

# Analiza matematičkih metoda u procesu određivanja ruta prijevoza

---

**Malović, Antonija**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Transport and Traffic Sciences / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:119:726483>

*Rights / Prava:* [In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-04-20**



*Repository / Repozitorij:*

[Faculty of Transport and Traffic Sciences -  
Institutional Repository](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**FAKULTET PROMETNIH ZNANOSTI**

Antonija Malović

**ANALIZA MATEMATIČKIH METODA U PROCESU**  
**ODREĐIVANJA RUTA PRIJEVOZA**

**DIPLOMSKI RAD**

**Zagreb, 2019.**

Zagreb, 22. ožujka 2019.

Zavod: **Zavod za transportnu logistiku**  
Predmet: **Prijevozna logistika II**

## **DIPLOMSKI ZADATAK br. 5026**

Pristupnik: **Antonija Malović (0135236180)**  
Studij: **Inteligentni transportni sustavi i logistika**  
Smjer: **Logistika**

Zadatak: **Analiza matematičkih metoda u procesu određivanja ruta prijevoza**

### **Opis zadatka:**

U ovom radu objasniti će se zadaci prijevozne logistike i trendovi u prijevoznoj logistici. Prikazati će se uloga voznog parka i objasniti osnovna načela modeliranja. Prikazati će se određivanje ruta pomoću matematičkog modela i određivanje ruta pomoću heurističkih metoda te njihova primjena.

Mentor:

Predsjednik povjerenstva za  
diplomski ispit:

  
\_\_\_\_\_  
prof. dr. sc. Jasmina Pašagić Škrinjar

\_\_\_\_\_

Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet prometnih znanosti

**DIPLOMSKI RAD**

**ANALIZA MATEMATIČKIH METODA U PROCESU ODREĐIVANJA  
RUTA PRIJEVOZA**

**ANALYSIS OF MATHEMATICAL METHODS IN THE PROCESS OF  
TRANSPORT ROUTING**

Mentor: Prof. dr. sc. Jasmina Pašagić Škrinjar

Student: Antonija Malović  
JMBAG: 0135236180

Zagreb, Rujan 2019.

## SAŽETAK

Krajnja cijena nekog proizvoda ne zavisi samo od troškova nastalih u samom procesu proizvodnje, nego i od transporta tog proizvoda. Postoji nekoliko stavki koje utječu na cijenu proizvoda, a jedna od njih je i trošak distribucije, unutar kojeg na transport otpada oko 40%. Da bi cijena proizvoda bila niža, usluga prijevoza treba biti ekspeditivna, kvalitetna i što jeftinija. Kako bi se to postiglo, koriste se matematički modeli i heuristički modeli određivanja ruta. U ovom radu obradit će se matematički model i heurističke metode pri određivanju ruta prijevoza, te će se primjena navedenih metoda prikazati na primjeru.

KLJUČNE RIJEČI: prijevoz; matematički model; heuristička metoda; ruta prijevoza; prijevozna logistika

## SUMMARY

The final price of a product depends not only on the costs incurred in the production process itself, but also on the transportation of that product. There are several items that affect the price of a product, one of which is the cost of distribution, within which transport accounts for about 40%. For the price of the product to be lower, the transportation service should be expeditious, of high quality and as cheap as possible. To achieve this, mathematical models and heuristic models of route determination are used. In this paper the mathematical model and heuristic methods in determining the routes of transportation will be discussed, and the application of these methods will be illustrated by way of example.

KEYWORDS: transport; mathematical models; heuristic method; route of transportation

## SADRŽAJ

|                                                                                          |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. UVOD .....                                                                            | 1  |
| 2. ZADACI PRIJEVOZNE LOGISTIKE I TRENDОВI U PRIJEVOZNOJ LOGISTICI .....                  | 3  |
| 2.1. UPRAVLJANJE LOGISTIKOM.....                                                         | 4  |
| 2.2. PLANIRANJE TIJEKA PRIJEVOZNOG PROCESA .....                                         | 4  |
| 2.3. LOGISTIČKI TRENDОВI KOJI TRANSFORMIRAJU GLOBALNO TRŽIŠTE<br>LOGISTIKE .....         | 6  |
| 3. ULOGA VOZNOG PARKA .....                                                              | 12 |
| 3.1. UPRAVLJANJE VOZIM PARKOM .....                                                      | 13 |
| 3.3. RADNO VRIJEME VOZAČA .....                                                          | 14 |
| 4. DEFINIRANJE OSNOVNIH NAČELA MODELIRANJA .....                                         | 15 |
| 4.1. POJAM MODELA.....                                                                   | 15 |
| 4.2. VRSTE MODELIRANJA.....                                                              | 15 |
| 4.3. MATEMATIČKE METODE U LOGISTICI .....                                                | 15 |
| 5. ODREĐIVANJE RUTA POMOĆU MATEMATIČKOG MODELA .....                                     | 17 |
| 5.1. MATEMATIČKI MODEL U PROCESU ODREĐIVANJA RUTA PRIJEVOZA .....                        | 18 |
| 5.2. OSJETLJIVOST MATEMATIČKOG MODELA.....                                               | 19 |
| 5.3. TRANSPORTNI PROBLEM .....                                                           | 20 |
| 6. PRIKAZ I ODREĐIVANJE RUTA POMOĆU MATEMATIČKOG MODELA NA<br>KONKRETNIM PRIMJERIMA..... | 21 |
| 6.1. PRIKAZ MATEMATIČKIH MODELA ZA USMJERAVANJE VOZILA .....                             | 21 |
| 6.1.1. METODA NAJBЛИŽEG NEPOSJEĆENOG SUSJEDA.....                                        | 21 |
| 6.1.2. CLARK - WRIGHT-OV ALGORITAM UŠTEDA .....                                          | 22 |
| 6.1.3. METODA GRANANJA I OGRANIČAVANJA.....                                              | 25 |
| 6.2. ANALIZA POSTOJEĆIH RUTA KORIŠTENJEM MATEMATIČKIH MODELA ..                          | 26 |

|                                                                                |    |
|--------------------------------------------------------------------------------|----|
| 6.2.1. PROJEKTIRANJE RUTE VOZILA 1 KORIŠTENJEM METODE NAJBЛИŽEG SUSJEDA.....   | 27 |
| 6.2.2. PROJEKTIRANJE RUTE VOZILA 1 CLARK WRIGHT-OVIM ALGORITMOM „UŠTEDA“ ..... | 31 |
| 6.2.3. PROJEKTIRANJE RUTE VOZILA 1 POMOĆU METODE GRANANJA I OGRANIČAVANJA..... | 33 |
| 6.2.4. PROJEKTIRANJE RUTE VOZILA 2 KORIŠTENJEM METODE NAJBЛИŽEG SUSJEDA.....   | 37 |
| 6.2.5. PROJEKTIRANJE RUTE VOZILA 2 CLARK WRIGHT-OVIM ALGORITMOM „UŠTEDA“ ..... | 38 |
| 6.2.6. PROJEKTIRANJE RUTE VOZILA 2 POMOĆU METODE GRANANJA I OGRANIČAVANJA..... | 40 |
| 6.2.7. PROJEKTIRANJE RUTE VOZILA 3 KORIŠTENJEM METODE NAJBЛИŽEG SUSJEDA.....   | 42 |
| 6.2.8. PROJEKTIRANJE RUTE VOZILA 3 CLARK WRIGHT-OVIM ALGORITMOM „UŠTEDA“ ..... | 43 |
| 6.2.9. PROJEKTIRANJE RUTE VOZILA 3 POMOĆU METODE GRANANJA I OGRANIČAVANJA..... | 45 |
| 7. USPOREDBA REZULTATA DOBIVENIH PRIMJENOM MATEMATIČKIH MODELA.....            | 47 |
| 8. ZAKLJUČAK .....                                                             | 49 |
| LITERATURA.....                                                                | 51 |
| POPIS SLIKA .....                                                              | 53 |
| POPIS TABLICA.....                                                             | 54 |
| POPIS GRAFIKONA .....                                                          | 56 |

## 1. UVOD

Problem određivanja ruta vozila je često jednostavniji nego što se čini na prvi pogled. Jedan od najpoznatijih primjera usmjeravanja problema je problem trgovačkog putnika. Trgovački putnik treba posjetiti veliki broj gradova, ali mora se vratiti u isti grad odakle je počeo. Njegova putanja treba biti najkraća moguća. Problem rutiranja vozila je isti kao problem trgovačkog putnika, gdje je potražnja povezana sa svakim gradom. Ako se tome doda vremenska ograničenost da se stigne svakom kupcu, dobije se problem usmjeravanja vozila sa vremenskim ograničenjem. Osim ograničenja kapaciteta, vozilo bi trebalo posjetiti klijente u određenom vremenskom periodu, što dodatno komplicira situaciju. Upravo sa ovim povezuju se problemi u poslovanju i ekonomiji, posebice uključujući i one u proizvodnji, rutiranju i raspoređivanju, pa se ti problemi mogu nazvati problemi optimizacije. Uglavnom su ovi problemi teško rješavaju u određenom vremenskom roku, pa se tu vidi značaj matematičkih i heurističkih metoda.

Rad je podijeljen u osam cjelina:

1. Uvod
2. Zadaci prijevozne logistike i trendovi u prijevoznoj logistici
3. Uloga voznog parka
4. Definiranje osnovnih načela modeliranja
5. Određivanje ruta pomoću matematičkog modela
6. Prikaz i određivanje ruta pomoću matematičkog modela na konkretnim primjerima
7. Usporedba rezultata dobivenih primjenom matematičkih modela
8. Zaključak

U drugom poglavlju će se objasniti koji su to osnovni zadaci prijevozne logistike, zatim na koji način se upravlja logistikom, na koji način se planira tok prijevoza, koji su to zadaci vezani za prijevoz, te kakvi su logistički trendovi koji transformiraju globalno tržište logistike.

Treće poglavlje je namijenjeno za objašnjenje pojma voznog parka, te na koji način uspješno upravljati voznim parkom, kako bi poduzeće imalo što veće koristi. U ovom poglavlju će se objasniti kakav može biti sastav voznog parka, te koliko najviše bez prekida smije vozač upravljati vozilom.

Četvrto poglavlje prikazuje osnovna načela modeliranja. Ovdje će se objasniti pojam modela općenito, koje vrste modeliranja postoje, te će se razraditi vrste matematičkih modela u logistici i koji su to osnovni postupci modeliranja.

Peto poglavlje je namijenjeno određivanju ruta pomoću matematičkih modela. Detaljno će biti objašnjeni matematički modeli u procesu određivanja ruta prijevoza, te će se vidjeti što je to osjetljivost matematičkog modela i iz kojih razloga se radi.

Šesto poglavlje je predviđeno određivanju ruta pomoću matematičkih metoda i njihova primjena. U šestom poglavlju konkretnim primjerima pokazati će se primjena triju metoda i razlike koje donose iste. Također, biti će objašnjene prednosti i nedostaci koje donosi korištenje pojedinih matematičkih modela pri organizacije ruta u prijevozu.

