjeda

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	0	252	181	222	271	272	236
x_1	252	0	73	32	59	22	80
x_2	181	73	0	42	101	105	78
x_3	222	32	42	0	75	54	68
x_4	271	59	101	75	0	43	31
x_5	272	22	105	54	43	0	70
x_6	236	80	78	68	31	70	0

$$x_0 \rightarrow x_2,$$

$$x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3,$$

$$x_3 \rightarrow x_1 \rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1,$$

$$x_1 \rightarrow x_5 \rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5,$$

$$x_5 \rightarrow x_4 \rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4,$$

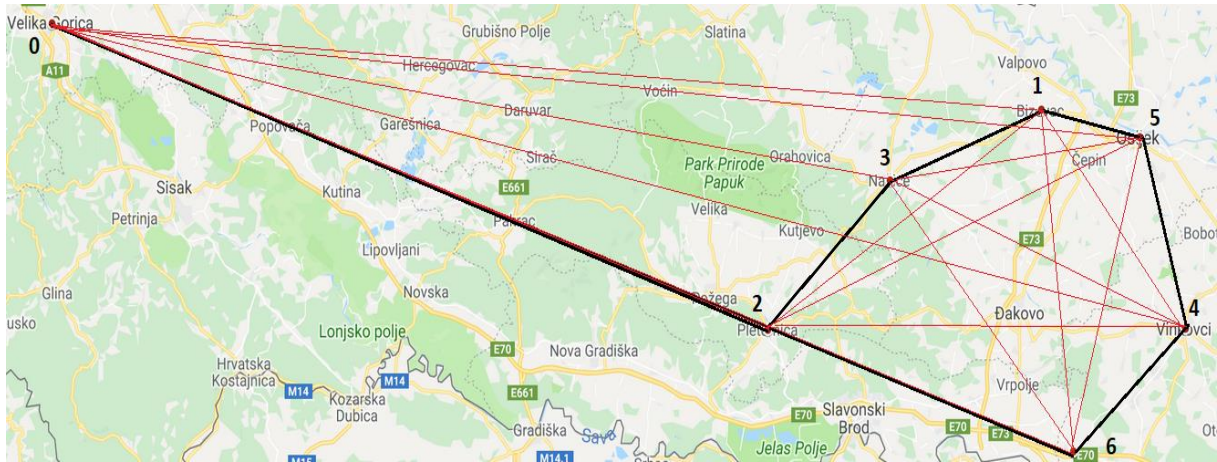
$$x_4 \rightarrow x_6 \rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6,$$

$$x_6 \rightarrow x_0 \rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 0 = 587 \text{ km.}$$

Christofides-ov algoritam

Rješenje *Christofides-ovog algoritma* nalazi se na slici 9. Crne linije označuju najkraći put kao rješenje algoritma, dok crvene linije prikazuju međusobne udaljenosti između čvorova. Cilj *Christofides-ovog algoritma* je dobiti rješenje najkraćeg puta korištenjem matrice udaljenosti. Rješenje za rutu 3 glasi:

$$0 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0 = 587 \text{ km.}$$



Slika 9. Rješenje rute broj 3 (Slavonija) s *Christofides-ovim algoritmom*

4.1.4. Ruta broj 4

U četvrtoj ruti na području Slavonije početna i završna točka je Velika Gorica, a potrebno je opskrbiti robom ostalih pet lokacija, kao što je prikazano u tablici 26. Za preostale rute, uključujući i ovu, kod svakog izračuna metoda, bit će prikazan samo početak izračuna te krajnje rješenje. Postupci izračuna su identični kao i za rutu 1 na području Slavonije gdje su detaljno objašnjeni.

Tablica 26. Podaci o ruti broj 4 (Slavonija)

Čvor	Lokacija	Udaljenost od početne točke (km)
x_0	Velika Gorica	0
x_1	Novska	103
x_2	Đakovo	204
x_3	Kutjevo	199
x_4	Slavonski Brod	189
x_5	Vrpolje	230

U nastavku je prikazana matrica međusobnih udaljenosti između lokacija (tablica 27) dobivenih pomoću Google Maps-a.

Tablica 27. Matrični prikaz međusobnih udaljenosti za rutu broj 4 (Slavonija)

	x ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅
x ₀	0	103	240	199	189	230
x ₁	103	0	146	95	94	136
x ₂	240	146	0	62	46	13
x ₃	199	95	62	0	44	71
x ₄	189	94	46	44	0	36
x ₅	230	136	13	71	36	0

Clark-Wright-ov algoritam ušteda

U tablici 28. nalaze se rangirane uštede, od najveće prema najmanjoj, izračunate prema formuli (1).

Tablica 28. Rangirane uštede prema veličini za rutu broj 4 (Slavonija)

Grana (<i>i, j</i>)	Ušteda (<i>i, j</i>)	Grana (<i>i, j</i>)	Ušteda (<i>i, j</i>)
(2,5)	457	(3,4)	344
(4,5)	383	(1,3)	207
(2,4)	383	(1,4)	198
(2,3)	377	(1,5)	197
(3,5)	358	(1,2)	197

Prema uštedama iz tablice 28 izračunavaju se rute prema rangiranim vrijednostima ušteda, uz zadovoljavanje uvjeta. U nastavku je postupak projektiranja rute:

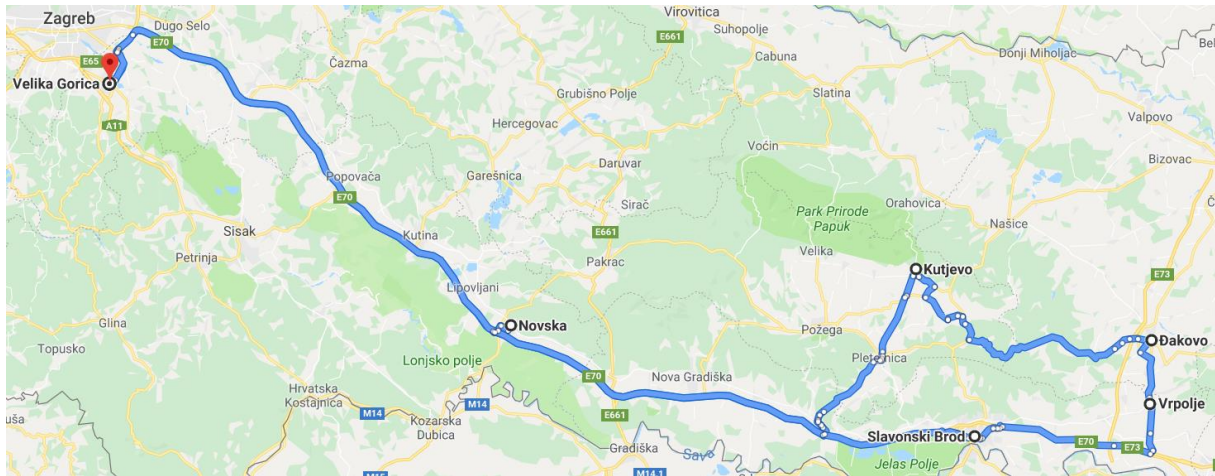
$$(2,5) \rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0,$$

$$(5,4) \rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0,$$

$$(2,3) \rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0,$$

$$(1,3) \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0 = 498 \text{ km.}$$

Na slici 10 prikazano je rješenje izračuna *Clark-Wright-ovog algoritma* za rutu 4. Prikazana je ruta neovisno u kojem smjeru je usmjerena, koja obilazi čvorove redosljedom dobivenim izračunom spomenutoga algoritma.



Slika 10. Rješenje rute broj 4 (Slavonija) s *Clark-Wright-ovim algoritmom* ušteta

Clark-Wright-ov algoritam ušteta – metoda s indikatorom T

U nastavku je prikazana polu-matrica u kojoj se nalaze uštete prema čvorovima (tablica 29). Vrijednosti ušteta se izračunavaju prema formuli (1).

Tablica 29. Matrični prikaz ušteta za rutu broj 4 (Slavonija), *Clark-Wright-ov algoritam* s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	2	2	2	2	2
	x_1	197	207	198	197
		x_2	377	383	457
			x_3	344	358
				x_4	383
					x_5

Sljedeća polu-matrica (tablica 30) prikazuje konačno rješenje metode s indikatorom T, na isti način kao i na prvom primjeru.

Tablica 30. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 4 (Slavonija), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	1	0	0	1	0
x_1		197	207 ¹	198	197
x_2			377 ¹	383	457 ¹
x_3				344	358
x_4					383 ¹
x_5					

$$x_2 \rightarrow x_5 \rightarrow 2 \leftrightarrow 5,$$

$$x_5 \rightarrow x_4 \rightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4,$$

$$x_3 \rightarrow x_2 \rightarrow 3 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4,$$

$$x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow 1 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4,$$

$$x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0 = 498 \text{ km.}$$

Metoda najbližeg susjeda

Metoda najbližeg susjeda rješava se odabirom minimalnih udaljenosti u matrici, istim postupkom kao u primjeru izračuna rute broj 1 na području Slavonije. U nastavku se nalazi ispunjena matrica udaljenosti uz prikaz pojedinačnih relacija te prikaz kompletirane rute.

Tablica 31. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 4 (Slavonija), Metoda najbližeg susjeda

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	0	103	240	199	189	230
x_1	103	0	146	95	94	136
x_2	240	146	0	62	46	13
x_3	199	95	62	0	44	71
x_4	189	94	46	44	0	36
x_5	230	136	13	71	36	0

$$x_0 \rightarrow x_1,$$

$$x_1 \rightarrow x_4 \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4,$$

$$x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5,$$

$$x_5 \rightarrow x_2 \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2,$$

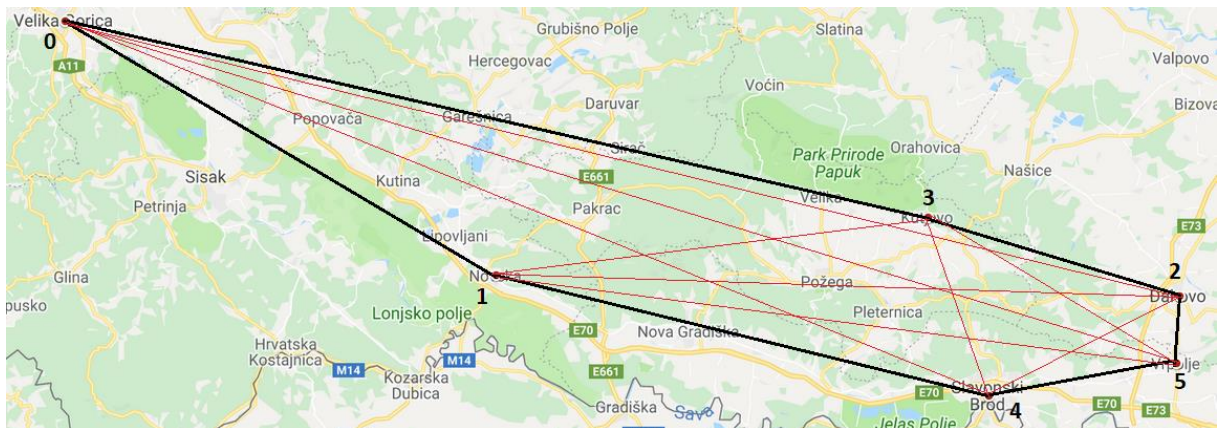
$$x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3,$$

$$x_3 \rightarrow x_0 \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 0 = 507 \text{ km.}$$

Christofides-ov algoritam

Rješenje *Christofides-ovog algoritma* prikazano je na slici 11. Rješenje je dobiveno kao i na izračunu rute broj 1 na području Slavonije *Christofides-ovim algoritmom*. Redoslijed obilaska lokacija, odnosno rješenje glasi:

$$0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 0 = 507 \text{ km.}$$



Slika 11. Rješenje rute broj 4 (Slavonija) s *Christofides-ovim algoritmom*

4.2. Rute na području Istre

Nakon što su dobivena rješenja najkraćeg puta pomoću heurističkih metoda za sve navedene rute na području Slavonije, potrebno je projektirati rute i izračunati najkraći put za rute na području Istre. Na jednak način projektiraju se i izračunavaju rute na području Istre kao i u primjerima Slavonije.

4.2.1. Ruta broj 1

U prvoj ruti na području Istre početna i završna točka je Velika Gorica, a potrebno je opskrbiti robom ostalih pet lokacija, kao što je prikazano u tablici 32. Za preostale rute, uključujući i ovu, kod svakog izračuna metoda, bit će prikazan samo početak izračuna te krajnje rješenje. Postupci izračuna su identični kao i za rutu 1 na području Slavonije gdje su detaljno objašnjeni. U nastavku je prikazana matrica međusobnih udaljenosti između lokacija (tablica 33).

Tablica 32. Podaci o ruti broj 1 (Istra)

Čvor	Lokacija	Udaljenost od početne točke (km)
x_0	Velika Gorica	0
x_1	Rijeka	167
x_2	Pazin	221
x_3	Labin	227
x_4	Žminj	236
x_5	Opatija	180

Tablica 33. Matrični prikaz međusobnih udaljenosti za rutu broj 1 (Istra)

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	0	167	221	227	236	180
x_1	167	0	57	62	73	13
x_2	221	57	0	29	15	49
x_3	227	62	29	0	30	46
x_4	236	73	15	30	0	65
x_5	180	13	49	46	65	0

Clark-Wright-ov algoritam ušteta

U tablici 34. nalaze se rangirane uštete, od najveće prema najmanjoj, izračunate prema formuli (1).