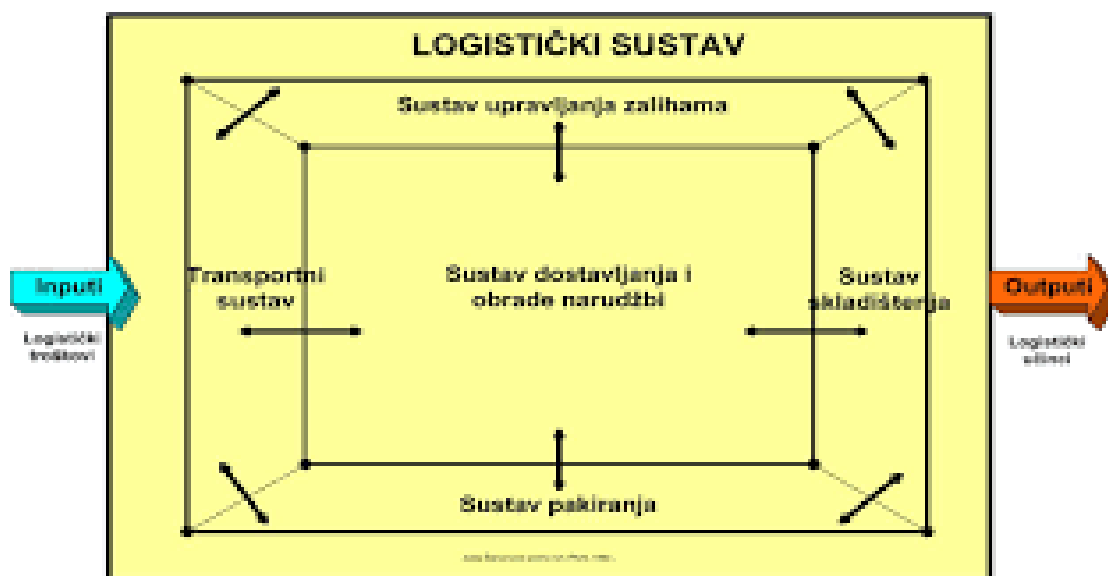
Sedmo poglavlje daje sažetak rezultata dobivenih analizom u prethodnom poglavlju, te prikaz pojedinih rezultata svakog modela.

Nakon svih razrađenih poglavlja, prikazana su neka od zaključnih razmatranja.

Ovaj rad će pokušati optimizirati rute korištenjem matematičkih modela, odnosno smanjiti ukupan prijeđeni broj kilometara, s ciljem smanjivanja troška prijevoza. Smanjenjem broja kilometara, smanjuje se i samo vrijeme prijevoza.

## 2. ZADACI PRIJEVOZNE LOGISTIKE I TRENDOWI U PRIJEVOZNOJ LOGISTICI

Tijekom kontinuiranog tržišnog natjecanja, usredotočujući se na razinu korisničke usluge, vrijeme isporuke i fleksibilnost ponude je vrlo važna za analizu učinkovitosti prijevoznih procesa. Procesi prijevoza ključni su procesi koji osiguravaju fizički tok materijala u poduzećima i u opskrbnom lancu. Organizacijska zadaća vezanih uz prijevoz izuzetno je važan proces u poslovanju proizvodnih, transportnih, špediterskih ili distribucijskih poduzeća. Glavni cilj svih tih poduzeća je isporučiti robu s mjesta pošiljke do mjesta prijema. Svaka od njih ima svoje prioritete. Na slici 1 je prikazano upravljanje prijevozom robe kako bi se ostvarile uštede na prijevozu.



Slika 1 Upravljanje prijevozom robe

Izvor: [1]

## **2.1. UPRAVLJANJE LOGISTIKOM**

Ključno je da svako prijevozno poduzeće organizira prijevozne procese na prikladan i učinkovit način. Treba imati na umu da su ti procesi uključeni s jedne strane, moraju biti planirani tako da omogućuju isporuku cjelokupnog prijevoza narudžbe (roba mora biti dostavljena na prihvatno mjesto u odgovarajuće vrijeme i bez ikakvih šteta ili gubitaka). S druge strane, pri planiranju prijevoza, prijevozna poduzeća moraju zapamtiti da minimiziraju troškove. Potrebno je naglasiti da je osoba odgovorna za organiziranje prijevoza u specifičnom poduzeću ima iznimno zahtijevan zadatak. Oni moraju podmiriti očekivanja klijenata koji žele brzo i jeftino premjestiti svoju robu na siguran način, s ciljevima prijevoznog poduzeća koje želi postići maksimalnu dobit. Tijekom organizacije prijevoznih procesa, poduzeća moraju odabrati najbolju granu prijevoza za prijevoz robe ili ljudi iz točke A u točku B, odabrati odgovarajuće vozilo i vozača za obavljanje zadatka, odrediti najbolji put za prijevoz robe ili ljudi od točke A do točke B. Čini se da su gore navedeni elementi vrlo jednostavni za rukovanje, no sam proces je dosta kompleksan. Ako netko ima jedno ili dva vozila i samo nekoliko narudžbi tjedno, problemi će se vjerojatno izbjeći [2]. Ali ako obujam posla i narudžbi počne rasti, sama organizacija postaje vrlo komplicirana.

U takvim planiranjima rute ili dodjeljivanjem vozila za rukovanje određenim prijevoznim nalogom proces postaje mnogo složeniji i dugotrajniji. Također treba imati na umu da je proces organizacije prijevoza povezan, zadaci su potpuno različiti za pojedine grane prometa. To proizlazi iz činjenice da svaka grana prometa ima različite značajke: cestovni prijevoz, na primjer, vrlo je brz u usporedbi s pomorskim prijevozom. U slučaju cestovnog prijevoza, jedan mora pronaći samo odgovarajuće vozilo i iznajmiti ga, što nije tako jednostavno u slučaju pomorskog prometa zbog niza razloga, kao što je pristup određenim područjima mora.

## **2.2. PLANIRANJE TIJEKA PRIJEVOZNOG PROCESA**

Trajanje prijevoza je sastavni dio procesa preseljenja robe. U predstavljanju logističkih procesa, uključujući procese prijevoza, vrijeme je važno, ili čak i presudno, kao čimbenik koji određuje dovršetak naloga. Proizvodna poduzeća i subjekti koji pružaju usluge danas plaćaju mnogo veću pozornost pravovremenim isporukama. Takav pristup problemu povezan je s više učinkovitim korištenjem prijevoznih sredstava i ljudskog rada, što, zauzvrat, vodi do optimizacije troškova vezanih uz prijevoz. Prilikom organiziranja prijevoznog zadatka, mora

se imati na umu da su prijevozni procesi različito organizirani za svaku vrstu prometa. To izravno utječe na vrijeme u kojem će kupac primiti svoju robu, počevši od trenutka kad su naručili. Elementi koji utječu na trajanje isporuke, bez obzira na granu, dakle [2]:

- prihvatanje narudžbe kupca,
- planiranje rute,
- odabir narudžbe iz skladišta,
- utovar robe na odabrano prijevozno sredstvo,
- prijevoz,
- istovar na mjestu koje odredi kupac.

Planiranje tijeka prijevoznog procesa u poduzeću povezano je s brojem aspekata koji se odnose na sam prijevoz i različite elemente poduzeća što se može dogoditi. Budući da se sam prijevozni proces sastoji od isporuke robe od točke otpreme do odredišta koje je odredio klijent, postupak se sastoji od nekoliko faza.

Roba može doći na odredište na vrijeme i u skladu s očekivanjima kupca, odgovarajuće aktivnosti moraju biti pravilno planirane. Za pravilno planiranje prijevoza potrebno je uzeti u obzir da bi optimizacija rute trebala osigurati kraće trajanje prijevoza postupka. Ako je potrebno, kontinuitet i fleksibilnost u prijevozu ili proizvodima također treba uzeti u obzir, odabir najbolje moguće rute i vozila u smislu pružanje što bolje usluge klijentima, izbjegavanje praznih kilometara, što omogućuje smanjenje prijevoznih troškova. Organizaciju tijeka prijevoznog procesa prate ispravno - osposobljeni stručnjaci, kao što su stručnjaci za logistiku (npr. logistički operater) i / ili špediteri. Kada se planira tijek prijevoznog zadatka, mora se zapamtiti da svaki analizirani postupak ima svoju prirodu, a može biti čak i sličan, stoga treba postupati s pažnjom, uzimajući sve potrebne aspekte u odnosu na zadatak. Složenost prijevoznog procesa se također ogleda u važnosti te broju njegovih sudionika. Sudionici procesa su [2]:

- Nalogodavac koji naručivanjem prijevoza očekuje da se prijevoz izvrši na specifičan način, koji nije uvijek u skladu s davateljem usluga.
- Pružatelj usluga koji samostalno ili sa svojim partnerima izvršava narudžbu. Da bi ga izvršili, potrebna im je pomoć takvih partnera kao što su: stručnjaci za usluge sa kupcima, čiji je zadatak učinkovito komunicirati sa klijentima i osobama unutar organizacije, prijevozne logističare koji organiziraju, koordiniraju i prate zadatke unutar procesa prijevoza, špeditera koji, poput prijevoznih logističara, organiziraju,

koordiniraju i prate zadatke u procesu prijevoza, stručnjaka za procjenu i analizu troškova prijevoza koji ocjenjuju profitabilnost prijevoznih zadataka, odgovorni su vozači koji su osnovni sudionici ili prijevozni procesi za fizičke tokove roba, viličaristi - osobe odgovorne za utovar i istovar vanjskih prijevoznih sredstava, skladišni radnici, pakeri - osobe koje su neizravno uključene u prijevozni proces, ali često ključnim u prometu. Planiranje tijeka prijevoznog procesa ovisi o njegovim sudionicima, ciljevima, vrsti prevezene robe i specifičnih faza prijevoznog procesa, a to su:

- prihvaćanje narudžbe kupca - razvijanje početnog koncepta za pripremu prijevoznog procesa, pregovori o naknadama itd., prijevoza i prijevozne rute u račun, odabir
- narudžbe u skladištu - priprema robe za prijevoz, osiguravanje svih potrebnih zaštitnih mjera, utovar robe na vanjsko prijevozno sredstvo, prijevoz, tj. fizički prijevoz robe od mjesta otpreme do prijemnog mjesta, istovar na mjestu koje odredi kupac.

Treba imati na umu da, ovisno o vrsti robe koja se prevozi, planiranje tijeka prijevoznog procesa može omogućiti drugačiju strukturu faza, a istovar robe na mjestu koje je odabrao kupac ne završiti proces prijevoza.