Tablica 34. Rangirane uštete prema veličini za rutu broj 1 (Istra)

Grana (i, j)	Ušteta (i, j)	Grana (i, j)	Ušteta (i, j)
(2,4)	442	(4,5)	351
(3,4)	433	(1,5)	334
(2,3)	419	(1,3)	332
(3,5)	361	(1,2)	331
(2,5)	352	(1,4)	330

Prema uštedama iz tablice 34 izračunavaju se rute prema rangiranim vrijednostima ušteta, uz zadovoljavanje uvjeta. U nastavku je postupak projektiranja rute:

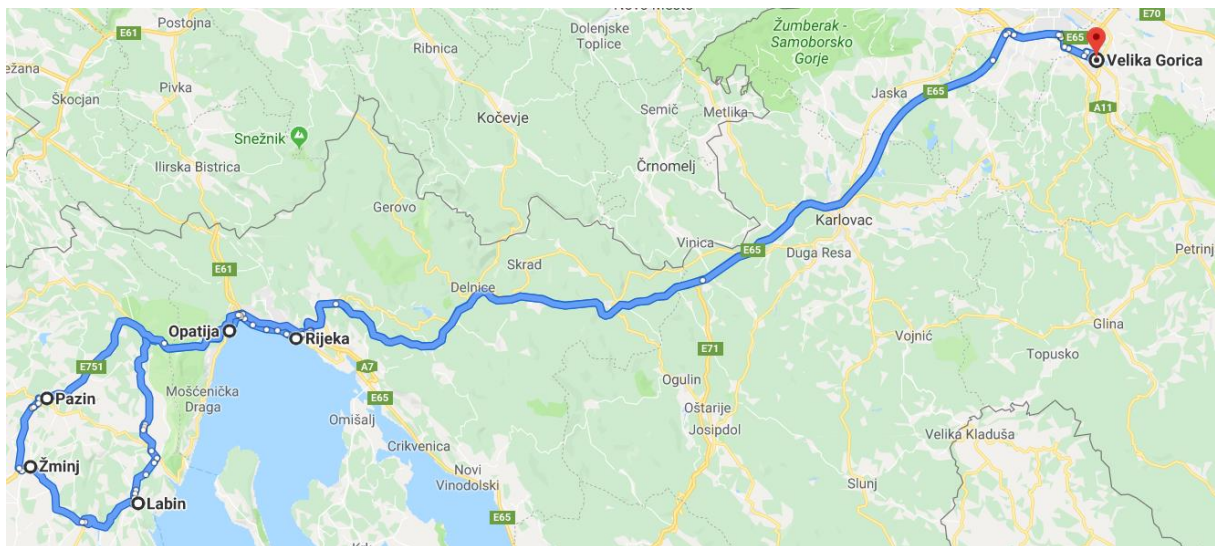
(2,4) $\rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0$,

(3,4) $\rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 0$,

(3,5) $\rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0$,

(1,5) $\rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 0 = 493 \text{ km}$.

Na slici 12 prikazano je rješenje izračuna *Clark-Wright-ovog algoritma* za rutu 1. Prikazana je ruta neovisno u kojem smjeru je usmjerena, koja obilazi čvorove redoslijedom dobivenim izračunom spomenutoga algoritma.



Slika 12. Rješenje rute broj 1 (Istra) s *Clark-Wright-ovim algoritmom ušteta*

Clark-Wright-ov algoritam ušteta – metoda s indikatorom T

U nastavku je prikazana polu-matrica ušteta (tablica 35). Uštete su izračunate pomoću formule (1). Prikazan je osnovni izgled polu-matrice, odnosno polazna matrica ušteta koje su nastale iz početne matrice međusobne udaljenosti. Jedna ušteta prikazuje jednu relaciju između dva čvora, a u prvom retku nalazi se indikator vrijednosti 2, što u prijevodu znači obostrano putovanje, do lokacije te povratak.

Tablica 35. Matrični prikaz ušteta za rutu broj 1 (Istra), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	2	2	2	2	2
x_1		331	332	330	334
x_2			419	442	352
x_3				433	361
x_4					351
x_5					

Rješenje metode s indikatorom T prikazano je u matričnom obliku i pojedinačnim relacijama prema redosljedu izračuna. Projektiranje započinje odabirom najveće uštete u matrici. Odabrana ušteta označuje prvu relaciju u ruti, u ovom slučaju to je ušteta iznosa 442 km, a nalazi se između čvorova x_2 i x_4 . Indikator T se u oba čvora umanjuje za jedan. Stoga, početna relacija je usmjerena od čvora x_2 prema čvoru x_4 . Nakon toga, odabire se sljedeća po veličini ušteta uz uvjet da je indikator $T > 0$ i tako sve dok se ne dobije kompletirana ruta.

Tablica 36. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 1 (Istra), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	1	1	0	0	0
x_1		331	332	330	334 1
x_2			419	442 1	352
x_3				433 1	361 1
x_4					351
x_5					

$$x_2 \rightarrow x_4 \rightarrow 2 \leftrightarrow 4,$$

$$x_4 \rightarrow x_3 \rightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3,$$

$$x_3 \rightarrow x_5 \rightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5,$$

$$x_5 \rightarrow x_1 \rightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 1,$$

$$x_1 \rightarrow x_0 \rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 0 = 493 \text{ km.}$$

Metoda najbližeg susjeda

Metoda najbližeg susjeda rješava se odabirom minimalnih udaljenosti u matrici, istim postupkom kao u primjeru izračuna rute broj 1 na području Slavonije. U nastavku se nalazi ispunjena matrica udaljenosti (tablica 37) uz prikaz pojedinačnih relacija te prikaz kompletirane rute.

Tablica 37. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 1 (Istra), Metoda najbližeg susjeda

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	0	167	221	227	236	180
x_1	167	0	57	62	73	13
x_2	221	57	0	29	15	49
x_3	227	62	29	0	30	46
x_4	236	73	15	30	0	65
x_5	180	13	49	46	65	0

$$x_0 \rightarrow x_1,$$

$$x_1 \rightarrow x_5 \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5,$$

$$x_5 \rightarrow x_3 \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3,$$

$$x_3 \rightarrow x_2 \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 2,$$

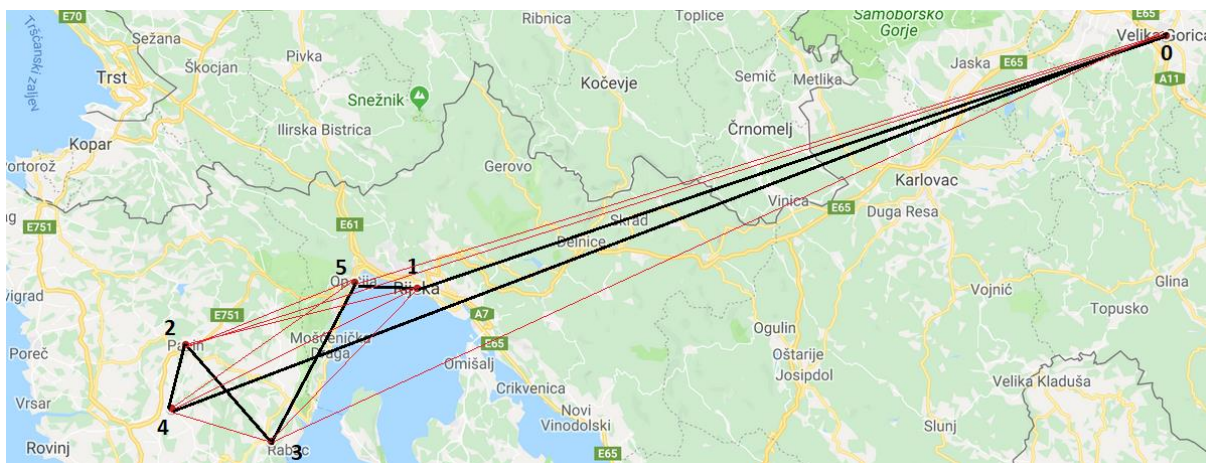
$$x_2 \rightarrow x_4 \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4,$$

$$x_4 \rightarrow x_0 \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0 = 506 \text{ km.}$$

Christofides-ov algoritam

Na slici 13 nalazi se rješenje najkraćeg puta prema metodi *Christofides-ovog algoritma*. Crvene linije označavaju međusobne udaljenosti između vrhova, dok crne označavaju konačno rješenje, odnosno kompletiranu rutu *Christofides-ovog algoritma* prema postupku opisanom kod izračuna prve rute na području Slavonije. Rješenje:

$$0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0 = 506 \text{ km.}$$



Slika 13. Rješenje rute broj 1 (Istra) s *Christofides-ovim algoritmom*

4.2.2. Ruta broj 2

U drugoj ruti na području Istre početna i završna točka je Velika Gorica, a potrebno je opskrbiti robom ostalih šest lokacija, kao što je prikazano u tablici 38. Za preostale rute, uključujući i ovu, kod svakog izračuna metoda, bit će prikazan samo početak izračuna te krajnje rješenje. Postupci izračuna su identični kao i za rutu 1 na području Slavonije gdje su detaljno objašnjeni.

Tablica 38. Podaci o ruti broj 2 (Istra)

Čvor	Lokacija	Udaljenost od početne točke (km)
x_0	Velika Gorica	0
x_1	Kukuljanovo	163
x_2	Novigrad	257
x_3	Buzet	215
x_4	Umag	265
x_5	Opatija	180
x_6	Poreč	255

U nastavku je prikazana matrica međusobnih udaljenosti između lokacija (tablica 39) dobivenih pomoću Google Maps-a.

Tablica 39. Matrični prikaz međusobnih udaljenosti za rutu broj 2 (Istra)

	x ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₀	0	163	257	215	265	180	255
x ₁	163	0	101	61	111	25	100
x ₂	257	101	0	41	16	84	18
x ₃	215	61	41	0	45	43	46
x ₄	265	111	16	45	0	93	32
x ₅	180	25	84	43	93	0	83
x ₆	255	100	18	46	32	83	0

Clark-Wright-ov algoritam ušteta

U tablici 40. nalaze se rangirane uštete, od najveće prema najmanjoj, izračunate prema formuli (1).

Tablica 40. Rangirane uštete prema veličini za rutu broj 2 (Istra)

Grana (<i>i, j</i>)	Ušteta (<i>i, j</i>)	Grana (<i>i, j</i>)	Ušteta (<i>i, j</i>)	Grana (<i>i, j</i>)	Ušteta (<i>i, j</i>)
(2,4)	506	(3,6)	424	(1,2)	319
(2,6)	494	(2,5)	353	(1,5)	318
(4,6)	488	(5,6)	352	(1,6)	318
(3,4)	435	(3,5)	352	(1,3)	317
(2,3)	431	(4,5)	352	(1,4)	317

Prema uštedama iz tablice 40 izračunavaju se rute prema rangiranim vrijednostima ušteta, uz zadovoljavanje uvjeta. U nastavku je postupak projektiranja rute:

$$(2,4) \rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0,$$

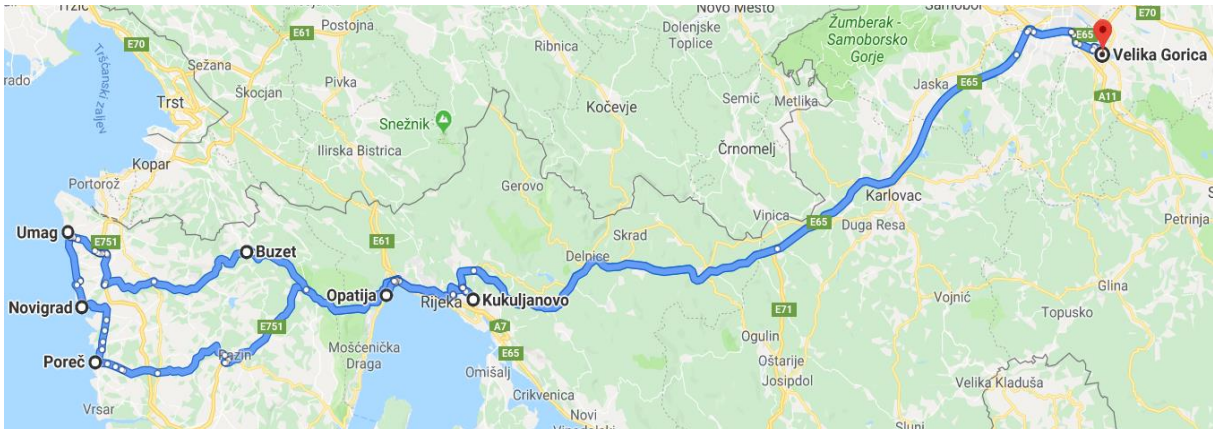
$$(2,6) \rightarrow 0 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0,$$

$$(3,4) \rightarrow 0 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 0,$$

$$(3,5) \rightarrow 0 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0,$$

$$(1,6) \rightarrow 0 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 0 = 565 \text{ km.}$$

Na slici 14 prikazano je rješenje izračuna *Clark-Wright-ovog algoritma* za rutu 2. Prikazana je ruta neovisno u kojem smjeru je usmjerena, koja obilazi čvorove redoslijedom dobivenim izračunom spomenutoga algoritma.