Osiguravanje učinkovitog planiranja novih prijevoznih procesa, trebalo bi uzeti u obzir više elemenata, kao što su:

- postupanje u pravnom i financijskom smislu,
- izmirenje naknada,
- procjenu i analizu troškova nastalih u odnosu na tijek prijevoznog procesa [3].

## **2.3. LOGISTIČKI TRENDVI KOJI TRANSFORMIRAJU GLOBALNO TRŽIŠTE LOGISTIKE**

Pojavom e-trgovine i rastom digitalne pismenosti među potrošačima, globalna logistička industrija se značajno mijenja posljednjih godina. Čimbenici kao što su povećanje raspoloživih prihoda, kućanstva s dvojnim prihodima i stalna urbanizacija potaknuli su potrošače u razvijenim i novim gospodarstvima da slijede nadolazeće logističke trendove.

To je dodatno rezultiralo brzim razvojem maloprodajnih kanala koji zahtijevaju učinkovita rješenja za upravljanje zalihama i skladištenje kako bi pomogli korisnicima da donesu informirane odluke o kupnji. Različite tvrtke počele su se angažirati s pružateljima logističkih usluga za ugostiteljstvo prilagođenih zahtjeva potrošača, što je rezultiralo globalnim logističkim tržištem za registriranje CAGR od preko 7% do kraja 2022. godine. CAGR (eng. Compound Annual Growth Rate) je složena godišnja stopa rasta i koristi se kod procjene rasta tržišta, obično za tri do pet godina. Pojava blockchain tehnologije omogućila je logističkim tvrtkama da spriječe digitalne ugovore [1].

Blockchain tehnologija se zasniva na ideji da se digitalna informacija razmjenjuje između svih čvorova koji sudjeluju u nekom određenom sustavu. Svaki pojedini čvor održava svoju kopiju svake relevantne informacije i na taj se način izbjegava potreba za središnjim autoritetom koji vrši kontrolu nad informacijama, prvi blockchain koncept predstavljen je od strane Satoshia Nakamote 2008. godine. Naredne godine blockchain tehnologija je implementirana u prvu valutu Bitcoin, gdje će ta tehnologija biti glavna podloga koja će se koristiti za sve transakcije na mreži, koje će biti zapisane u glavnoj knjizi („ledger“). U današnjem svijetu poslovanja, svaka tvrtka, organizacija ili korporacija želi zaštititi svoj integritet podataka u svojim bazama. Napadi na digitalne podatke danas postaju sve učestaliji i gotovo je nemoguće ne naći se na udaru jednog od njih, stoga mnogi danas ulažu velike resurse u što bolju zaštitu svojih podataka. Biti žrtva jednog od takvih napada može uzrokovati velike financijske gubitke, a za neke organizacije može biti i pogubno. Blockchain tehnologija se nameće kao optimalno rješenje [3].

Korištenje ove nadolazeće tehnologije omogućuje različitim dionicima logističke industrije, kao što su proizvođači, dobavljači, kupci, revizori, upravitelji skladišta i drugi, da stvore transparentan i učinkovit sustav za bilježenje transakcija, praćenje imovine i upravljanje svim dokumentima uključenim u logistički proces. Implementacija blockchain tehnologije jedna je od najistaknutijih logističkih trendova koja je sve aktualnija na globalnom tehnološkom tržištu blockchaine u prijevoznoj i logističkoj industriji, jer može povećati učinkovitost i transparentnost opskrbnih lanaca te se očekuje da će utjecati na sve, od skladištenja do isporuke tijekom sljedećih nekoliko godina.

S digitalizacijom koja oblikuje gotovo sve industrije širom svijeta, logistička industrija nije iznimka. Rastuća digitalna pismenost i svijest potrošača o korištenju različitih internetskih platformi za donošenje prilagođenih odluka o kupnji, digitalizacija logističke

industrije postala je ključni trend dobivanja najveće privlačnosti. Očekuje se da će uporaba digitalizacije u logističkoj industriji dovesti do značajnog smanjenja troškova nabave i opskrbnog lanca, dok će se znatno povećati ukupni prihodi. Integracija digitalnih kanala u logističkoj industriji je još jedan od kritičnih logističkih trendova koji dodatno omogućavaju pružateljima logističkih usluga da pruže transparentnost klijentima uz optimiziranje rješenja za povećanu sigurnost i učinkovitost.

Očekuje se da će širenje logistike treće strane (3PL) i logistike pete strane (5PL) ubrzati globalno tržište logistike tijekom predviđenog razdoblja. Tijekom 2017. godine, 3PL je mogao doprinijeti najvećem svjetskom tržišnom udjelu u logistici. 3PL je odgovoran za obuhvaćanje širokog raspona prijevoznih i logističkih potreba od kraja do kraja, uključujući prijevoz robe, vođenje evidencije o inventaru i putno osiguranje, te pružanje štita od gubitka imovine. Nadalje, prema Technavio tržištu ekspresne dostave u Brazilu, 3PL je jedan od onih napredaka u outsourcingu opskrbnog lanca, koji osigurava smanjene troškove nabave kao i smanjena vremena isporuke. Rastuća složenost na globalnom tržištu opskrbnog lanca dodatno osigurava usvajanje 5PL-a, pri čemu pružatelji 5PL rješenja često povezuju e-tvrtke kako bi postigli minimalne ciljeve troškova. Uz stalno rastuće širenje e-commerce tvrtki, pružanje učinkovitih isporuka svjedoči o velikom usponu da postane jedan od najkritičnijih aspekata stvaranja diferencijacije usluga među konkurentima. Nadalje, dobivanje paketa unutar istog dana isporuke je gotovo uobičajeno u današnje vrijeme, što je rezultiralo rastom tržišta isporuke istog dana u SAD – u [4].

Tvrtke također bilježe veći naglasak na uključivanje opcija isporuke istog dana u svim industrijama, uključujući farmaceutske proizvode i hranu i piće. Nadalje, zajedno s isporukom istog dana, potrošači također očekuju višu razinu usluga, a potiču velike trgovce, uključujući Walmart i Amazon, da dodaju podjele zadnje dostave DIY u svoje tvrtke umjesto outsourcinga [5].

Slijedom toga, kontinuirani naponi logističkih tvrtki da ponude učinkovite isporuke su jedan logistički trend koji će ponuditi obećavajući rast logističkog tržišta tijekom predviđenog razdoblja. Potreba za dobivanjem narudžbi ne samo pravom nego savršenom također će omogućiti tvrtkama da pruže vrhunsko zadovoljstvo kupaca.

Rastuća integracija bespilotnih letjelica i pametnih naočala u logističkoj industriji poboljšala je fleksibilnost i brzinu isporuke, što je opet utjecalo na rast logističkog tržišta

posljednju deceniju tijekom predviđenog razdoblja. Autonomna vozila i kamioni uspjeli su održati visoku pouzdanost i dostavu istog dana u urbanim i ruralnim područjima. Nadalje, integracija s pametnim naočalama uz proširenu stvarnost znatno će olakšati isporuke u prijevoznoj i logističkoj industriji putem pretraživanja bez korištenja ruku, prepoznavanja lica za isporuke bez grešaka i personaliziranih isporuka. Usvajanje pametnih naočala s integriranim inteligentnim tehnologijama povećat će operativnu učinkovitost logistike prvog i posljednjeg kilometra te fleksibilnost i brzinu isporuke [6].

Korištenje Big Data i Data Analytics u logističkoj industriji omogućuje nekoliko sudionika uključenih u poslovanje da donesu informirane odluke o kupnji. Tvrtke sada koriste velike podatke kako bi predvidjele prometna razdoblja, potencijalni nedostatak ponude u budućnosti i druge uvide za donošenje strateških odluka za poboljšanje svojih tržišnih pozicija i pružanje značajne konkurentске prednosti u odnosu na druge. Na slici 2 prikazan je dijagram Big Data mogućnosti.



**Slika 2** Dijagram Big Data mogućnosti

Izvor: [1]

Nadalje, prema Vijeću stručnjaka za upravljanje lancem opskrbe, preko 90% brodara i logističkih tvrtki trećih strana predviđa da je donošenje odluka temeljeno na podacima iznimno presudno za aktivnosti opskrbnog lanca jer veliki podaci poboljšavaju kvalitetu i učinkovitost nudeći učinkovitu opskrbu i prognozu potražnje, upravljanje zalihama,

optimizaciju rute i učinkovito upravljanje radom, a zauzvrat, jačanje rasta globalnog tržišta logistike treće strane tijekom predviđenog razdoblja.

Automatizacija dobiva na snazi u logističkoj industriji, uz kontinuirano usvajanje Internet stvari (IoT). Početak logistike 4.0 je jedan od ključnih logističkih trendova koji transformiraju globalno tržište opskrbnog lanca. Nedostaci, uključujući kašnjenja u transportu, pogreške operatera, loše praćenje tereta, zastarjele IT propuste i krađe, prevladavaju integracijom IoT-a u logističku industriju. Od ove sljedeće generacije uspješnog upravljanja lancem opskrbe očekuje se da će iskoristiti IoT i ručno računanje za postizanje automatiziranih uvida u stvarnom vremenu.

S većom povezanošću na internetu, raste zabrinutosti među tvrtkama koje se tiču cyber-sigurnosti i logistike. Nadalje, zaštita privatnih podataka potrošača još je jedna ključna briga koja čini sigurnost logističkih rješenja jednim od najvažnijih prioriteta. Kontinuirana hakiranja web stranice tvrtki za e-trgovinu, uključujući Amazon, Walmart i druge, otkrili su potencijalne prijetnje cyber sigurnosti. To je dodatno potaknulo pružatelje logistike da se više fokusiraju na pružanje sigurnih logističkih rješenja. Prema globalnom sigurnom logističkom tržištu tvrtke Technavio, razne logističke tvrtke, uključujući FedEx i International Post Corporation, koriste tehnologije kao što su automatska identifikacija i prikupljanje podataka (AIDC) za vođenje evidencije o pošiljkama u realnom vremenu, što je rezultiralo registriranjem tržišta CAGR blizu 20% do 2022.

Očekuje se fleksibilnost širenja i smanjivanja mogućnosti usklađivanja sa zahtjevima unutar opskrbnog lanca tijekom vremenskog okvira. Primjena elastične logistike jedan je od najnovijih logističkih trendova koji tvrtkama diljem svijeta mogu pomoći povećanjem korisničkog iskustva, pružanjem agilnosti i skalabilnosti, dodavanjem vidljivosti u stvarnom vremenu i povezivanjem svih poslovnih procesa. Promjenjiva potražnja i fluktuacije u narudžbama rješavaju 3PL tvrtke tako što svoje operacije čine vrlo elastičnim za planiranje kapaciteta u skladu sa zahtjevom.