Slika 14. Rješenje rute broj 2 (Istra) s *Clark-Wright-ovim algoritmom* ušteta

Clark-Wright-ov algoritam ušteta – metoda s indikatorom T

U nastavku je prikazana polu-matrica u kojoj se nalaze uštete prema čvorovima (tablica 41). Vrijednosti ušteta se izračunavaju prema formuli (1).

Tablica 41. Matrični prikaz ušteta za rutu broj 2 (Istra), *Clark-Wright-ov algoritam* s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	2	2	2	2	2	2
	x_1	319	317	317	318	318
		x_2	431	506	353	494
			x_3	435	352	424
				x_4	352	488
					x_5	352
						x_6

Sljedeća polu-matrica (tablica 42) prikazuje konačno rješenje metode s indikatorom T, na isti način kao i na izračunu rute broj 1 na području Slavonije.

Tablica 42. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 2 (Istra), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	1	0	1	0	0	0
x_1		319	317	317	318 ¹	318
x_2			431	506 ¹	353	494 ¹
x_3				435 ¹	352	424
x_4					352	488
x_5						352 ¹
x_6						

$$x_2 \rightarrow x_4 \rightarrow 2 \leftrightarrow 4,$$

$$x_6 \rightarrow x_2 \rightarrow 6 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4,$$

$$x_4 \rightarrow x_3 \rightarrow 6 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3,$$

$$x_5 \rightarrow x_6 \rightarrow 5 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3,$$

$$x_1 \rightarrow x_5 \rightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3,$$

$$x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 0 = 565 \text{ km.}$$

Metoda najbližeg susjeda

Odabirom minimalnih vrijednosti (udaljenosti) u matrici izračunava se *Metoda najbližeg susjeda* prema postupku izračuna rute broj 1 na području Slavonije.

Tablica 43. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 2 (Istra), Metoda najbližeg susjeda

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	0	163	257	215	265	180	255
x_1	163	0	101	61	111	25	100
x_2	257	101	0	41	16	84	18
x_3	215	61	41	0	45	43	46
x_4	265	111	16	45	0	93	32
x_5	180	25	84	43	93	0	83
x_6	255	100	18	46	32	83	0

$x_0 \rightarrow x_1$,

$x_1 \rightarrow x_5 \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5$,

$x_5 \rightarrow x_3 \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3$,

$x_3 \rightarrow x_2 \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 2$,

$x_2 \rightarrow x_4 \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4$,

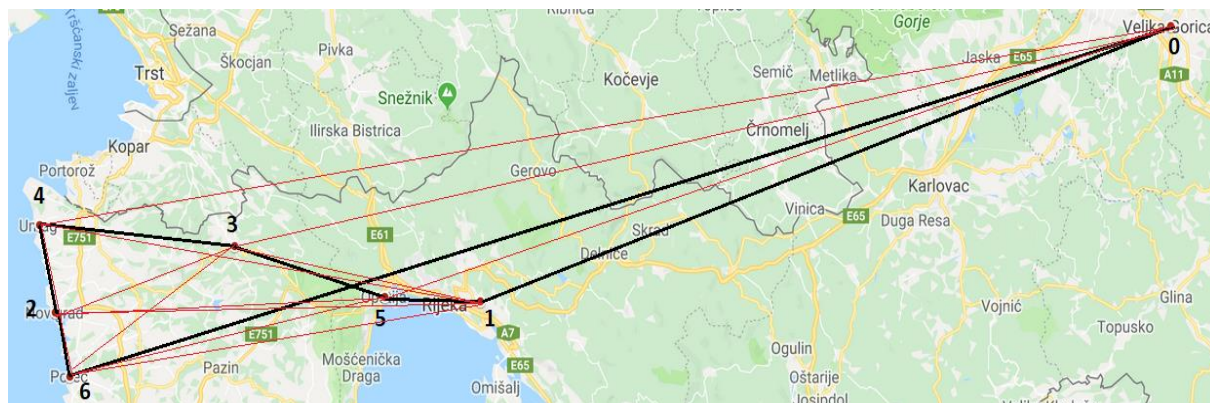
$x_4 \rightarrow x_6 \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6$,

$x_6 \rightarrow x_0 \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 0 = 565 \text{ km}$.

Christofides-ov algoritam

Jednako kao i na izračunu rute broj 1 na području Slavonije, dobiveno je rješenje *Christofides-ovog algoritma*. Na slici 15 prikazano je rješenje najkraćeg puta prema metodi *Christofides-ovog algoritma*. Ruta dobivena *Christofides-ovim algoritmom* glasi:

$0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 0 = 565 \text{ km}$.



Slika 15. Rješenje rute broj 2 (Istra) s *Christofides-ovim algoritmom*

4.2.3. Ruta broj 3

U trećoj ruti na području Istre početna i završna točka je Velika Gorica, a potrebno je opskrbiti robom ostalih pet lokacija, kao što je prikazano u tablici 44. Za preostale rute, uključujući i ovu, kod svakog izračuna metoda, bit će prikazan samo početak izračuna te krajnje rješenje. Postupci izračuna su identični kao i za rutu 1 na području Slavonije gdje su detaljno objašnjeni.

Tablica 44. Podaci o ruti broj 3 (Istra)

Čvor	Lokacija	Udaljenost od početne točke (km)
x_0	Velika Gorica	0
x_1	Pazin	221
x_2	Pula	273
x_3	Rijeka	167
x_4	Rabac	232
x_5	Rovinj	256

U nastavku je prikazana matrica međusobnih udaljenosti između lokacija (tablica 45) dobivenih pomoću Google Maps-a.

Tablica 45. Matrični prikaz međusobnih udaljenosti za rutu broj 3 (Istra)

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	0	221	273	167	232	256
x_1	221	0	54	57	34	37
x_2	273	54	0	102	48	36
x_3	167	57	102	0	67	92
x_4	232	34	48	67	0	60
x_5	256	37	36	92	60	0

Clark-Wright-ov algoritam ušteda

U tablici 46. nalaze se rangirane uštede, prema veličini, izračunate prema formuli (1).

Tablica 46. Rangirane uštede prema veličini za rutu broj 3 (Istra)

Grana (i, j)	Ušteda (i, j)	Grana (i, j)	Ušteda (i, j)
(2,5)	493	(1,4)	419
(2,4)	457	(2,3)	338
(1,5)	440	(3,4)	332
(1,2)	440	(1,3)	331
(4,5)	428	(3,5)	331

Prema uštedama iz tablice 46 izračunavaju se rute prema rangiranim vrijednostima ušteda, uz zadovoljavanje uvjeta. U nastavku je postupak projektiranja rute:

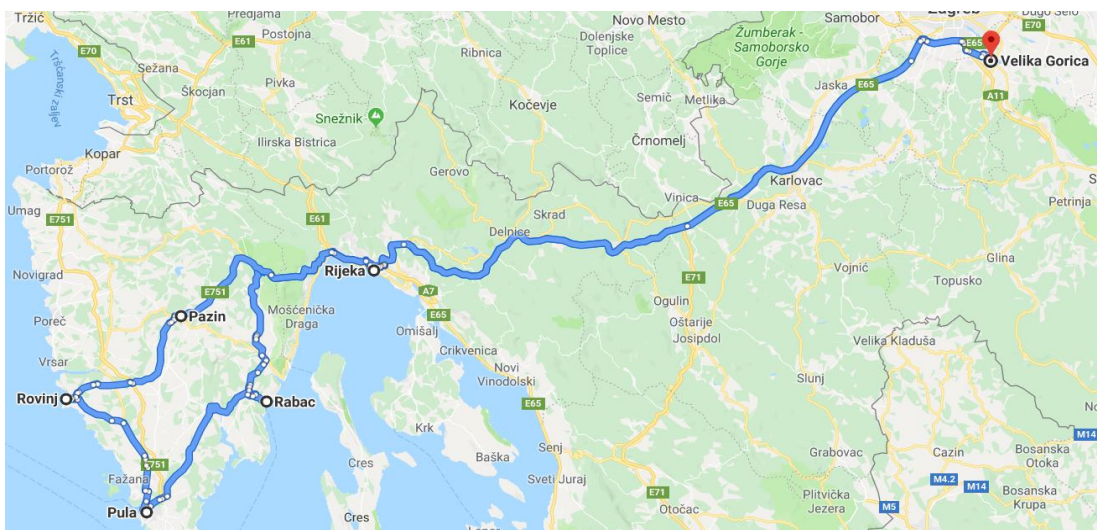
$$(2,5) \rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0,$$

$$(2,4) \rightarrow 0 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0,$$

$$(1,5) \rightarrow 0 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 0,$$

$$(3,4) \rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 0 = 577 \text{ km}.$$

Na slici 16 prikazano je rješenje izračuna Clark-Wright-ovog algoritma za rutu 3. Prikazana je ruta neovisno u kojem smjeru je usmjerena.



Slika 16. Rješenje rute broj 3 (Istra) s Clark-Wright-ovim algoritmom ušteda

Clark-Wright-ov algoritam ušteta – metoda s indikatorom T

U nastavku je prikazana polu-matrica u kojoj se nalaze uštete prema čvorovima (tablica 47). Vrijednosti ušteta se izračunavaju prema formuli (1).

Tablica 47. Matrični prikaz ušteta za rutu broj 3 (Istra), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	2	2	2	2	2
	x_1	440	331	419	440
		x_2	338	457	493
			x_3	332	331
				x_4	428
					x_5

Sljedeća polu-matrica (tablica 48) prikazuje konačno rješenje metode s indikatorom T, na isti način kao i na izračunu rute broj 1 na području Slavonije.

Tablica 48. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 3 (Istra), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	1	0	1	0	0
	x_1	440	331	419	440 ¹
		x_2	338	457 ¹	493 ¹
			x_3	332 ¹	331
				x_4	428
					x_5

$$x_2 \rightarrow x_5 \rightarrow 2 \leftrightarrow 5,$$

$$x_4 \rightarrow x_2 \rightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5,$$

$$x_5 \rightarrow x_1 \rightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 1,$$

$$x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 1,$$

$$x_0 \rightarrow x_3 \rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 0 = 577 \text{ km.}$$

Metoda najbližeg susjeda

Rješenje najkraćeg puta prema *Metodi najbližeg susjeda* prikazano je u nastavku matricom udaljenosti (tablica 49) uz prikaz pojedinačnih relacija i kompletirane rute.

Tablica 49. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 3 (Istra), Metoda najbližeg susjeda

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	0	221	273	167	232	256
x_1	221	0	54	57	34	37
x_2	273	54	0	102	48	36
x_3	167	57	102	0	67	92
x_4	232	34	48	67	0	60
x_5	256	37	36	92	60	0

$$x_0 \rightarrow x_3,$$

$$x_3 \rightarrow x_1 \rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1,$$

$$x_1 \rightarrow x_4 \rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4,$$

$$x_4 \rightarrow x_2 \rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2,$$

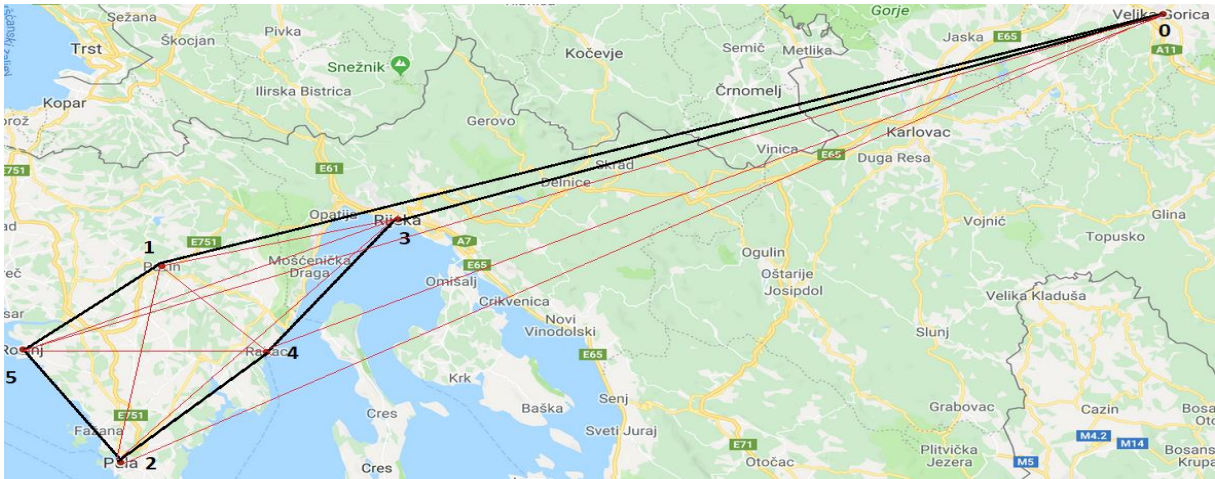
$$x_2 \rightarrow x_5 \rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5,$$

$$x_5 \rightarrow x_0 \rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0 = 598 \text{ km.}$$

Christofides-ov algoritam

Rješenje *Christofides-ovog algoritma* prikazano je na slici 17. Konačna ruta je dobivena na jednak način kao na izračunu rute broj 1 na području Slavonije. Ruta glasi:

$$0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 0 = 577 \text{ km.}$$



Slika 17. Rješenje rute broj 3 (Istra) s *Christofides-ovim algoritmom*

4.3. Rute na području Sjeverne Hrvatske

Nakon što su dobivena rješenja najkraćeg puta pomoću heurističkih metoda za sve navedene rute na području Slavonije i Istre, potrebno je projektirati rute i izračunati najkraći put za rute na području Sjeverne Hrvatske. Na jednak način projektiraju se i izračunavaju rute na području Sjeverne Hrvatske kao i u primjerima Slavonije i Istre.