Prema Uredu za logistiku, korištenje glasovnog chatbota za interakciju s korisnicima za obavljanje određenih radnji na nekoliko kupovnih točaka u lancu opskrbe, uključujući kupovinu, naručivanje, biranje i druge, očekuje se da će se kontinuirano kretati na globalnom tržištu logistike. Nadalje, robotika je također spremna za revolucioniranu logističku industriju, a divovi u e-trgovini, uključujući Amazon, sudjeluju u povećanom razvoju bespilotnih

letjelica koja je prikazana na slici 3, za nekoliko funkcija u skladištima, uključujući pakiranje, skladištenje i biranje.



**Slika 3** Беспилотна летjelica Amazona

Izvor: [1]

Razni sudionici na tržištu utječu na početak suradničkih robota ili robota koji će se koristiti za učinkovito skladištenje i isporuku narudžbi. Slijedom toga, porast poslovnog modela za pretplatu Robots-as-a-Service (RaaS) omogućit će trgovcima, logističkim tvrtkama trećih strana i web-lokacijama za e-trgovinu da koriste robote za rješavanje svojih potreba, a to rezultira globalnim logističkim robotima.

### 3. ULOGA VOZNOG PARKA

Planiranje sastava voznog parka kako bi se zadovoljili zahtjevi za prijevoznim uslugama važna je aktivnost upravljanja resursima za bilo koju transportnu tvrtku. Međutim, njegova je složenost takva da se formalno upravljanje voznim parkom ne može adekvatno obaviti bez pomoći sustava za podršku odlučivanju. Važan dio takvog sustava je stvaranje minimalnih planova diskontni troškovi koji obuhvaćaju kupnju, zamjenu, prodaju i / ili iznajmljivanje vozila potrebnih za rješavanje sezonske potražnje [6].

Za rješavanje ovog problema formuliran je stohastički model programiranja. On se svodi na odvojivi program koji se temelji na informacijama o potražnji za uslugama, stanju trenutnog voznog parka i novčanim tokovima generiranim planom nabave / odlaganja. Uvođenje usluga javnog prijevoza potpuno automatiziranim vozilima može potencijalno promijeniti način na koji će se upravljati uslugama javnog prijevoza, jer oni omogućavaju prelazak sa rigidnog dizajna i usluga vezanih na rutu prema fleksibilnim uslugama koje odgovaraju potrebama potrošača.

Upravljanje voznim parkom ima za cilj mnogobrojne zadatke koji u konačnici donose brojne prednosti poslovanju poslovne organizacije. Neki od tih zadataka prikazani su na slici 4.

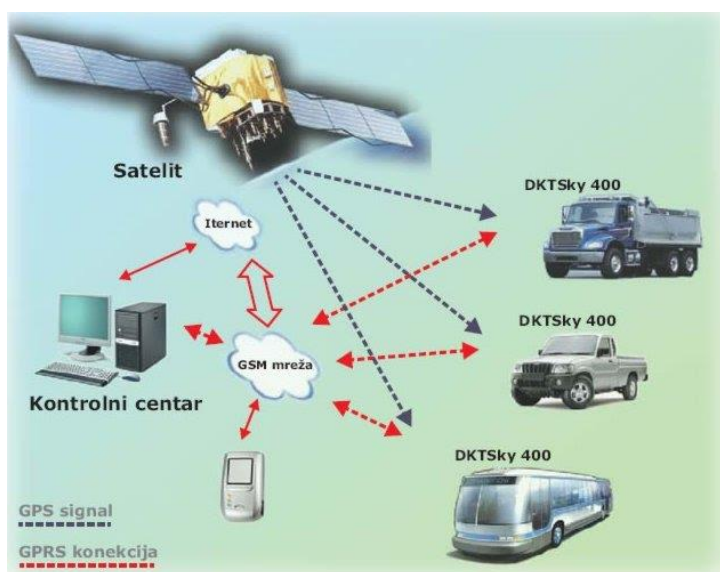


**Slika 4** Zadaci upravljanja voznim parkom

Izvor:[21]

### 3.1. UPRAVLJANJE VOZNIM PARKOM

Druga grana logističkih tvrtki je upravljanje sustavom i sustav je usklađen s rezultatom da se rad obavlja bez ikakvog rizika. Korisnik sektora prijevoza ima obavezu predstavljanja vozila, opreme, upravljanja i posljedičnog rada. Održavanje i popravak vozila te upravljanje voznim parkom, opremom samog vozila, garažiranje vozila i naravno odabiru vozača je vrlo važno. Osim toga, sustavi za praćenje vozila su elementi u floti, te su prikazani na slici 5.



Slika 5 GPS način praćenja vozila

Izvor: [7]

Odgađanje transporta tereta s jednog mjesta na drugo utječe na vrijeme, te na radnu cirkulaciju. Budući da se ne može dobiti učinkovit rezultat, on također dovodi do gubitka kupaca. Flota je u potpunosti kompatibilna s poslovanjem, što znači jednako poslovanje znači kraj rada i zadovoljne kupce. Druga stavka koju treba naglasiti je da su dokumenti vozila potpuni, bilo u zemlji ili inozemstvu. Kada su dokumenti vezani za vozila kompletni i kompletni s cestovnim dokumentima, radovi se završavaju na kontrolirani način.

Veliku ulogu pri organiziranju i planiranju prijevoznih procesa ima činjenica ima li poduzeće unaprijed ugovorom zajamčene količine robe koju treba prevesti u određenom razdoblju. U tom slučaju poželjno je ponuditi malo niže cijene prijevoza, jer ima zagarantiran posao, pa se sam rizik u poslovanju se uveliko smanjuje.

### **3.3. RADNO VRIJEME VOZAČA**

U cilju sprječavanja prometnih nezgoda, zakonom je strogo definirano kako radno vrijeme, tako i obavezni odmori vozača. Radno vrijeme predstavlja vrijeme od početka do završetka rada tokom kojeg se vozač nalazi na svom radnom mjestu, tj. vrijeme provedeno u svim aktivnostima cestovnog prijevoza.

## **4. DEFINIRANJE OSNOVNIH NAČELA MODELIRANJA**

### **4.1. POJAM MODELA**

Za model se može reći da je obrazac, odnosno prikaz, plan ili opis stvarnoga predmeta, zbivanja, sustava ili koncepta, koji pomaže u daljnjem istraživanju. Iako modeliranje ima dosta prednosti, nedostatak mu je što nije primjenjiv u svim segmentima u stvarnom sustavu. Modeliranje nije dopušteno u medicini, dok je neizvodivo u astronomiji [12].

### **4.2. VRSTE MODELIRANJA**

Postoji više kriterija da bi se odredila vrstu modeliranja, a najčešće se koristi podjela prema načinu opisivanja predmeta [3]:

- fizički modeli;
- analogni modeli;
- simbolički modeli.

Kada se predstavljaju predmeti fizičkim modelom, uglavnom je to uvećana ili umanjena verzija realnog sustava, kao npr. globus. Analognim modelima se prezentiraju crteži, grafikoni, tako da se što bliže predstavi realni sustav. Najveći opseg primjene imaju simbolički modeli, gdje se može ubrajati notni zapis, matematički izraz i sl.

### **4.3. MATEMATIČKE METODE U LOGISTICI**

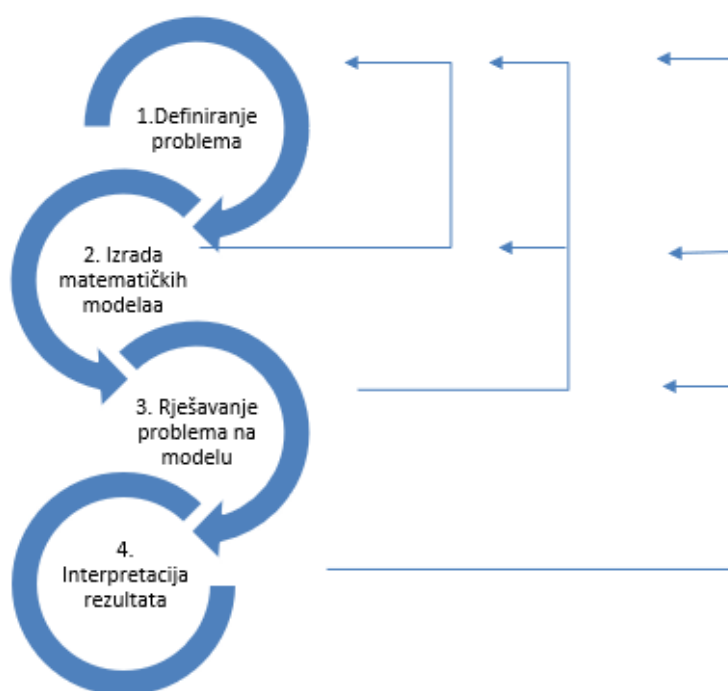
Matematički modeli u biti su sustavi matematičkih izraza (jednadžba i/ili nejednadžba) koji opisuju predmet modeliranja, a sam pojam matematički model može se definirati kao: - matematički opis predmeta modeliranja (sustava, procesa, zbivanja, problema...), bilo da je riječ o postojećem predmetu modeliranja ili o nečemu što se tek treba izgraditi ili što bi moglo nastati;

- apstraktni prikaz realnoga sustava korištenjem matematičkoga jezika koji predstavlja postojeće spoznaje o tom sustavu u primjenjivoj formi.

Prema namjeni razlikuju se dvije vrste matematičkih modela:

- 1. Modeli optimiranja** – primjenjuju se u cilju postizanja maksimalne ili minimalne vrijednosti neke veličine (maksimizacija dobiti, učinkovitosti odnosno minimalizacija troškova,...)
- 2. Modeli predviđanja** – primjenjuju se s ciljem opisivanja i predviđanja stanja (događaja) koja se očekuju pod određenim uvjetima (predviđanje potražnje, rokova izvršenja pojedinih aktivnosti...). [24]

Sam pristup rješavanju problema matematičkim modeliranjem može se svesti na četiri osnovna koraka, koja su prikazana na slici 6 .



**Slika 6** Četiri osnovna koraka rješenja problema matematičkim modeliranjem

Izvor: Izradio autor prema [24]

Rješavanje problema primjenom matematičkog modeliranja rijetko kada prolazi kao jednosmjernan sekvencijalni proces. Model je u pravilu potrebno revidirati, mijenjati pretpostavke i podatke, nužno je vraćanje na prethodne korake. Dakle, nema sustava ili procesa koje bi se u potpunosti moglo prenijeti u matematički model. Zanimljivo je da mnoge informacije unoseći samo veličine i relacije važne za dobivanje optimalnog rješenja.

## 5. ODREĐIVANJE RUTA POMOĆU MATEMATIČKOG MODELA

Kod prijevoza nekog prijevoznog supstrata, prilikom predstavljanja problema, neophodno je paziti na sljedeće kriterije: zadani kapacitet i mjesto izvora, zatim potražnja odredišta, prijevozni putevi, te jedinični prijevozni troškovi. Primjenom ovih kriterija dobiva se osnovni oblik problema. Ukoliko se ovom obliku dodaju još neki kriteriji kao što je vremenski prozor kod odredišta, dobije se složen oblik problema.