4.3.1. Ruta broj 1

U prvoj ruti na području Sjeverne Hrvatske početna i završna točka je Velika Gorica, a potrebno je opskrbiti robom ostalih šest lokacija, kao što je prikazano u tablici 50. Za preostale rute, uključujući i ovu, kod svakog izračuna metoda, bit će prikazan samo početak izračuna te krajnje rješenje. Postupci izračuna su identični kao i za rutu 1 na području Slavonije

Tablica 50. Podaci o ruti broj 1 (Sjeverna Hrvatska)

Čvor	Lokacija	Udaljenost od početne točke (km)
x_0	Velika Gorica	0
x_1	Pokupsko	35
x_2	Lasinja	40
x_3	Popovača	64
x_4	Petrinja	44
x_5	Lekenik	21
x_6	Sisak	45

U nastavku je prikazana matrica međusobnih udaljenosti između lokacija (tablica 51) dobivenih pomoću Google Maps-a.

Tablica 51. Matrični prikaz međusobnih udaljenosti za rutu broj 1 (Sj. Hrvatska)

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	0	35	40	64	44	21	45
x_1	35	0	22	62	34	33	37
x_2	40	22	0	85	55	47	58
x_3	64	62	85	0	39	46	25
x_4	44	34	55	39	0	18	16
x_5	21	33	47	46	18	0	20
x_6	45	37	58	25	16	20	0

Clark-Wright-ov algoritam ušteda

U tablici 52. nalaze se rangirane uštede, od najveće prema najmanjoj, izračunate prema formuli (1).

Tablica 52. Rangirane uštede prema veličini za rutu broj 1 (Sjeverna Hrvatska)

Grana (i, j)	Ušteda (i, j)	Grana (i, j)	Ušteda (i, j)	Grana (i, j)	Ušteda (i, j)
(3,6)	84	(5,6)	46	(2,4)	29
(4,6)	73	(1,4)	45	(2,6)	27
(3,4)	69	(1,6)	43	(1,5)	23
(1,2)	53	(3,5)	39	(2,3)	21
(4,5)	47	(1,3)	37	(2,5)	14

Prema uštedama iz tablice 52 izračunavaju se rute prema rangiranim vrijednostima ušteda, uz zadovoljavanje uvjeta. U nastavku je postupak projektiranja rute:

$$(3,6) \rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 0,$$

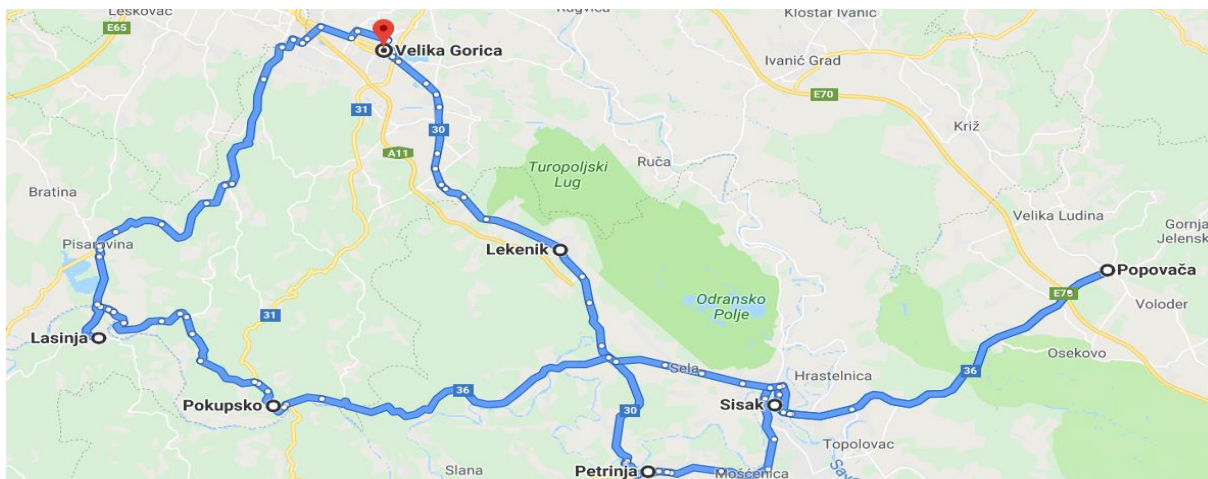
$$(4,6) \rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0,$$

$$(1,2) \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0,$$

$$(4,5) \rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0,$$

$$(1,3) \rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0 = 204 \text{ km.}$$

Na slici 18 prikazano je rješenje izračuna *Clark-Wright-ovog algoritma* za rutu 1. Prikazana je ruta neovisno u kojem smjeru je usmjerena, koja obilazi čvorove redosljedom dobivenim



Slika 18. Rješenje rute broj 1 (Sjeverna Hrvatska) s Clark-Wright-ovim algoritmom ušteta

Clark-Wright-ov algoritam ušteta – metoda s indikatorom T

U nastavku je prikazana polu-matrica ušteta (tablica 53). Uštete su izračunate pomoću formule (1). Prikazan je osnovni izgled polu-matrice, odnosno polazna matrica ušteta koje su nastale iz početne matrice međusobne udaljenosti. Jedna ušteta prikazuje jednu relaciju između dva čvora, a u prvom retku nalazi se indikator vrijednosti 2, što u prijevodu znači obostrano putovanje, do lokacije te povratak.

Tablica 53. Matrični prikaz ušteta za rutu broj 1 (Sj. Hrvatska), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	2	2	2	2	2	2
	x_1	53	37	45	23	43
		x_2	21	29	14	27
			x_3	69	39	84
				x_4	47	73
					x_5	46
						x_6

Rješenje metode s indikatorom T prikazano je u matričnom obliku (tablica 54) i pojedinačnim relacijama prema redosljedu izračuna. Projektiranje započinje odabirom najveće uštede u matrici. U ovom slučaju to je ušteda 84, a nalazi se između čvora x_3 i x_6 . Indikator T se u oba čvora umanjuje za jedan. Početna relacija je usmjerena od čvora x_3 prema čvoru x_6 . Nakon toga, odabire se sljedeća ušteda po veličini uz uvjet da je indikator T > 0.

Tablica 54. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 1 (Sj. Hrvatska), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	0	1	0	0	1	0
x_1		53 ¹	37 ¹	45	23	43
x_2			21	29	14	27
x_3				69	39	84 ¹
x_4					47 ¹	73 ¹
x_5						46
x_6						

$$x_3 \rightarrow x_6 \rightarrow 3 \leftrightarrow 6,$$

$$x_6 \rightarrow x_4 \rightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4,$$

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow 1 \leftrightarrow 2,$$

$$x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5,$$

$$x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow 2 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5,$$

$$x_0 \rightarrow x_2 \rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0 = 204 \text{ km.}$$

Metoda najbližeg susjeda

Metoda najbližeg susjeda rješava se odabirom minimalnih udaljenosti u matrici, istim postupkom kao u primjeru izračuna rute broj 1 na području Slavonije. U nastavku se nalazi ispunjena matrica udaljenosti uz prikaz pojedinačnih relacija te prikaz kompletirane rute.

Tablica 55. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 1 (Sj. Hrvatska), Metoda najbližeg susjeda

	x ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₀	0	35	40	64	44	21	45
x ₁	35	0	22	62	34	33	37
x ₂	40	22	0	85	55	47	58
x ₃	64	62	85	0	39	46	25
x ₄	44	34	55	39	0	18	16
x ₅	21	33	47	46	18	0	20
x ₆	45	37	58	25	16	20	0

$$x_0 \rightarrow x_5,$$

$$x_5 \rightarrow x_4 \rightarrow 0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4,$$

$$x_4 \rightarrow x_6 \rightarrow 0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6,$$

$$x_6 \rightarrow x_3 \rightarrow 0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 3,$$

$$x_3 \rightarrow x_1 \rightarrow 0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1,$$

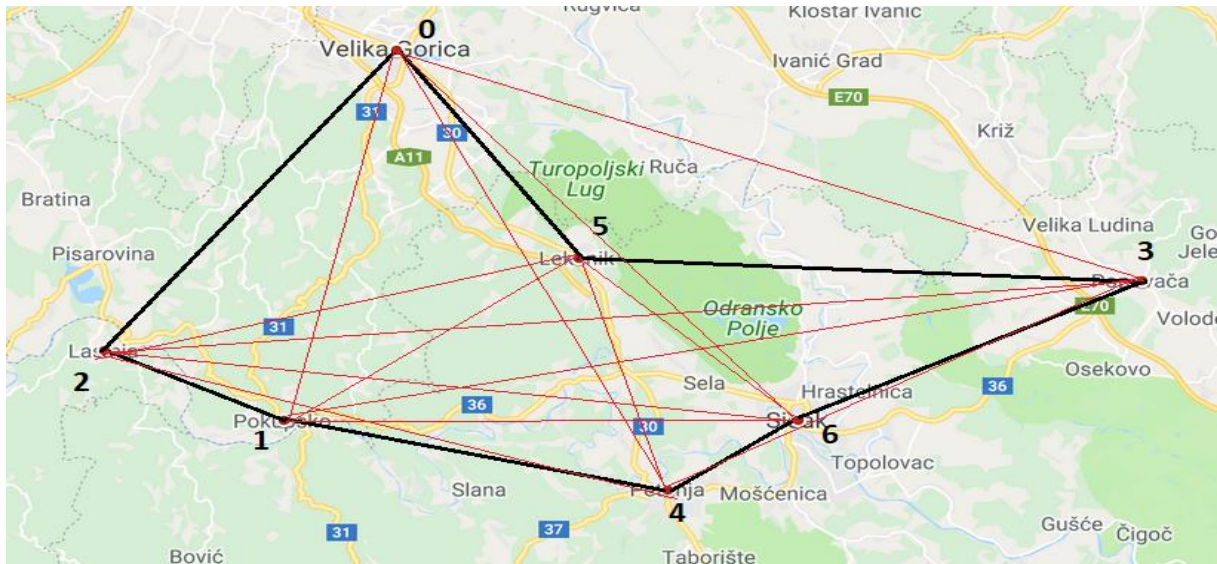
$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow 0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2,$$

$$x_2 \rightarrow x_0 \rightarrow 0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0 = 204 \text{ km.}$$

Christofides-ov algoritam

Grafičko rješenje Christofides-ovog algoritma prikazano je na slici 19. Primjena Christofides-ovog algoritma detaljno je prikazana na primjeru prve rute na području Slavonije. Dobivena ruta glasi:

$$0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0 = 204 \text{ km.}$$



Slika 19. Rješenje rute broj 1 (Sjeverna Hrvatska) s *Christofides-ovim* algoritmom

4.3.2. Ruta broj 2

U drugoj ruti na području Sjeverne Hrvatske početna i završna točka je Velika Gorica, a potrebno je opskrbiti robom ostalih sedam lokacija, kao što je prikazano u tablici 56. Za preostale rute, uključujući i ovu, kod svakog izračuna metoda, bit će prikazan samo početak izračuna te krajnje rješenje. Postupci izračuna su identični kao i za rutu 1 na području Slavonije gdje su detaljno objašnjeni.

Tablica 56. Podaci o ruti broj 2 (Sjeverna Hrvatska)

Čvor	Lokacija	Udaljenost od početne točke (km)
x_0	Velika Gorica	0
x_1	Čakovec	102
x_2	Drnje	109
x_3	Varaždin	85
x_4	Prelog	101
x_5	Đelekovec	121
x_6	Križevci	68
x_7	Lepavina	84

U nastavku je prikazana matrica međusobnih udaljenosti između lokacija (tablica 57) dobivenih pomoću Google Maps-a.

Tablica 57. Matrični prikaz međusobnih udaljenosti za rutu broj 2 (Sj. Hrvatska)

	x ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇
x ₀	0	102	109	85	101	121	68	84
x ₁	102	0	52	15	17	45	71	58
x ₂	109	52	0	57	35	7	42	26
x ₃	85	15	57	0	24	50	49	54
x ₄	101	17	35	24	0	28	55	41
x ₅	121	45	7	50	28	0	43	25
x ₆	68	71	42	49	55	43	0	16
x ₇	84	58	26	54	41	25	16	0

Clark-Wright-ov algoritam ušteta

U tablici 58 nalaze se rangirane uštete, od najveće prema najmanjoj, izračunate prema formuli (1).

Tablica 58. Rangirane uštete prema veličini za rutu broj 2 (Sjeverna Hrvatska)

Grana (<i>i, j</i>)	Ušteta (<i>i, j</i>)	Grana (<i>i, j</i>)	Ušteta (<i>i, j</i>)	Grana (<i>i, j</i>)	Ušteta (<i>i, j</i>)
(2,5)	223	(2,7)	167	(6,7)	136
(4,5)	194	(3,4)	162	(2,6)	135
(1,4)	186	(1,2)	159	(1,7)	128
(5,7)	180	(3,5)	156	(3,7)	115
(1,5)	178	(5,6)	146	(4,6)	114
(2,4)	175	(4,7)	144	(3,6)	104
(1,3)	172	(2,3)	137	(1,6)	99

Prema uštedama iz tablice 58 izračunavaju se rute prema rangiranim vrijednostima ušteta, uz zadovoljavanje uvjeta. U nastavku je postupak projektiranja rute:

$(2,5) \rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0,$

$(4,5) \rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0,$

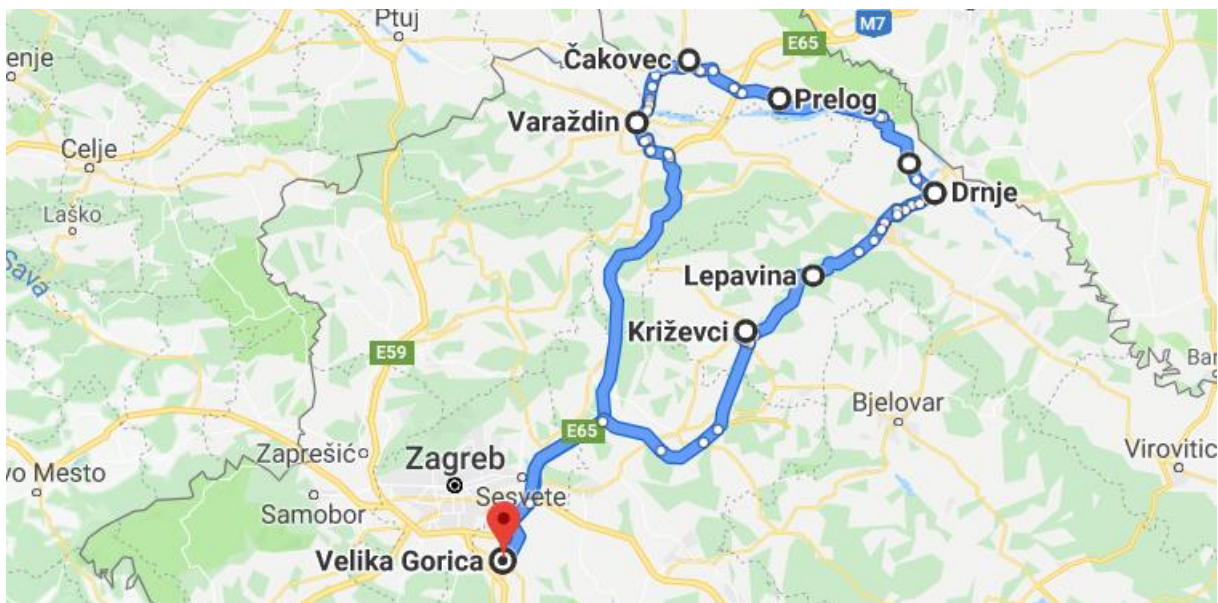
$(1,4) \rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 0,$

$(1,3) \rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 0,$

$(2,7) \rightarrow 0 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 0,$

$(6,7) \rightarrow 0 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 0 = 262 \text{ km}.$

Na slici 20 prikazano je rješenje izračuna *Clark-Wright-ovog algoritma* za rutu 2. Prikazana je ruta neovisno u kojem smjeru je usmjerena, koja obilazi čvorove redoslijedom dobivenim izračunom spomenutoga algoritma.



Slika 20. Rješenje rute broj 2 (Sjeverna Hrvatska) s *Clark-Wright-ovim algoritmom* ušteda

Clark-Wright-ov algoritam ušteta – metoda s indikatorom T

U nastavku je prikazana polu-matrica u kojoj se nalaze uštete prema čvorovima (tablica 59). Vrijednosti ušteta se izračunavaju prema formuli (1).

Tablica 59. Matrični prikaz ušteta za rutu broj 2 (Sj. Hrvatska), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	2	2	2	2	2	2	2
x_1		159	172	186	178	99	128
x_2			137	175	223	135	167
x_3				162	156	104	115
x_4					194	114	144
x_5						146	180
x_6							136
x_7							

Sljedeća polu-matrica (tablica 60) prikazuje konačno rješenje metode s indikatorom T, na isti način kao i na izračunu rute broj 1 na području Slavonije.

Tablica 60. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 2 (Sj. Hrvatska), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	0	0	1	0	0	1	0
x_1		159	172 ¹	186 ¹	178	99	128
x_2			137	175	223 ¹	135	167 ¹
x_3				162	156	104	115
x_4					194 ¹	114	144
x_5						146	180
x_6							136 ¹
x_7							

$$x_5 \rightarrow x_2 \rightarrow 5 \leftrightarrow 2,$$

$$x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow 4 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2$$

$$x_1 \rightarrow x_4 \rightarrow 1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2$$

$$x_3 \rightarrow x_1 \rightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2$$

$$x_2 \rightarrow x_7 \rightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 7$$

$$x_7 \rightarrow x_6 \rightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 6$$

$$x_6 \rightarrow x_0 \rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 0 = 262 \text{ km.}$$

Metoda najbližeg susjeda

Metoda najbližeg susjeda rješava se odabirom minimalnih udaljenosti u matrici, istim postupkom kao u primjeru izračuna rute broj 1 na području Slavonije. U nastavku se nalazi ispunjena matrica udaljenosti (tablica 61) uz prikaz pojedinačnih relacija te prikaz kompletirane rute.

Tablica 61. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 2 (Sj. Hrvatska), Metoda najbližeg susjeda

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	0	102	109	85	101	121	68	84
x_1	102	0	52	15	17	45	71	58
x_2	109	52	0	57	35	7	42	26
x_3	85	15	57	0	24	50	49	54
x_4	101	17	35	24	0	28	55	41
x_5	121	45	7	50	28	0	43	25
x_6	68	71	42	49	55	43	0	16
x_7	84	58	26	54	41	25	16	0

$$x_0 \rightarrow x_6,$$

$$x_6 \rightarrow x_7 \rightarrow 0 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 7,$$

$$x_7 \rightarrow x_5 \rightarrow 0 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 5,$$

$$x_5 \rightarrow x_2 \rightarrow 0 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2,$$

$$x_2 \rightarrow x_4 \rightarrow 0 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4,$$

$$x_4 \rightarrow x_1 \rightarrow 0 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 1,$$

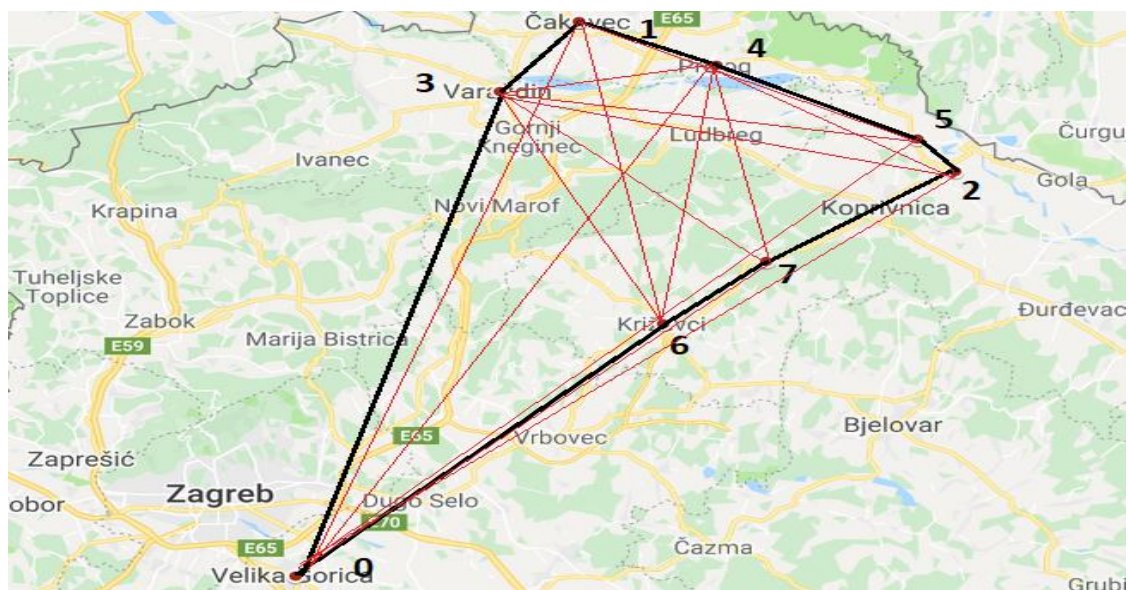
$$x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow 0 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 3,$$

$$x_3 \rightarrow x_0 \rightarrow 0 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 0 = 268 \text{ km.}$$

Christofides-ov algoritam

Prema postupku kao u prethodnim primjerima te detaljno objašnjenom principu kod izračuna prve metode, dobiveno je rješenje za najkraći put prema *Christofides-ovom algoritmu*, a rješenje je prikazano na slici 21. Kompletirana ruta glasi:

$$0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 0 = 262 \text{ km.}$$



Slika 21. Rješenje rute broj 2 (Sjeverna Hrvatska) s *Christofides-ovim algoritmom*

4.3.3. Ruta broj 3

U trećoj ruti na području Sjeverne Hrvatske početna i završna točka je Velika Gorica, a potrebno je opskrbiti robom ostalih pet lokacija, kao što je prikazano u tablici 62.

Za preostale rute, uključujući i ovu, kod svakog izračuna metoda, bit će prikazan samo početak izračuna te krajnje rješenje. Postupci izračuna su identični kao i za rutu 1 na području Slavonije gdje su detaljno objašnjeni.

Tablica 62. Podaci o ruti broj 3 (Sjeverna Hrvatska)

Čvor	Lokacija	Udaljenost od početne točke (km)
x_0	Velika Gorica	0
x_1	Novi Marof	66
x_2	Ivanec	82
x_3	Zabok	53
x_4	Sveti Ivan Zelina	38
x_5	Krapina	68

U nastavku je prikazana matrica međusobnih udaljenosti između lokacija (tablica 63) dobivenih pomoću Google Maps-a.

Tablica 63. Matrični prikaz međusobnih udaljenosti za rutu broj 3 (Sj. Hrvatska)

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	0	66	82	53	38	68
x_1	66	0	26	50	32	56
x_2	82	26	0	39	47	30
x_3	53	50	39	0	41	18
x_4	38	32	47	41	0	49
x_5	68	56	30	18	49	0

Clark-Wright-ov algoritam ušteta

U tablici 64. nalaze se rangirane uštete, izračunate prema formuli (1).

Tablica 64. Rangirane uštete prema veličini za rutu broj 3 (Sjeverna Hrvatska)

Grana (i, j)	Ušteta (i, j)	Grana (i, j)	Ušteta (i, j)
(1,2)	122	(2,4)	73
(2,5)	120	(1,4)	72
(3,5)	103	(1,3)	69
(2,3)	96	(4,5)	57
(1,5)	78	(3,4)	50

Prema uštedama iz tablice 64 izračunavaju se rute prema rangiranim vrijednostima ušteta, uz zadovoljavanje uvjeta. U nastavku je postupak projektiranja rute:

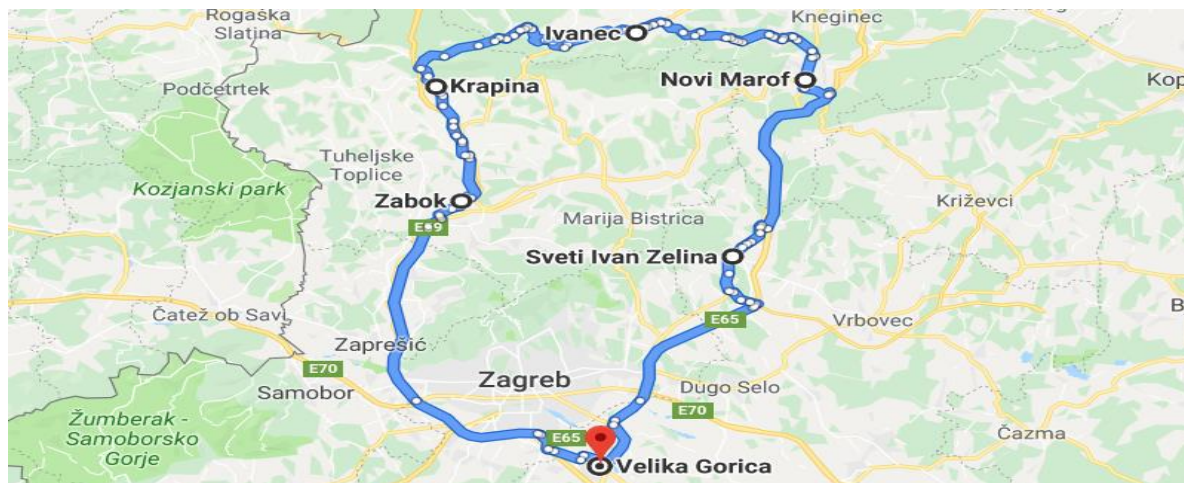
(1,2) $\rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0$,

(2,5) $\rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0$,

(3,5) $\rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 0$,

(1,4) $\rightarrow 0 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 0 = 197 \text{ km}$.

Na slici 22 prikazano je rješenje izračuna Clark-Wright-ovog algoritma za rutu 3. Prikazana je ruta neovisno u kojem smjeru je usmjerena, koja obilazi čvorove redosljedom dobivenim izračunom spomenutoga algoritma.



Slika 22. Rješenje rute broj 3 (Sjeverna Hrvatska) s Clark-Wright-ovim algoritmom ušteta

Clark-Wright-ov algoritam ušteta – metoda s indikatorom T

U nastavku je prikazana polu-matrica u kojoj se nalaze uštete prema čvorovima (tablica 65). Vrijednosti ušteta se izračunavaju prema formuli (1).