Da bi se prijevozni problem sveo na matematički model linearnog programiranja, prijevozni problemi se predstavljaju odgovarajućim elementima prijevoznog modela. Koristi se sljedeći redoslijed prilikom predstavljanja problema:

1. funkcija cilja;
2. varijable odlučivanja;
3. ograničenja;
4. ulazni podaci [24].

Kada se spominje funkcija cilja, misli se na ukupne troškove prijevoza, koji bi naravno trebali biti što manji. U varijable odlučivanja ubraja se količina supstrata koja se prevozi, te prijevozni put od određenog izvora do određenog odredišta. Što se tiče samih ograničenja, ovdje se misli na to da sama potražnja odredišta mora biti ispunjena, a kapaciteti izvora ne mogu biti prekoračeni. Kapaciteti izvora, potražnja odredišta, te jedinični prijevozni troškovi pripadaju ulaznim podacima.

Prijevozni modeli su model mreže koja se sastoji od izvor odnosno odredišta i prijevoznih odredišta i puteva koji povezuju ta odredišta odnosno izvore. Izvori odnosno odredišta predstavljaju čvorove, a putevi predstavljaju lukove koji povezuju ta odredišta. Kako bi se dobilo optimalno rješenje prijevoznog problema, neophodno je povezivanje izvorišnih čvorova i odredišnih čvorova prijevoznim putevima uz zahtjev da potražnja bude zadovoljena, a sam trošak prijevoza što manji.

## 5.1. MATEMATIČKI MODEL U PROCESU ODREĐIVANJA RUTA PRIJEVOZA

Matematički modeli opisuju predmet modeliranja i sastoji se od matematičkih jednažbi ili nejednažbi. Oni mogu biti modeli optimiziranja i modeli predviđanja. U cilju postizanja npr. maksimalne dobiti koristi se model optimiziranja, dok se modeli predviđanja koriste kada se želi opisati ili predvidjeti neki događaj pod određenim uvjetima.

Matematička formulacija prijevoznog problema sastoji se od elemenata matematičkoga modela linearnoga programiranja, kako je opisano u prethodnom poglavlju (funkcija cilja, ograničenja, varijable odlučivanja, ulazni podaci), zapisanih matematičkim izrazima kako slijedi [24]:

funkcija cilja

$$\min F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m t_{ij} \cdot q_{ij} \quad (1)$$

ograničenja

$$\sum_{i=1}^n q_{ij} = p_j \forall j = 1, \dots, m \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^m q_{ij} \leq k_i \forall i = 1, \dots, n \quad (3)$$

$$q_{ij} \geq 0 \forall i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m \quad (4)$$

gdje je:

$t_{ij}$  = jedinični prijevozni trošak na relaciji od izvora  $i$  do odredišta  $j$

$q_{ij}$  = količina robe koja se iz izvora  $i$  prijevozi do odredišta  $j$

$m$  = ukupan broj odredišta čiju potražnju treba zadovoljiti

$n$  = ukupan broj izvora

$k_i$  = kapacitet izvora  $i$

$p_j$  = potražnja odredišta  $j$ .

Jednadžba (1) predstavlja ukupni prijevozni trošak na cijeloj mreže kao zbroj produkata količine robe i jediničnoga prijevoznog troška na svim rutama prijevozne mreže. Jednadžba (2) predstavlja ograničenje koje određuje kako potražnja svih odredišta mora biti zadovoljena, dok nejednadžba (3) predstavlja ograničenje koje određuje kako ukupna količina robe koja se prevozi iz pojedinoga izvora ne može biti veća od njegovoga kapaciteta, a nejednadžba (4) predstavlja uvjet nenegativnosti varijable odlučivanja.

## 5.2. OSJETLJIVOST MATEMATIČKOG MODELA

Analiza osjetljivosti matematičkog modela predstavlja metodu za provjeru kvalitete modela kojom se može prikazati osjetljivost modela na nepreciznost, odnosno na stohastičku sastavnicu vrijednosti ulaznih podataka. Ovdje se provjeravaju parametri modela, zatim dodavanje, odnosno isključivanje varijabli ili nekih ograničenja.

Najčešći razlozi za sprovođenje analize osjetljivosti matematičkog modela mogu biti da ulazni podaci nisu poznati sa sigurnošću, zatim zanemarivanje mogućih promjena ulaznih veličina, te sprovođenje analize što-ako. Analiza što-ako predstavlja promatranje modela ukoliko se izmijene neki parametri.

Analizom osjetljivosti matematičkog modela dobivaju se potrebne informacije, zahvaljujući kojima se ne mora ponavljati neki postupak više puta sa različitim parametrima. Istražuju se sljedeće promjene na modelima: raspon vrijednosti za svaki koeficijent funkcije cilja unutar kojega se optimalno rješenje ne mijenja te ako je riječ o vezanom ograničenju, optimalno se rješenje mijenja, a kvantificira se promjena vrijednosti funkcije cilja prema jediničnoj promjeni parametra na desnoj strani ograničenja. [9]

Najjednostavniji primjer rješavanja logističkih problema svode se na problem kombiniranog programiranja je problem naprtnjače. Problem naprtnjače se objašnjava slanjem operativca na zadatak, koji treba nositi naprtnjaču punu stvari, za koje misli da će mu biti najkorisnije. Jedini problem predstavlja prostor u naprtnjači, jer sve što ubaci u naprtnjaču zauzima određeni prostor i nemoguće je ponijeti sve stvari. Korisnost predstavlja prijevoz robe, komercijalna vrijednost robe, komercijalna dobit, vjerojatnost potrebe, dok naprtnjača predstavlja kapacitet prijevoznoga sredstva [10].

### 5.3. PRIJEVOZNI PROBLEM

Prijevozni problem je problem određivanja prijevoza od izvora do odredišta pri čemu se koriste raspoloživi prijevozni putovi sa najmanjim prijevoznim troškovima, tj. najkraći prijevozni put.

Raspored prijevoza se određuje na osnovu količine supstrata koji se prevozi i kojim prijevoznim putom. Ukoliko kapacitet izvora zadovoljava ukupnu potražnju, onda se takav problem naziva zatvorenim. Međutim, u realnim situacijama često potražnja nadmašuje kapacitete, pa istu nije moguće zadovoljiti.

Prijevozni modeli se sastoje od čvorova i lukova koji povezuju te čvorove. Čvorovi predstavljaju odredišta na koje je potrebno dostaviti supstrate, dok su lukovi prijevozni putovi kojima bi se trebalo kretati. Prijevozni model bi u ovom slučaju pokazivao razdiobu tokova unutar prijevozne mreže, gdje su čvorovi (lokacije) poznati. Ovdje se mora paziti da se koriste optimalna rješenja korištenja izvora za opskrbljivanje odredišta, da se kvantitativno odredi razdioba prijevoza i optimalan odabir putova prijevoza.

## **6. PRIKAZ I ODREĐIVANJE RUTA POMOĆU MATEMATIČKOG MODELA NA KONKRETNIM PRIMJERIMA**

### **6.1. PRIKAZ MATEMATIČKIH MODELA ZA USMJERAVANJE VOZILA**

Metode koje se koriste za usmjeravanje vozila mogu biti egzaktne metode i heurističke metode tj. metaheurističke metode. Egzaktne metode nisu primjenjive i iskoristive u svakodnevnim problemima. Ipak iako su spore one daju optimalno rješenje. Takve metode rješavanja problema rade tako da prebroje sva rješenja problema koja su moguća te za svaki problem se izračuna cijena te se izabere rješenje koje predstavlja optimum. Problem je što to nije uvijek moguće i dokazati. Zbog toga se ove metode koriste kada je u pitanju mali broj korisnika.

Kada su u pitanju heurističke metode, heuristika daje brzo rješenje koje je blizu optimumu. Jedna od najpoznatijih i često korištenih metoda prilikom rješavanja problema usmjeravanja vozila je metoda najbližeg neposjećenog susjeda. Metaheuristika je računarska metoda koja pomoću iteracija pokušava doći do najboljeg rješenja s obzirom na zadanu funkciju [26].

#### **6.1.1. METODA NAJBLIŽEG NEPOSJEĆENOG SUSJEDA**

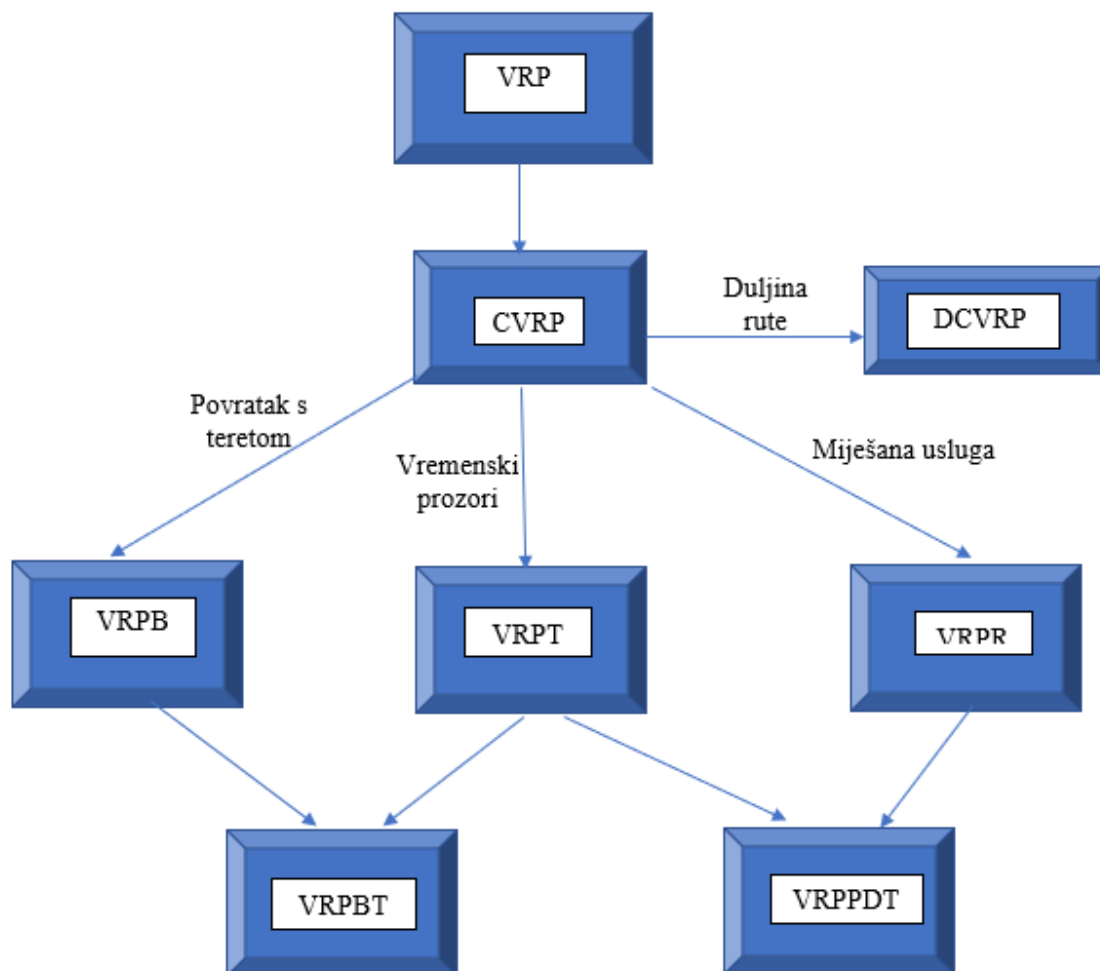
Ova metoda se često upotrebljava kao rješenje za testiranje popravljajućih heuristika. Prednost ove metode je što se brzo dođe do rješenja, dok se nedostatak ogleda u tome što to rješenje uglavnom nije optimalno.