Tablica 65. Matrični prikaz ušteta za rutu broj 3 (Sj. Hrvatska), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	2	2	2	2	2
x_1		122	69	72	78
x_2			96	73	120
x_3				50	103
x_4					57
x_5					

Sljedeća polu-matrica prikazuje konačno rješenje metode s indikatorom T (tablica 66), na isti način kao i na izračunu rute broj 1 na području Slavonije.

Tablica 66. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 3 (Sj. Hrvatska), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	0	0	1	1	0
x_1		122 ¹	69	72 ¹	78
x_2			96	73	120 ¹
x_3				50	103 ¹
x_4					57
x_5					

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow 1 \leftrightarrow 2,$$

$$x_2 \rightarrow x_5 \rightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5,$$

$$x_5 \rightarrow x_3 \rightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3,$$

$$x_4 \rightarrow x_1 \rightarrow 4 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3,$$

$$x_0 \rightarrow x_4 \rightarrow 0 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 0 = 197 \text{ km.}$$

Metoda najbližeg susjeda

Metoda najbližeg susjeda rješava se odabirom minimalnih udaljenosti u matrici, istim postupkom kao u primjeru izračuna rute broj 1 na području Slavonije. U nastavku se nalazi ispunjena matrica udaljenosti (tablica 67) uz prikaz pojedinačnih relacija te prikaz kompletirane rute.

Tablica 67. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 3 (Sj. Hrvatska), Metoda najbližeg susjeda

	x ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅
x ₀	0	66	82	53	38	68
x ₁	66	0	26	50	32	56
x ₂	82	26	0	39	47	30
x ₃	53	50	39	0	41	18
x ₄	38	32	47	41	0	49
x ₅	68	56	30	18	49	0

$$x_0 \rightarrow x_4,$$

$$x_4 \rightarrow x_1 \rightarrow 0 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 1,$$

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow 0 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2,$$

$$x_2 \rightarrow x_5 \rightarrow 0 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5,$$

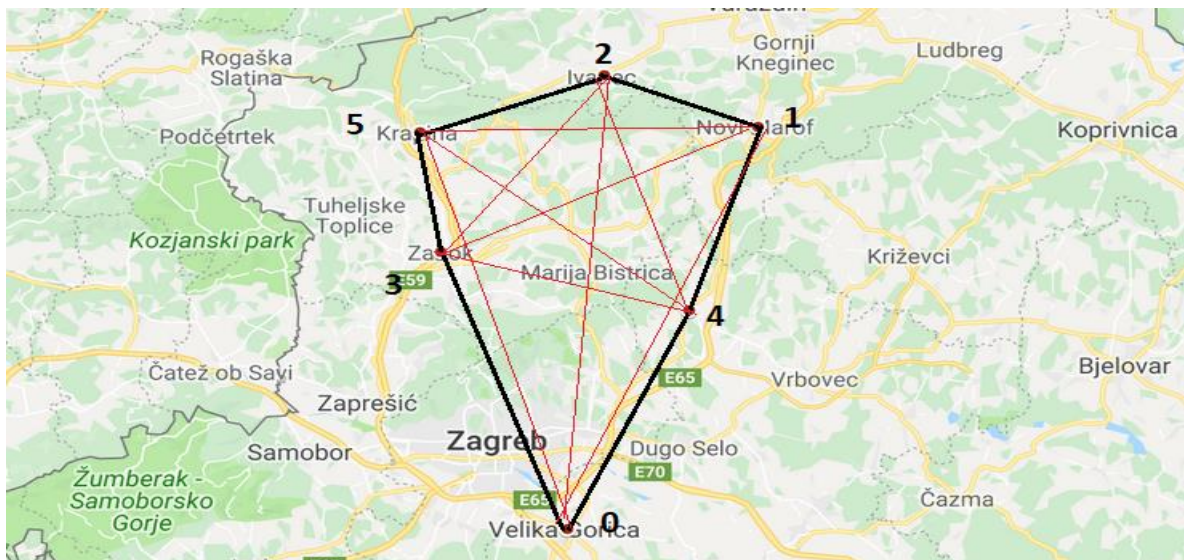
$$x_5 \rightarrow x_3 \rightarrow 0 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3,$$

$$x_3 \rightarrow x_0 \rightarrow 0 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 0 = 197 \text{ km.}$$

Christofides-ov algoritam

Na jednak način kao na izračunu rute broj 1 na području Slavonije, dobiveno je rješenje najkraćeg puta pomoću *Christofides-ovog algoritma*. Na slici 23 crnim linijama prikazana je ruta kao rješenje navedenog algoritma. Rješenje je:

$$0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0 = 197 \text{ km.}$$



Slika 23. Rješenje rute broj 3 (Sjeverna Hrvatska) s *Christofides-ovim algoritmom*

4.3.4. Ruta broj 4

U četvrtoj ruti na području Sjeverne Hrvatske početna i završna točka je Velika Gorica, a potrebno je opskrbiti robom ostalih šest lokacija, kao što je prikazano u tablici 68. Za preostale rute, uključujući i ovu, kod svakog izračuna metoda, bit će prikazan samo početak izračuna te krajnje rješenje. Postupci izračuna su identični kao i za rutu 1 na području Slavonije gdje su detaljno objašnjeni.

Tablica 68. Podaci o ruti broj 4 (Sjeverna Hrvatska)

Čvor	Lokacija	Udaljenost od početne točke (km)
x_0	Velika Gorica	0
x_1	Varaždin	85
x_2	Kapela	91
x_3	Ludbreg	96
x_4	Koprivnica	100
x_5	Bjelovar	83
x_6	Đurđevac	110

U nastavku je prikazana matrica međusobnih udaljenosti između lokacija (tablica 69) dobivenih pomoću Google Maps-a.

Tablica 69. Matrični prikaz međusobnih udaljenosti za rutu broj 4 (Sj. Hrvatska)

	x ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₀	0	85	91	96	100	83	110
x ₁	85	0	73	26	47	109	75
x ₂	91	73	0	46	28	12	24
x ₃	96	26	46	0	20	59	49
x ₄	100	47	28	20	0	40	27
x ₅	83	109	12	59	40	0	30
x ₆	110	75	24	49	27	30	0

Clark-Wright-ov algoritam ušteda

U tablici 70 nalaze se rangirane uštede, od najveće prema najmanjoj, izračunate prema formuli (1).

Tablica 70. Rangirane uštede prema veličini za rutu broj 4 (Sjeverna Hrvatska)

Grana (<i>i, j</i>)	Ušteda (<i>i, j</i>)	Grana (<i>i, j</i>)	Ušteda (<i>i, j</i>)	Grana (<i>i, j</i>)	Ušteda (<i>i, j</i>)
(4,6)	183	(2,5)	162	(1,4)	138
(2,6)	177	(3,6)	157	(1,6)	120
(3,4)	176	(1,3)	155	(3,5)	120
(5,6)	163	(4,5)	143	(1,2)	103
(2,4)	163	(2,3)	141	(1,5)	59

Prema uštedama iz tablice 70 izračunavaju se rute prema rangiranim vrijednostima ušteda, uz zadovoljavanje uvjeta. U nastavku je postupak projektiranja rute:

$(4,6) \rightarrow 0 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 0,$

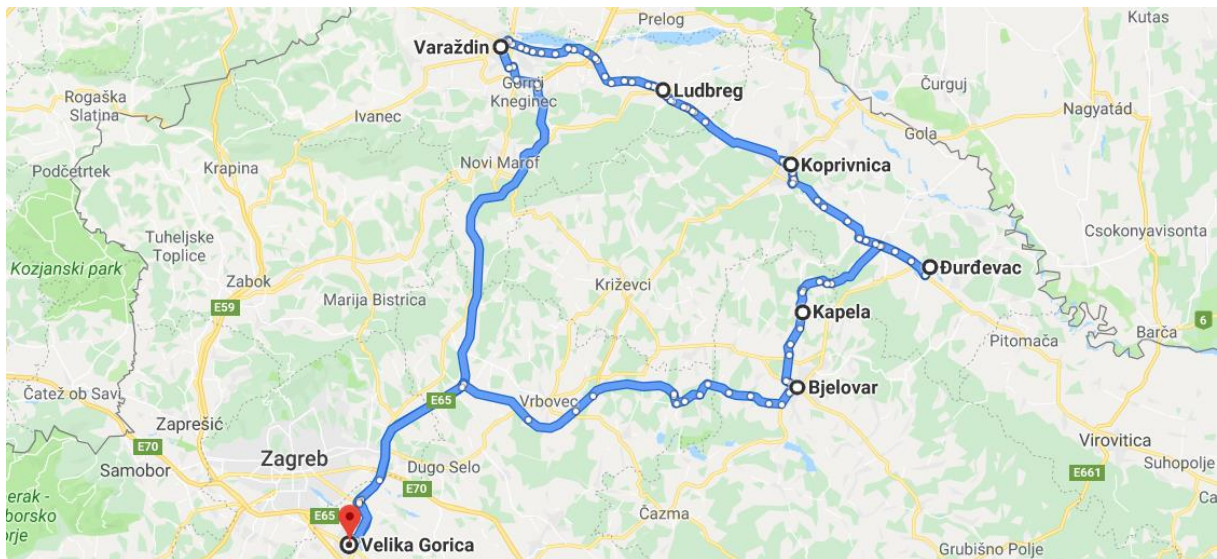
$(2,6) \rightarrow 0 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0,$

$(3,4) \rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 0,$

$(2,5) \rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0,$

$(1,3) \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0 = 277 \text{ km}.$

Na slici 24 prikazano je rješenje izračuna *Clark-Wright-ovog algoritma* za rutu 4. Prikazana je ruta neovisno u kojem smjeru je usmjerena, koja obilazi čvorove redosljedom dobivenim izračunom spomenutoga algoritma.



Slika 24. Rješenje rute broj 4 (Sjeverna Hrvatska) s *Clark-Wright-ovim algoritmom* ušteda

Clark-Wright-ov algoritam ušteta – metoda s indikatorom T

U nastavku je prikazana polu-matrica u kojoj se nalaze uštete prema čvorovima (tablica 71). Vrijednosti ušteta se izračunavaju prema formuli (1).

Tablica 71. Matrični prikaz ušteta za rutu broj 4 (Sj. Hrvatska), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	2	2	2	2	2	2
x_1		103	155	138	59	120
x_2			141	163	162	177
x_3				176	120	157
x_4					143	183
x_5						163
x_6						

Sljedeća polu-matrica prikazuje konačno rješenje metode s indikatorom T (tablica 72), na isti način kao i na izračunu rute broj 1 na području Slavonije.

Tablica 72. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 4 (Sj. Hrvatska), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	1	0	0	0	1	0
x_1		103 ¹	155	138	59	120
x_2			141	163	162 ¹	177 ¹
x_3				176 ¹	120	157
x_4					143	183 ¹
x_5						163
x_6						

$$x_4 \rightarrow x_6 \rightarrow 4 \leftrightarrow 6,$$

$$x_6 \rightarrow x_2 \rightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 2,$$

$$x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 2,$$

$$x_2 \rightarrow x_5 \rightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5,$$

$$x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow 1 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5,$$

$$x_0 \rightarrow x_2 \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0 = 277 \text{ km.}$$

Metoda najbližeg susjeda

Metoda najbližeg susjeda rješava se odabirom minimalnih udaljenosti u matrici, istim postupkom kao u primjeru izračuna rute broj 1 na području Slavonije. U nastavku se nalazi ispunjena matrica udaljenosti (tablica 73) uz prikaz pojedinačnih relacija te prikaz kompletirane rute.