Algoritam najbližeg susjeda rješava se tako da se dodanim vrhovima u ruti dodaje sljedeći najbliži vrh posljednjem dodanom vrhu. Princip po kome se radi metoda najbližeg neposjećenog susjeda je sljedeći: Prvo se odabrana polazna točka označi kao vrh 0, a zatim se iz skupa nedodanih vrhova odabira najbliži početnom vrhu i uključuje se u rutu. Sljedeći korak predstavlja ponovno biranje najbližeg vrha posljednjem dodanom vrhu i sve tako dok se ne spoji posljednji vrh sa početnim [10]. Kada imamo  $n$  mjesta koje je potrebno obići, vremenska složenost ovog algoritma je  $n^2$ , međutim kada se svaka točka razmatra kao početna, tada je vremenska složenost ovog algoritma  $n^3$ .

### 6.1.2. CLARK - WRIGHT-OV ALGORITAM „UŠTEDA“

Problem usmjeravanja vozila (engl. vehicle routing problem – VRP) je opći naziv za klasu problema gdje je potrebno odrediti rute za flotu vozila. Ovisno o vrsti postavljenog problema, flota vozila treba poslužiti određeni broj prostorno razmještenih korisnika s polaskom iz jednog ili više skladišta. Prvotno je nazvan problemom otpremanja kamiona 1959. godine u znanstvenom radu Georgea Dantziga i Johna Ramsera, a ticao se problema dostave naftnih derivata, točnije za potrebe racionalizacije procesa opskrbe benzinskih postaja naftom. Clark i Wright su 1964. godine predložili poboljšanje Dantzig-Ramserove metode pomoću konstrukcije ruta, koristeći heuristička rješenja koja koriste tzv. „pohlepne“ algoritme (engl. greedy algoritmi koji generiraju rješenje promatranog problema u proceduri „korak po korak“, u svakom trenutku biraju odgovarajuću promjenjivu vrijednost tako da maksimalno moguće u okviru tog koraka povećaju, odnosno smanje trenutnu vrijednost definirane kriterijske funkcije). Problem usmjeravanja vozila čest je pri distribuciji i prikupljanju dobara. Cilj problema usmjeravanja vozila je pronalaženje optimalne rute, na način da svi korisnici budu posluženi, a da se svaki korisnik poslužuje samo jednim vozilom.

Na slici 7 prikazane su inačice problema usmjeravanja vozila. Osnovni VRP se grana na CVRP (engl. Capacitated VRP) gdje vozila imaju ograničen kapacitet nosivosti tereta kojeg se dostavlja. Sljedeće proširenje CVRP-a je DCRVP (engl. distance constrained CVRP) gdje su postavljanje ograničene duljine rute. VRPB (engl. VRP with backhauls) uključuje klijente kojima se teret dostavlja, ali se potom s određenih lokacija preuzima teret koji se vozi ponovno na početnu lokaciju. VRPTW (engl. VRP with time windows) uz ograničenje kapaciteta uzima u obzir i unaprijed određeno vrijeme u kojem je potrebno obaviti dostavu svim klijentima u ruti. VRPPD (engl. VRP with pick-up and delivering) se razlikuje od VRP i VRPB jer razmatra klijente koji stvaraju potražuju, dostavu i otpremu, znači bavi se dostavom i prikupljanjem povratnog tereta u ruti, stoga količina tereta vozilu nije stalna. VRPBTW (engl. VRP with backhauls and time windows) uključuje ciljeve VRPB-a i VRPT-a, dakle minimizira broj ruta i ukupnu udaljenost svih ruta, uključujući vremenske prozore u kojima se dostava mora izvršiti, kao i povratne prikupe robe. VRPPDTW (engl. VRP with pick-up and delivery with time windows) smatra se jedan od najzasićenijih problema rutiranja, istovremeno imamo ograničen kapacitet vozila, količinu dostave sa prikupom od specifičnog klijenta u točno određenom vremenskom prozoru. [10]



**Slika 7** Prikaz najučestalijih inačica problema usmjeravanja vozila

Izvor: [10]

Clark - Wright-ov algoritam „ušteda“ jedan je od najčešće primjenjivanih heurističkih pristupa rješavanja zadatka problema usmjeravanja vozila, u literaturi poznatog kao VRP. Algoritam polazi od početnog rješenja u kojem se nalazi  $n-1$  ruta koje se formiraju na način tako da se po jedno vozilo upućuje iz baze, odnosno skladišta do jednog od potrošača te se vraća u skladište, početnu točku. Zatim se interaktivno, iz koraka u korak spajaju po dvije putanje koje donose najveću uštedu, a da pritom zadovoljavaju ograničenja zadataka algoritma. [27]

Algoritam se izvršava u vremenu složenosti  $O(n^2 \log(n))$ , ali kompleksnost algoritma može se reducirati koristeći prikladne podatkovne strukture. Algoritam implicitno ne uvažava fiksne troškove vozila i veličinu flote. Uključenje troškova vozila moguće je dodavanjem konstante na svaku cijenu luka, odnosno rute kretanja vozila. Unatoč povećanju troška može se postići rješenje i s fiksnim brojem vozila. [28]

Clark - Wright-ova „ušteta“ računa se prema formuli:  $S(i, j) = d(B, i) + d(B, j) - d(i, j)$  (5), gdje je:

$S$  = ušteta

$d$  = udaljenost

$B$  = početni i završni čvor (baza)

$i$  = prvi čvor u grani

$j$  = drugi čvor u grani.

Postupak izvršenja Clark Wright-ova algoritma podijeljen je na dva glavna koraka koji se dijele na dodatan broj koraka. Algoritam počinje konstrukcijom i određivanjem međusobnih udaljenosti lokacija, te računanja uštete prema formuli (5) i zatim sortiranje ušteta od najveće prema najmanjoj.

Clark-Wright-ov algoritam „ušteta“ za projektiranje ruta prijevoznih sredstava može se prikazati i na sljedeći način [27]:

Korak 1: Izračunati uštete  $S(i, j) = d(B, i) + d(B, j) - d(i, j)$  za svaki par  $(i, j)$  čvorova koje je potrebno opslužiti.

Korak 2: Izvršiti rangiranje svih ušteta te ih poredati po veličini. Izraditi listu ušteta koja započinje najvećom uštedom.

Korak 3: Pri razmatranju uštete  $s(i, j)$  odgovarajuću granu  $(i, j)$  uključiti u djelomičnu rutu, ukoliko se pri tome ne krše postojeća operativna ograničenja i ukoliko:

(a) Čvor  $i$  te čvor  $j$  već nisu uključeni u neku postojeću djelomičnu rutu,

(b) Je jedan od čvorova  $i$  ili  $j$  već uključen u neku postojeću djelomičnu rutu i ukoliko taj čvor nije unutarnji čvor u ruti,

(c) Su oba čvora  $i$  i  $j$  uključeni u dvije različite djelomične rute i niti jedan od navedenih čvora nije unutarnji čvor u tim rutama u kojem je slučaju moguće spojiti djelomične rute u jednu rutu.

Korak 4: Kada je lista ušteda realizirana do kraja, potrebno je završiti s algoritmom.

Clark – Wright-ov algoritam „ušteda“ poimamo kao sekvencijalni i simultani. Kod sekvencijalnog pristupa čvorovi se preskaču i ostavljanju za daljnja razmatranja, a u simultanom, jednim prolaskom kroz listu vrši se projektiranje svih ruta.

### 6.1.3. METODA GRANANJA I OGRANIČAVANJA

Metoda grananja i ograničavanja (engl. branch and bound) metoda je paradigma dizajna algoritma koja se općenito koristi za rješavanje kombinatornih problema optimizacije. To su problemi koji su najčešće rješivi u eksponencijalnom vremenu i zahtijevaju istraživanje svih mogućih permutacija u najgorem slučaju. Te probleme branch and bound metoda rješava relativno brzo. Kako bi se problem trgovačkog putnika riješio korištenjem matematičke metode branch and bound, prvo ga je potrebno prilagoditi jeziku teorije grafova.

Algoritam grananja i ograničavanja opći je algoritam za pronalazak optimalnih rješenja mnogih općenitih optimizacijskih problema. Sastoji se od brojanja svih potencijalnih rješenja, pri čemu se veliki podskupovi loših rješenja odbacuju. Redoslijed obilaska gradova od strane trgovačkog putnika prvo se rekurzivno grana na dva dijela te tako nastaje struktura stabla. Nakon toga računaju se gornja i donja granica za svaki dobiveni podskup. Ukoliko je donja granica određenog vrha bolja od gornje granice nekog drugog vrha, taj drugi vrh se odbacuje iz pretrage. Rekurzija se zaustavlja onog trena kada se skup reducira na jedan element ili kad njegova gornja granica postane jednaka njegovoj donjoj granici.

Koraci rješavanja metode:

1. Prije svega potrebno je ispisati minimalne vrijednosti iz svakog retka, tj. traži se minimalni element u svakom retku. Zatim se oduzimaju sve vrijednosti pojedinog retka s minimalnom vrijednošću tog retka

2. Izdvojiti minimalni element iz svakog stupca. Zatim se oduzimaju vrijednosti stupca s minimalnom vrijednosti stupca. Neki stupci ostat će nepromijenjeni jer se oduzimaju s nulom. Dobiva se reducirana matrica koja ima bar jednu nulu u svakom retku i svakom stupcu. Polja koja sadrže nulu su kandidati za uspostavljanje direktne veze između lokacija.
3. Donja granica na duljinu svih kružnih puteva računa se prema formuli 6.

$$\sum_{i=1}^n u_i + \sum_{j=1}^n v_j \quad (6)$$

Gdje je  $u_i$  zbroj minimalnih vrijednosti iz svakog retka, dok  $v_j$  jest zbroj minimalnih vrijednosti iz svakog stupca.

4. Za svako polje s nulom računa se kazna za nekorištenje predložene veze među gradovima na način: kazna na polju  $(i, j) = \text{minimalan element u retku } i + \text{minimalan element u retku } j$  ne uključujući polje  $(i, j)$ . Potrebno je izračunati kazne za nulu. Kazna se računa tako da se zbroji minimalna vrijednost iz retka sa minimalnom vrijednosti stupca. Nakon što su izračunate sve kazne za nekorištenje predložene veze među lokacijama, odabire se kazna koja ima najveću vrijednost. Ako postoji više kazni iste najveće vrijednosti odabire se kazna koja je prva po redu i tako dobijemo prvu relaciju. Nakon odabira prve relacije imamo reduciranu matricu, bez tog retka i tog stupca.

Ako reducirana matrica sadrži barem jedan stupac u kojem se ne nalazi barem jedna nula, potrebno je oduzeti sve elemente s minimalnom vrijednošću tog stupca. Dakle, nakon operacije oduzimanja imamo novu reduciranu matricu u kojoj svi retci i stupci sadrže jednu nulu.

## 6.2. ANALIZA POSTOJEĆIH RUTA KORIŠTENJEM MATEMATIČKIH MODELA

U ovom poglavlju analizirati će se tri rute triju vozila koje su uzete proizvoljno. Obzirom na broj vozila, razlikuje se pet različitih ruta koje će biti analizirane. Detaljno će se prikazati postupak izračuna najkraćeg puta po svim navedenim matematičkim metodama.

Postupak rješavanja primjenom metode najbližeg neposjećenog susjeda prikazan je u poglavlju 6.1.1., sam postupak rješavanja primjenom Clark -Wright-ovog algoritma „uštete“ objašnjen je u poglavlju 6.1.2., dok postupak rješavanja primjenom metode grananja i ograničavanja je prikazan u poglavlju 6.1.3. Dakle, sljedeći dio rada obrađen je prema tim postupcima.

### 6.2.1. PROJEKTIRANJE RUTE VOZILA 1 KORIŠTENJEM METODE NAJBLIŽEG SUSJEDA

Odabirom minimalnih udaljenosti u matrici rješava se metoda najbližeg susjeda postupkom objašnjenim u poglavlju 6.1.1.. Ruta vozila 1 obilazi šest različitih lokacija. U tablici 1. su navedene lokacije koje opslužuje vozilo 1, a prikazuju redoslijed i udaljenosti koje vozilo 1 slijedi.

**Tablica 1.** Matrični prikaz udaljenosti za rutu 1 vozila 1

|       | $x_0$    | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    | $x_4$    | $x_5$    |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $x_0$ | $\infty$ | 69       | 123      | 120      | 100      | 70       |
| $x_1$ | 69       | $\infty$ | 53       | 127      | 130      | 105      |
| $x_2$ | 123      | 53       | $\infty$ | 76       | 95       | 135      |
| $x_3$ | 120      | 127      | 76       | $\infty$ | 68       | 127      |
| $x_4$ | 100      | 130      | 95       | 68       | $\infty$ | 54       |
| $x_5$ | 70       | 105      | 135      | 127      | 54       | $\infty$ |

Postupak izračuna započinje tako da se odabere čvor lokacije koja predstavlja početnu točku rute, tj. čvor  $x_0$ . U sljedećem koraku se odabire najmanja udaljenost prema jednom od

čvorova odnosno lokacija, što u našem primjeru iznosi 69 km, a nalazi se između čvorova  $x_0$  i  $x_1$ . Odabrana udaljenost je vrijednost početne relacije rute, kao što je prikazano tablicom 2.

**Tablica 2.** Matrični prikaz za izračun rute 1 vozila 1, metoda najbližeg susjeda

|       | $x_0$    | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    | $x_4$    | $x_5$    |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $x_0$ | $\infty$ | 69       | 123      | 120      | 100      | 70       |
| $x_1$ | 69       | $\infty$ | 53       | 127      | 130      | 105      |
| $x_2$ | 123      | 53       | $\infty$ | 76       | 95       | 135      |
| $x_3$ | 120      | 127      | 76       | $\infty$ | 68       | 127      |
| $x_4$ | 100      | 130      | 95       | 68       | $\infty$ | 54       |
| $x_5$ | 70       | 105      | 135      | 127      | 54       | $\infty$ |

$0 \rightarrow 1$

Sljedeći korak predstavlja da se iz čvora  $x_1$  traga po stupcima za najmanju udaljenost prema prvoj mogućoj lokaciji. Rezultat pretrage je stupac, odnosno čvor  $x_2$ , kao što je prikazano tablicom 3.

**Tablica 3.** Matrični prikaz za izračun rute 1 vozila 1

|       | $x_0$    | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|----------|----------|----------|-------|-------|-------|
| $x_0$ | $\infty$ | 69       | 123      | 120   | 100   | 70    |
| $x_1$ | 69       | $\infty$ | 53       | 127   | 130   | 105   |
| $x_2$ | 123      | 53       | $\infty$ | 76    | 95    | 135   |

|       |     |     |     |          |          |          |
|-------|-----|-----|-----|----------|----------|----------|
| $x_3$ | 120 | 127 | 76  | $\infty$ | 68       | 127      |
| $x_4$ | 100 | 130 | 95  | 68       | $\infty$ | 54       |
| $x_5$ | 70  | 105 | 135 | 127      | 54       | $\infty$ |

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2$$

Prethodni korak se ponavlja, pa kao rezultat pretrage dobijemo čvor  $x_3$ , kao što je prikazano tablicom 4.

**Tablica 4.** Matrični prikaz izračuna rute 1 vozila 1

|       | $x_0$    | $x_1$     | $x_2$     | $x_3$     | $x_4$    | $x_5$    |
|-------|----------|-----------|-----------|-----------|----------|----------|
| $x_0$ | $\infty$ | <b>69</b> | 123       | 120       | 100      | 70       |
| $x_1$ | 69       | $\infty$  | <b>53</b> | 127       | 130      | 105      |
| $x_2$ | 123      | 53        | $\infty$  | <b>76</b> | 95       | 135      |
| $x_3$ | 120      | 127       | 76        | $\infty$  | 68       | 127      |
| $x_4$ | 100      | 130       | 95        | 68        | $\infty$ | 54       |
| $x_5$ | 70       | 105       | 135       | 127       | 54       | $\infty$ |

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$$

Prethodni korak se ponavlja, pa kao rezultat pretrage dobijemo čvor  $x_4$ , kao što je prikazano tablicom 5.

**Tablica 5.** Matrični prikaz izračuna ruta 1 vozila 1

|       | $x_0$    | $x_1$     | $x_2$     | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|----------|-----------|-----------|-------|-------|-------|
| $x_0$ | $\infty$ | <b>69</b> | 123       | 120   | 100   | 70    |
| $x_1$ | 69       | $\infty$  | <b>53</b> | 127   | 130   | 105   |

|       |     |     |          |          |          |          |
|-------|-----|-----|----------|----------|----------|----------|
| $x_2$ | 123 | 53  | $\infty$ | 76       | 95       | 135      |
| $x_3$ | 120 | 127 | 76       | $\infty$ | 68       | 127      |
| $x_4$ | 100 | 130 | 95       | 68       | $\infty$ | 54       |
| $x_5$ | 70  | 105 | 135      | 127      | 54       | $\infty$ |

$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 0$

Prethodni korak se ponavlja, pa kao rezultat pretrage dobijemo čvor  $x_5$ , kao što je prikazano tablicom 6.

**Tablica 6.** Matrični prikaz izračuna rute 1 vozila 1, primjenom metode najbližeg susjeda

|       |          |          |          |          |          |          |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|       | $x_0$    | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    | $x_4$    | $x_5$    |
| $x_0$ | $\infty$ | 69       | 123      | 120      | 100      | 70       |
| $x_1$ | 69       | $\infty$ | 53       | 127      | 130      | 105      |
| $x_2$ | 123      | 53       | $\infty$ | 76       | 95       | 135      |
| $x_3$ | 120      | 127      | 76       | $\infty$ | 68       | 127      |
| $x_4$ | 100      | 130      | 95       | 68       | $\infty$ | 54       |
| $x_5$ | 70       | 105      | 135      | 127      | 54       | $\infty$ |

$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 0$

Posljednji korak u algoritmu prikazuje povezivanje posljednjeg odabranog čvora u ruti  $x_5$  te polaznog čvora u ovom slučaju to je čvor  $x_0$ . Iako vrijednost 70 nije minimalna, to je jedina moguća kombinacija koja je ostala, kao što je prikazano tablicom 7.

**Tablica 7.** Konačni Matrični prikaz izračuna rute 1 vozila 1

|       |          |       |       |       |       |       |
|-------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
|       | $x_0$    | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| $x_0$ | $\infty$ | 69    | 123   | 120   | 100   | 70    |

30

|       |     |          |          |          |          |          |
|-------|-----|----------|----------|----------|----------|----------|
| $x_1$ | 69  | $\infty$ | 53       | 127      | 130      | 105      |
| $x_2$ | 123 | 53       | $\infty$ | 76       | 95       | 135      |
| $x_3$ | 120 | 127      | 76       | $\infty$ | 68       | 127      |
| $x_4$ | 100 | 130      | 95       | 68       | $\infty$ | 54       |
| $x_5$ | 70  | 105      | 135      | 127      | 54       | $\infty$ |

Kompletirana ruta vozila 1 izgleda ovako:  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 0$ , te duljina puta iznosi 390 km.

## 6.2.2. PROJEKTIRANJE RUTE VOZILA 1 CLARK WRIGHT-OVIM ALGORITMOM „UŠTEDA“

Iz matrice udaljenosti računaju se uštede za svaki par čvorova međusobno. Uštede se izračunavaju prema formuli (5), a rješenje svakog pojedinačnog izračuna prikazuje vrijednost uštede između dva odabrana vrha. U primjeru je zadana matrica udaljenosti između točaka kao što je prikazano tablicom 8. Potrebno je izračunati najkraći put tako da svaka lokacija bude posjećena samo jednom, te da početna točka bude i završna.