Tablica 73. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 4 (Sj. Hrvatska), Metoda najbližeg susjeda

	x ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₀	0	85	91	96	100	83	110
x ₁	85	0	73	26	47	109	75
x ₂	91	73	0	46	28	12	24
x ₃	96	26	46	0	20	59	49
x ₄	100	47	28	20	0	40	27
x ₅	83	109	12	59	40	0	30
x ₆	110	75	24	49	27	30	0

$$x_0 \rightarrow x_5,$$

$$x_5 \rightarrow x_2 \rightarrow 0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2,$$

$$x_2 \rightarrow x_6 \rightarrow 0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 6,$$

$$x_6 \rightarrow x_4 \rightarrow 0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4,$$

$$x_4 \rightarrow x_3 \rightarrow 0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3,$$

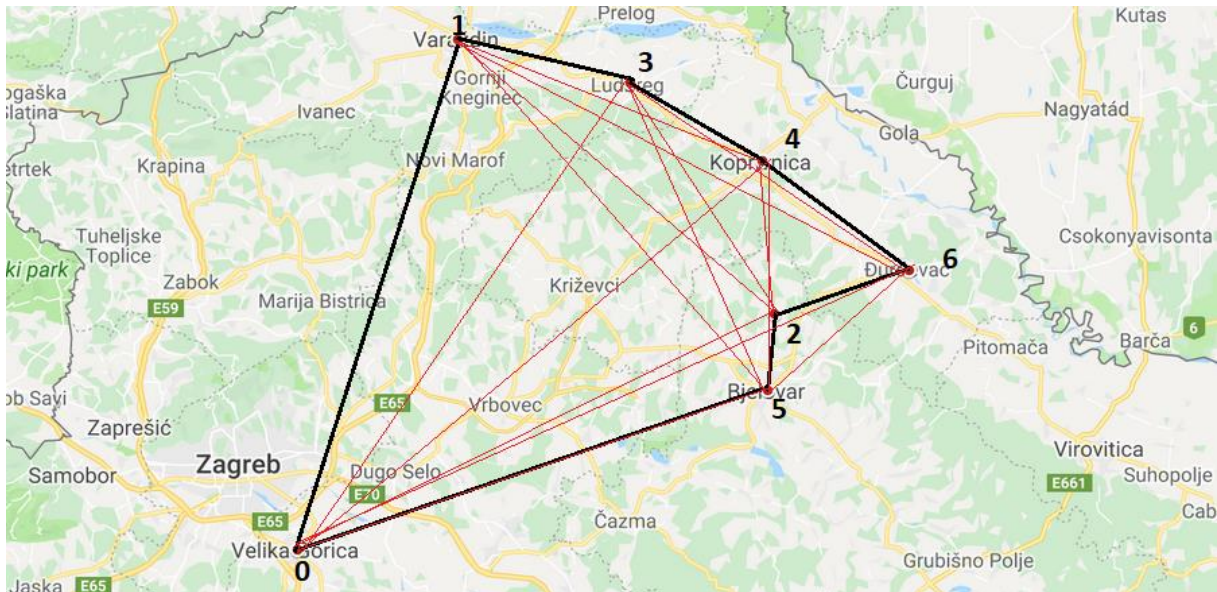
$$x_3 \rightarrow x_1 \rightarrow 0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1,$$

$$x_1 \rightarrow x_0 \rightarrow 0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 0 = 277 \text{ km.}$$

Christofides-ov algoritam

Rješenje *Christofides-ovog algoritma* prikazano je crnim linijama, a nalazi se na slici 25. Rješenje je dobiveno jednakim načinom kao i ranije navedenim primjerima. Ruta glasi:

$$0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0 = 277 \text{ km.}$$



Slika 25. Rješenje rute broj 4 (Sjeverna Hrvatska) s *Christofides-ovim algoritmom*

5. ANALIZA REZULTATA ISTRAŽIVANJA

Nakon izračuna i projektiranja svih ruta prema heurističkim metodama koje su se koristile u ovom radu, dobiveni rezultati će se usporediti te će se izdvojiti najkraći dobiveni put za svaku rutu, odnosno najbolje rješenje (Tablica 74).

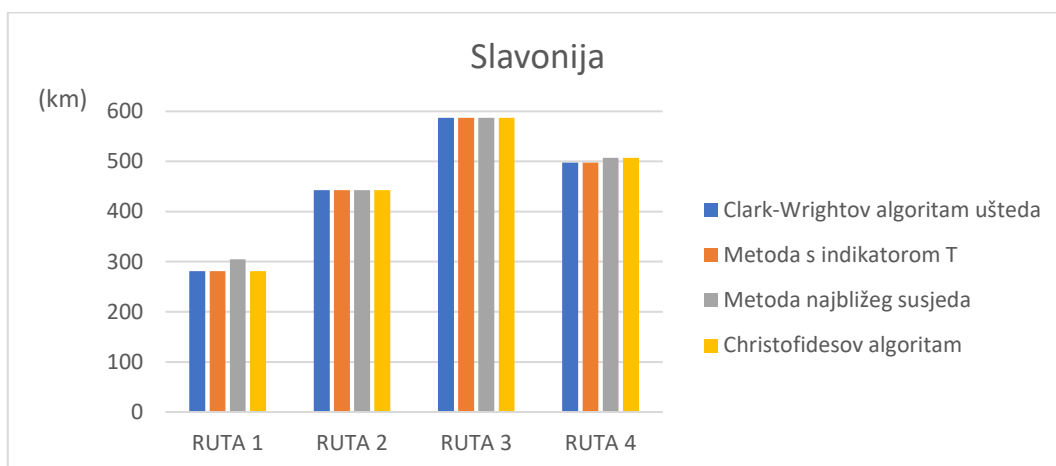
Tablica 74. Rezultati dobiveni heurističkim metodama

<i>Ruta</i>	<i>Clark-Wright- ov algoritam ušteta (km)</i>	<i>Metoda s indikatorom T (km)</i>	<i>Metoda najbližeg susjeda (km)</i>	<i>Christofides- ov algoritam (km)</i>	<i>Najbolje rješenje (km)</i>
<i>Ruta 1 (Slavonija)</i>	281	281	305	281	281
<i>Ruta 2 (Slavonija)</i>	443	443	443	443	443
<i>Ruta 3 (Slavonija)</i>	587	587	587	587	587
<i>Ruta 4 (Slavonija)</i>	498	498	507	507	498
<i>Ruta 1 (Istra)</i>	493	493	506	506	493
<i>Ruta 2 (Istra)</i>	565	565	565	565	565
<i>Ruta 3 (Istra)</i>	577	577	598	577	577
<i>Ruta 1 (Sj. Hrvatska)</i>	204	204	204	204	204
<i>Ruta 2 (Sj. Hrvatska)</i>	262	262	268	262	262
<i>Ruta 3 (Sj. Hrvatska)</i>	197	197	197	197	197
<i>Ruta 4 (Sj. Hrvatska)</i>	277	277	277	277	277

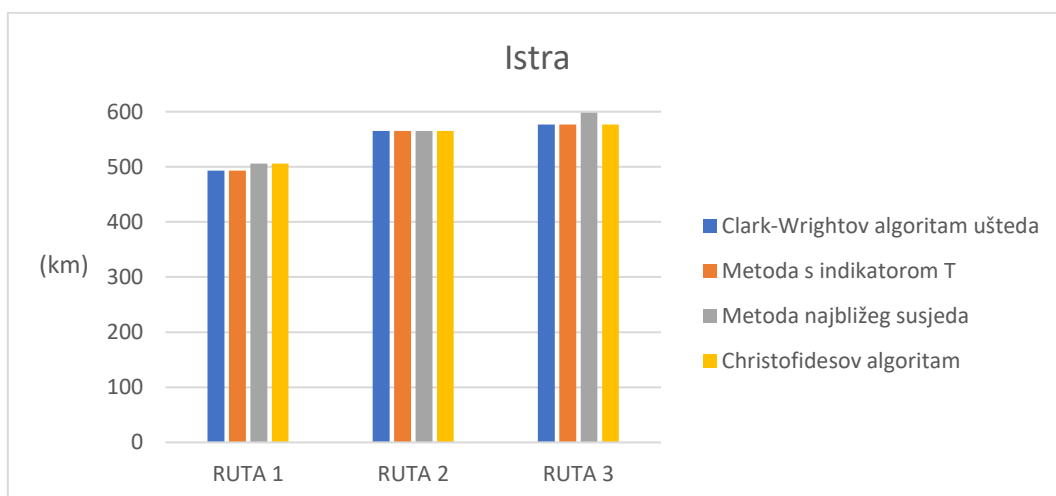
Kao što je vidljivo iz tablice 74, *Clark-Wright-ov algoritam ušteda* i *Clark-Wright-ov algoritam ušteda – metoda s indikatorom T* daju najbolja rješenja za svih jedanaest analiziranih ruta, odnosno 100% promatranih slučajeva. Postupak računanja tih dviju metoda nije identičan, iako su im krajnji rezultati jednaki jer obje metode računaju uštede istom formulom (1).

Metoda najbližeg susjeda učinkovito je najlošija metoda koja se koristila u ovome radu. Od sveukupno jedanaest ruta, ova metoda dala je najbolje rješenje za njih šest, odnosno 54,5%. Posljednjom metodom, *Christofides-ovim algoritmom*, najbolje rješenje dobiveno je kod devet od mogućih jedanaest ruta, što predstavlja da je metodom izračuna najkraćeg puta *Christofides-ovim algoritmom* najbolje rješenje dobiveno kod 81,8%

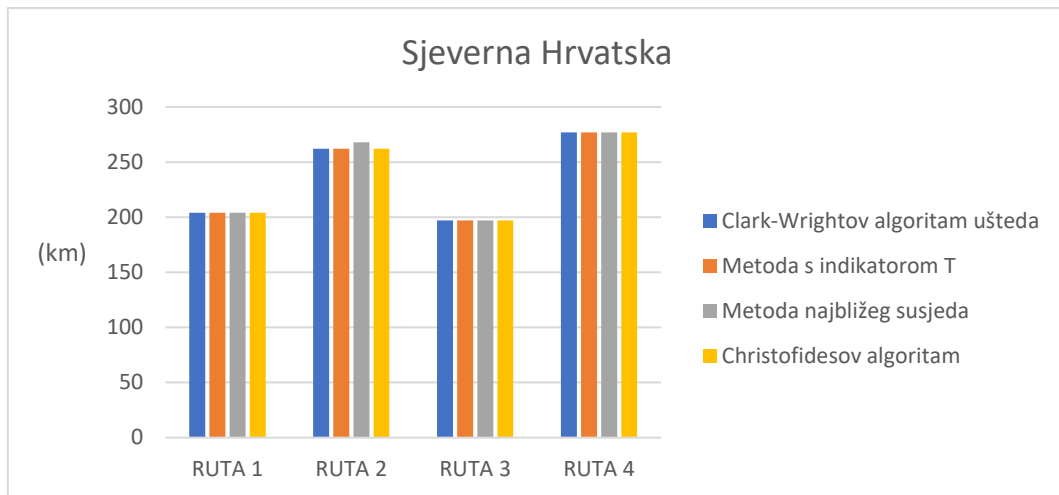
Odnosi između ruta pojedinih vozila na određenim područjima i danih rješenja u kilometrima prikazani su sljedećim grafikonima:



Grafikon 1. Odnos dobivenih rješenja i ruta (Slavonija)



Grafikon 2. Odnos dobivenih rješenja i ruta (Istra)



Grafikon 3. Odnos dobivenih rješenja i ruta (Sjeverna Hrvatska)

Kao što je vidljivo više odstupanja se pojavljuju na području Istre i na području Slavonije, a odstupanja na području Sjeverne Hrvatske gotovo da ih i nema. Samo jedna metoda na području Sjeverne Hrvatske u jednoj ruti od mogućih četiri, ima različito rješenje, a ta metoda je *Metoda najbližeg susjeda*. Na to utječe udaljenost početne točke, tj. početnog čvora od ostalih lokacija, gdje je navedena udaljenost veća kod ruta na području Istre i Slavonije u odnosu na područje Sjeverne Hrvatske.

6. ZAKLJUČAK

Transportni problem je dobro poznato pitanje s kojim se suočava većina tvrtki. Prijevoz je obično glavna komponenta logističkog proračuna tvrtke. Neučinkovit prijevoz stvara nepotrebne troškove koji mogu dovesti do rasipanja velikih količina novca pojedinih tvrtki te zbog toga planiranje transportne mreže jedan je od glavnih zadataka tvrtke. Potrebno mu je posvetiti dovoljno vremena i pažnje te niz kvalitetnih analiza kako bi se utvrdilo na koje načine je moguće smanjiti transportne troškove i povećati efikasnost.

Štoviše, za složenije probleme s velikim brojem lokacija i odredišta, optimalno rješenje često nije moguće u razumnom vremenu. Zbog toga je potrebno koristiti heurističke metode (algoritme) koji kombiniraju vremensku učinkovitost i sposobnost približavanja optimalnom rješenju. Međutim, točnost tih metoda obično se osigurava na račun dodatnih izračuna. To stvara izazov balansiranja između kratkog vremena obrade i preciznih izračuna pri pronalaženju načina rješavanja transportnog problema. U današnje vrijeme postoji mnogo programskih alata za određivanje ruta prijevoza, ali od izuzetne važnosti je detaljno definirati problem te odlučiti koji programski alat pogodan za korištenje.

Na temelju istraživanja provedenog u ovom diplomskom radu može se zaključiti kako organizacijom ruta prijevoza, temeljeno na izračunu najkraćeg puta, postoji mogućnost smanjenja troškova transporta. Organizacijom ruta prijevoza, s obzirom na udaljenosti centralnog čvora (skladišta) i lokacija odredišta, uzimajući u obzir i povrat u centralno skladište moguće je smanjiti transportni put te time također smanjiti troškove. Smanjenjem transportnog puta, odnosno smanjenjem broja putničkih kilometara koja vozila prijeđu određenom rutom mogu se smanjiti troškovi kvara, troškovi goriva, vrijeme potrebno za dostavu robe itd.

Projektiranjem ruta i izračunom najkraćeg puta primjenom heurističkih metoda, vidljivo je da metode Clark-Wrightov algoritam i Metoda indikatora T daju najbolja rješenja u svim primjerima u radu. Zatim slijedi Christofides-ov algoritam te na kraju Metoda najbližeg susjeda. Pravilnom organizacijom ruta prijevoza moguće je povećati dostupnost robe za krajnjeg korisnika, a samim time i povećanu mogućnost prodaje, budući da je cilj svake tvrtke ostvariti zaradu i zadovoljiti zahtjeve korisnika.

LITERATURA

- [1] John J Liu: Supply Chain Management and Transport Logistics, Routledge, 2011.
- [2] URL: <http://tehnika.lzmk.hr/transportna-logistika/> (Pristupljeno: svibanj 2018.)
- [3] Protega, V.: Auditorizirana predavanja, Prijevozna logistika I; Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 2016/2017.
- [4] Zelenika, R., Pupavac, D.: Menadžment logističkih sustava, Ekonomski fakultet, Rijeka, 2008.
- [5] Pašagić-Škrinjar, J.; Drljača, M.; Bernacchi Ž.: Primjena kontrolinga u logističkim sustavima i analiza logističkih performansi, "Kvalitetom protiv recesije" / Drljača, Miroslav - Zagreb : Hrvatsko društvo menadžera kvalitete, 2013, 509-518.
- [6] Ivaković, Č., Stanković, R., Šafran, M.: Špedicija i logistički procesi, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 2010.
- [7] Buntak, K., Grgurević, D., Droždek, I.: Međusobni odnos logističkih i transportnih sustava. Stručni članak, Tehnički glasnik 6, 2(2012), 228 –232.
- [8] Rodrigue Jean-Paul: The Geography of Transport Systems Fourth Edition, Routledge, New York, 2017.
- [9] Teodorović, D.: Transportne mreže, Saobraćajni fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd 2007.
- [10] Asase A.: The transportation problem – A Case study, Faculty of Physical Science and Technology, 2011.
- [11] Čerić V.: Informacijska tehnologija u poslovanju. Ekonomski fakultet u Zagrebu. Element. Zagreb; 2004; str. 87 –103.
- [12] Bazaraa MS, Jarvis JJ, Sheral HD.: Linear Programming and Network Flows [internet]. Fourth Edition. Ney Jersey; 2010.
- [13] Ahuja RK, Magnati TL, Orlin JB.: Network Flows [internet]. M.I.T.; 1988.

- [14] Stanković, R., Pašagić Škrinjar, J.: Autorizirana predavanja iz kolegija Logistika i transportni modeli, Zagreb, 2015.
- [15] Carić T.: Unapređenje organizacije transporta primjenom heurističkih metoda. Doktorska disertacija, Fakultet prometnih znanosti, Sveučilište u Zagrebu, 2004.
- [16] Rogić, K.: Auditorizirana predavanja, Unutrašnji transport i skladištenje; Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 2014/2015.
- [17] Toth, P., Vigo, D.: Vehicle Routing problems, methods and applicatons, Second Edition, 2014.
- [18] D. Applegate, R. Bixby, V. Chvátal, W. Cook, The travelling Salesman Problem, Princeton University Press, New Jersey, 2006.
- [19] Reeves C. R.: Modern Heuristics Techniques for Combinatorial Problems, McGraw-Hill Book Company, New York, 1995
- [20] Lenore Cowen, T., Travelling Salesman Problem, Jisoo Park University, 2011.
- [21] Golden B.L., Magnanti T.L., Nguyen H.Q.: Implementing Vehicle Routing Algorithms, Networks 7, 1997.

POPIS SLIKA

Slika 1. Elementi transportne mreže	6
Slika 2. Rješenje rute broj 1 (Slavonija) s Clark-Wright-ovim algoritmom ušteda	16
Slika 3. Razapinjuće stablo	22
Slika 4. Povezivanje neparnih vrhova.....	23
Slika 5. Rješenje rute broj 1 (Slavonija) s Christofides-ovim algoritmom.....	24
Slika 6. Rješenje rute broj 2 (Slavonija) s Clark-Wright-ovim algoritmom ušteda	26
Slika 7. Rješenje rute broj 2 (Slavonija) s Christofides-ovim algoritmom.....	29
Slika 8. Rješenje rute broj 3 (Slavonija) s Clark-Wright-ovim algoritmom ušteda	31
Slika 9. Rješenje rute broj 3 (Slavonija) s Christofides-ovim algoritmom.....	34
Slika 10. Rješenje rute broj 4 (Slavonija) s Clark-Wright-ovim algoritmom ušteda	36
Slika 11. Rješenje rute broj 4 (Slavonija) s Christofides-ovim algoritmom.....	38
Slika 12. Rješenje rute broj 1 (Istra) s Clark-Wright-ovim algoritmom ušteda.....	40
Slika 13. Rješenje rute broj 1 (Istra) s Christofides-ovim algoritmom.....	43
Slika 14. Rješenje rute broj 2 (Istra) s Clark-Wright-ovim algoritmom ušteda.....	45
Slika 15. Rješenje rute broj 2 (Istra) s Christofides-ovim algoritmom.....	47
Slika 16. Rješenje rute broj 3 (Istra) s Clark-Wright-ovim algoritmom ušteda.....	49
Slika 17. Rješenje rute broj 3 (Istra) s Christofides-ovim algoritmom.....	52
Slika 18. Rješenje rute broj 1 (Sjeverna Hrvatska) s Clark-Wright-ovim algoritmom ušteda	55
Slika 19. Rješenje rute broj 1 (Sjeverna Hrvatska) s Christofides-ovim algoritmom	58
Slika 20. Rješenje rute broj 2 (Sjeverna Hrvatska) s Clark-Wright-ovim algoritmom ušteda	60
Slika 21. Rješenje rute broj 2 (Sjeverna Hrvatska) s Christofides-ovim algoritmom	63
Slika 22. Rješenje rute broj 3 (Sjeverna Hrvatska) s Clark-Wright-ovim algoritmom ušteda	65
Slika 23. Rješenje rute broj 3 (Sjeverna Hrvatska) s Christofides-ovim algoritmom	68
Slika 24. Rješenje rute broj 4 (Sjeverna Hrvatska) s Clark-Wright-ovim algoritmom ušteda	70
Slika 25. Rješenje rute broj 4 (Sjeverna Hrvatska) s Christofides-ovim algoritmom	73

POPIS TABLICA

Tablica 1. Podaci o ruti broj 1 (Slavonija)	13
Tablica 2. Matrični prikaz međusobnih udaljenosti za rutu broj 1 (Slavonija).....	14
Tablica 3. Matrični prikaz ušteda za rutu broj 1 (Slavonija), Clark-Wright-ov algoritam.....	15
Tablica 4. Rangirane uštede prema veličini za rutu broj 1 (Slavonija)	15
Tablica 5. Matrični prikaz ušteda za rutu broj 1 (Slavonija), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T	17
Tablica 6. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 1 (Slavonija), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T	17
Tablica 7. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 1 (Slavonija), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T	18
Tablica 8. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 1 (Slavonija), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T	18
Tablica 9. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 1 (Slavonija), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T	19
Tablica 10. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 1 (Slavonija), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T	19
Tablica 11. Matrični prikaz udaljenosti za rutu broj 1 (Slavonija), Metoda najbližeg susjeda	20
Tablica 12. Tablični prikaz izračuna za rutu broj 1 (Slavonija), Cristofides-ov algoritam.....	21
Tablica 13. Matrični prikaz neparnih vrhova za rutu broj 1 (Slavonija), Cristofides-ov algoritam	22
Tablica 14. Podaci o ruti broj 2 (Slavonija)	24
Tablica 15. Matrični prikaz međusobnih udaljenosti za rutu broj 2 (Slavonija).....	25
Tablica 16. Rangirane uštede prema veličini za rutu broj 2 (Slavonija)	25
Tablica 17. Matrični prikaz ušteda za rutu broj 2 (Slavonija), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T	27
Tablica 18. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 2 (Slavonija), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T	27
Tablica 19. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 2 (Slavonija), Metoda najbližeg susjeda...	28
Tablica 20. Podaci o ruti broj 3 (Slavonija)	30
Tablica 21. Matrični prikaz međusobnih udaljenosti za rutu broj 3 (Slavonija).....	30
Tablica 22. Rangirane uštede prema veličini za rutu broj 3 (Slavonija)	30

Tablica 23. Matrični prikaz ušteda za rutu broj 3 (Slavonija), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T	32
Tablica 24. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 3 (Slavonija), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T	32
Tablica 25. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 3 (Slavonija), Metoda najbližeg susjeda... 33	
Tablica 26. Podaci o ruti broj 4 (Slavonija)	34
Tablica 27. Matrični prikaz međusobnih udaljenosti za rutu broj 4 (Slavonija).....	35
Tablica 28. Rangirane uštede prema veličini za rutu broj 4 (Slavonija)	35
Tablica 29. Matrični prikaz ušteda za rutu broj 4 (Slavonija), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T	36
Tablica 30. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 4 (Slavonija), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T	37
Tablica 31. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 4 (Slavonija), Metoda najbližeg susjeda... 37	
Tablica 32. Podaci o ruti broj 1 (Istra)	39
Tablica 33. Matrični prikaz međusobnih udaljenosti za rutu broj 1 (Istra).....	39
Tablica 34. Rangirane uštede prema veličini za rutu broj 1 (Istra)	39
Tablica 35. Matrični prikaz ušteda za rutu broj 1 (Istra), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T	41
Tablica 36. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 1 (Istra), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T	41
Tablica 37. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 1 (Istra), Metoda najbližeg susjeda.....	42
Tablica 38. Podaci o ruti broj 2 (Istra)	43
Tablica 39. Matrični prikaz međusobnih udaljenosti za rutu broj 2 (Istra).....	44
Tablica 40. Rangirane uštede prema veličini za rutu broj 2 (Istra)	44
Tablica 41. Matrični prikaz ušteda za rutu broj 2 (Istra), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T	45
Tablica 42. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 2 (Istra), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T	46
Tablica 43. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 2 (Istra), Metoda najbližeg susjeda.....	46
Tablica 44. Podaci o ruti broj 3 (Istra)	48
Tablica 45. Matrični prikaz međusobnih udaljenosti za rutu broj 3 (Istra).....	48
Tablica 46. Rangirane uštede prema veličini za rutu broj 3 (Istra)	49
Tablica 47. Matrični prikaz ušteda za rutu broj 3 (Istra), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T	50

Tablica 48. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 3 (Istra), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T	50
Tablica 49. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 3 (Istra), Metoda najbližeg susjeda.....	51
Tablica 50. Podaci o ruti broj 1 (Sjeverna Hrvatska)	53
Tablica 51. Matrični prikaz međusobnih udaljenosti za rutu broj 1 (Sj. Hrvatska)	53
Tablica 52. Rangirane uštede prema veličini za rutu broj 1 (Sjeverna Hrvatska).....	54
Tablica 53. Matrični prikaz ušteta za rutu broj 1 (Sj. Hrvatska), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T	55
Tablica 54. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 1 (Sj. Hrvatska), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T	56
Tablica 55. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 1 (Sj. Hrvatska), Metoda najbližeg susjeda	57
Tablica 56. Podaci o ruti broj 2 (Sjeverna Hrvatska)	58
Tablica 57. Matrični prikaz međusobnih udaljenosti za rutu broj 2 (Sj. Hrvatska)	59
Tablica 58. Rangirane uštede prema veličini za rutu broj 2 (Sjeverna Hrvatska).....	59
Tablica 59. Matrični prikaz ušteta za rutu broj 2 (Sj. Hrvatska), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T	61
Tablica 60. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 2 (Sj. Hrvatska), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T	61
Tablica 61. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 2 (Sj. Hrvatska), Metoda najbližeg susjeda	62
Tablica 62. Podaci o ruti broj 3 (Sjeverna Hrvatska)	64
Tablica 63. Matrični prikaz međusobnih udaljenosti za rutu broj 3 (Sj. Hrvatska)	64
Tablica 64. Rangirane uštede prema veličini za rutu broj 3 (Sjeverna Hrvatska).....	65
Tablica 65. Matrični prikaz ušteta za rutu broj 3 (Sj. Hrvatska), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T	66
Tablica 66. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 3 (Sj. Hrvatska), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T	66
Tablica 67. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 3 (Sj. Hrvatska), Metoda najbližeg susjeda	67
Tablica 68. Podaci o ruti broj 4 (Sjeverna Hrvatska)	68
Tablica 69. Matrični prikaz međusobnih udaljenosti za rutu broj 4 (Sj. Hrvatska)	69
Tablica 70. Rangirane uštede prema veličini za rutu broj 4 (Sjeverna Hrvatska).....	69

Tablica 71. Matrični prikaz ušteta za rutu broj 4 (Sj. Hrvatska), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T	71
Tablica 72. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 4 (Sj. Hrvatska), Clark-Wright-ov algoritam s indikatorom T	71
Tablica 73. Matrični prikaz izračuna za rutu broj 4 (Sj. Hrvatska), Metoda najbližeg susjeda	72
Tablica 74. Rezultati dobiveni heurističkim metodama	74

POPIS GRAFIKONA

Grafikon 1. Odnos dobivenih rješenja i ruta (Slavonija)	75
Grafikon 2. Odnos dobivenih rješenja i ruta (Istra)	75
Grafikon 3. Odnos dobivenih rješenja i ruta (Sjeverna Hrvatska).....	76



Sveučilište u Zagrebu
Fakultet prometnih znanosti
10000 Zagreb
Vukelićeva 4

IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI I SUGLASNOST

Izjavljujem i svojim potpisom potvrđujem kako je ovaj _____ diplomski rad

isključivo rezultat mog vlastitog rada koji se temelji na mojim istraživanjima i oslanja se na objavljenu literaturu što pokazuju korištene bilješke i bibliografija.

Izjavljujem kako nijedan dio rada nije napisan na nedozvoljen način, niti je prepisan iz necitiranog rada, te nijedan dio rada ne krši bilo čija autorska prava.

Izjavljujem također, kako nijedan dio rada nije iskorišten za bilo koji drugi rad u bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili obrazovnoj ustanovi.

Svojim potpisom potvrđujem i dajem suglasnost za javnu objavu _____ diplomskog rada
pod naslovom **Primjena heurističkih metoda u procesu određivanja ruta**

na internetskim stranicama i repozitoriju Fakulteta prometnih znanosti, Digitalnom akademskom repozitoriju (DAR) pri Nacionalnoj i sveučilišnoj knjižnici u Zagrebu.

Student/ica:

U Zagrebu, 3.9.2019

(potpis)