**Tablica 8.** Matrica udaljenosti između točaka rute 1 vozila 1, Clark – Wright – ov algoritam „ušteda“

|       | $x_0$    | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    | $x_4$    | $x_5$ |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|-------|
| $x_0$ | $\infty$ | 69       | 123      | 120      | 100      | 70    |
| $x_1$ | 69       | $\infty$ | 53       | 127      | 130      | 105   |
| $x_2$ | 123      | 53       | $\infty$ | 76       | 95       | 135   |
| $x_3$ | 120      | 127      | 76       | $\infty$ | 68       | 127   |
| $x_4$ | 100      | 130      | 95       | 68       | $\infty$ | 54    |

|       |    |     |     |     |    |          |
|-------|----|-----|-----|-----|----|----------|
| $x_5$ | 70 | 105 | 135 | 127 | 54 | $\infty$ |
|-------|----|-----|-----|-----|----|----------|

U prvom koraku potrebno je izračunati uštede  $S(i, j)$  pomoću formule (5). Ušteda za prvu relaciju, od čvora  $x_1$  do čvora  $x_2$  računa se na način da se udaljenost od čvora  $x_1$  do čvora  $x_2$  iznosa 53 km oduzme od zbroja dviju udaljenosti, udaljenosti od početnog čvora  $x_0$  do čvora  $x_1$  koja iznosi 69 km i udaljenosti od početnog čvora  $x_0$  do čvora  $x_2$  duljine 123 km. Nakon izračuna, vrijednost uštede iznosi 139 km. Na jednak se način izračunavaju uštede za preostale kombinacije čvorova:

$$S_{12} = d(0,1) + d(1,2) - d(1,2) = 69 + 123 - 53 = 139$$

$$S_{13} = 69 + 120 - 127 = 62$$

$$S_{14} = 69 + 100 - 130 = 39$$

$$S_{15} = 69 + 70 - 105 = 34$$

$$S_{23} = 123 + 120 - 76 = 167$$

$$S_{24} = 123 + 100 - 95 = 128$$

$$S_{25} = 123 + 70 - 135 = 58$$

$$S_{34} = 120 + 100 - 68 = 152$$

$$S_{35} = 120 + 70 - 127 = 63$$

$$S_{45} = 100 + 70 - 54 = 116$$

U drugom koraku vrši se rangiranje ušteda prema veličini, tj. radimo listu koja započinje najvećom uštedom. Dakle, u tablici su uštede rangirane pomoću formule (5). Tablica 9 ima dva stupca, a svaki stupac dva dijela. U lijevom dijelu stupca su grane, tj. relacije između čvorova, dok u desnom dijelu su vrijednosti istih.

**Tablica 9.** Lista rangiranih ušteda prema veličini za rutu 1 vozila 2

| GRANA ( $I, J$ ) | UŠTEDA $S(I, J)$ | GRANA ( $I, J$ ) | UŠTEDA $S(I, J)$ |
|------------------|------------------|------------------|------------------|
| (2,3)            | 167              | (3,5)            | 63               |
| (3,4)            | 152              | (1,3)            | 62               |

|       |     |       |    |
|-------|-----|-------|----|
| (1,2) | 139 | (2,5) | 58 |
| (2,4) | 128 | (1,4) | 39 |
| (4,5) | 116 | (1,5) | 34 |

Sljedeći treći korak je projektiranje rute. On započinje rangiranim uštedama uz zadovoljenje navedenih ograničenja:

- Čvorovi najveće uštede su početak rute:  $(2,3) \rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 0$
- Sljedeća ušteda po veličini sadrži 3 i 4, te s obzirom da čvor 3 već postoji, i nije unutarnja točka čvor 4 može se uvrstiti u rutu povezan s čvorom 4 kako je i navedeno  $(3,4) \rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0$
- Prema redoslijedu sljedeća ušteda je (1,2). U ruti se nalazi čvor 2, koji je poveznica kod uštede (1,2), čvor 2 nije unutarnja točka te su ograničenja zadovoljena, te ušteda se može uvrstiti u rutu, te se čvor 1 može nadovezati na čvor 2.  
 $(1,2) \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0$
- Kod uštede (2,4) čvor je uključen u rutu, s toga se ušteda ne upotrebljava pri projektiranju rute.
- Sljedeća ušteda za uvrštavanje je (4,5) koja nije unutarnja već je vanjska, te je čvor 5 moguće povezati sa čvorom 4.  
 $(4,5) \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0$
- Uštede (3,5), (1,3), (2,5), (1,4) i (1,5) se mogu zanemariti jer su svi čvorovi već povezani u rutu, ograničenja su zadovoljena i direktna veza je moguća između čvorova.

Rješenje dobiveno Clark – Wright-ovim algoritmom glasi:  $0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0$ , te ukupna duljina rute iznosi 390 km. .

### 6.2.3. PROJEKTIRANJE RUTE VOZILA 1 POMOĆU METODE GRANANJA I OGRANIČAVANJA

Projektiranje rute vozila 1 računa se pomoću metode grananja i ograničavanja na jednak način kao što je objašnjeno u poglavlju 6.1.3., dakle pomoću izračuna kazni za

nepoštivanje predložene veze među lokacijama i odabira pojedinih relacija, kao što je prikazano tablicom 10.

**Tablica 10.** Matrični prikaz udaljenosti za rutu 1 vozila 1, primjenom metode grananja i ograničavanja

|       | $x_0$    | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    | $x_4$    | $x_5$    |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $x_0$ | $\infty$ | 69       | 123      | 120      | 100      | 70       |
| $x_1$ | 69       | $\infty$ | 53       | 127      | 130      | 105      |
| $x_2$ | 123      | 53       | $\infty$ | 76       | 95       | 135      |
| $x_3$ | 120      | 127      | 76       | $\infty$ | 68       | 127      |
| $x_4$ | 100      | 130      | 95       | 68       | $\infty$ | 54       |
| $x_5$ | 70       | 105      | 135      | 127      | 54       | $\infty$ |

**Tablica 11.** Matrični prikaz reducirane matrice za izračun rute 1 vozila 1

|       | $x_0$    | $x_1$    | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|----------|----------|-------|-------|-------|-------|
| $x_0$ | $\infty$ | 0        | 54    | 37    | 31    | 1     |
| $x_1$ | 0        | $\infty$ | 0     | 60    | 77    | 52    |

|       |    |    |          |          |          |          |
|-------|----|----|----------|----------|----------|----------|
| $x_2$ | 54 | 0  | $\infty$ | 9        | 42       | 82       |
| $x_3$ | 36 | 59 | 8        | $\infty$ | 0        | 59       |
| $x_4$ | 30 | 76 | 41       | 0        | $\infty$ | 0        |
| $x_5$ | 0  | 51 | 81       | 59       | 0        | $\infty$ |

**Tablica 12.** Matrični prikaz izračuna rute 1 vozila 1

|       | $x_0$     | $x_1$     | $x_2$     | $x_3$     | $x_4$     | $x_5$     |
|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $x_0$ | $\infty$  | $0^{(1)}$ | 54        | 37        | 31        | 1         |
| $x_1$ | $0^{(0)}$ | $\infty$  | $0^{(8)}$ | 60        | 76        | 52        |
| $x_2$ | 54        | $0^{(9)}$ | $\infty$  | 9         | 42        | 82        |
| $x_3$ | 36        | 59        | 8         | $\infty$  | $0^{(8)}$ | 59        |
| $x_4$ | 30        | 76        | 41        | $0^{(9)}$ | $\infty$  | $0^{(1)}$ |
| $x_5$ | $0^{(0)}$ | 51        | 81        | 59        | 0         | $\infty$  |

Dobivena relacija glasi:  $2 \rightarrow 1$

**Tablica 13.** Matrični prikaz za izračun rute 1 vozila 1

|       | $x_0$    | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$      |
|-------|----------|-------|-------|-------|------------|
| $x_0$ | $\infty$ | 45    | 36    | 30    | $0^{(30)}$ |

|       |            |            |            |           |           |
|-------|------------|------------|------------|-----------|-----------|
| $x_1$ | $0^{(52)}$ | $\infty$   | 60         | 77        | 52        |
| $x_3$ | 36         | $0^{(33)}$ | $\infty$   | $0^{(0)}$ | 59        |
| $x_4$ | 30         | 33         | $0^{(36)}$ | $\infty$  | $0^{(0)}$ |
| $x_5$ | $0^{(0)}$  | 73         | 59         | $0^{(0)}$ | $\infty$  |

Dobivena relacija glasi:  $1 \rightarrow 0$

**Tablica 14.** Matrični prikaz za izračun rute 1 vozila 1

|       |            |          |           |            |
|-------|------------|----------|-----------|------------|
|       | $x_2$      | $x_3$    | $x_4$     | $x_5$      |
| $x_0$ | 45         | 36       | 30        | $0^{(30)}$ |
| $x_3$ | $0^{(33)}$ | $\infty$ | $0^{(0)}$ | 59         |
| $x_4$ | 33         | 0        | $\infty$  | $\infty$   |
| $x_5$ | 73         | 59       | 0         | $\infty$   |

Dobivena relacija glasi:  $5 \rightarrow 4$

**Tablica 15.** Matrični prikaz za izračun rute 1 vozila 1

|       |            |            |            |
|-------|------------|------------|------------|
|       | $x_2$      | $x_3$      | $x_5$      |
| $x_0$ | 45         | 36         | $0^{(95)}$ |
| $x_3$ | $0^{(92)}$ | $\infty$   | 59         |
| $x_4$ | 33         | $0^{(69)}$ | $\infty$   |

Dobivena relacija glasi:  $0 \rightarrow 5$

**Tablica 16.** Matrični prikaz reducirane matrice rute 1 vozila 1

|       | $x_2$      | $x_3$      |
|-------|------------|------------|
| $x_3$ | $0^{(33)}$ | $0^{(33)}$ |
| $x_4$ | $33$       | $0^{(33)}$ |

Vrijednost kazni za obje nule iznosi 33, jer je maksimalni element jednak za obje nule. Za odabir relacije uzimaju se obje kazne, stoga posljednje dvije relacije glase:  $3 \rightarrow 2$  te  $4 \rightarrow 3$ .

Rješenje, odnosno cjelokupna ruta glasi:  $0 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ , te ukupna duljina iznosi 390 km.

#### 6.2.4. PROJEKTIRANJE RUTE VOZILA 2 KORIŠTENJEM METODE NAJBLIŽEG SUSJEDA

Odabirom minimalnih udaljenosti u matrici rješava se metoda najbližeg susjeda postupkom objašnjenim u poglavlju 6.1.1.. U tablici 17. prikazana je matrica udaljenosti za rutu vozila 2, a prikazuju redoslijed i udaljenosti koje vozilo 2 slijedi.

**Tablica 17.** Matrica udaljenosti za izračun rute 2 vozila 2, primjenom metode najbližeg susjeda

|       | $x_0$    | $x_1$    | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|----------|----------|-------|-------|-------|-------|
| $x_0$ | $\infty$ | 65       | 78    | 102   | 70    | 86    |
| $x_1$ | 64       | $\infty$ | 22    | 28    | 14    | 20    |

|       |     |    |          |          |          |          |
|-------|-----|----|----------|----------|----------|----------|
| $x_2$ | 78  | 22 | $\infty$ | 34       | 35       | 25       |
| $x_3$ | 102 | 28 | 34       | $\infty$ | 2        | 43       |
| $x_4$ | 70  | 14 | 35       | 2        | $\infty$ | 26       |
| $x_5$ | 86  | 20 | 25       | 43       | 26       | $\infty$ |

**Tablica 18.** Konačni matrični prikaz udaljenosti za rutu 2 vozila 2

|       | $x_0$     | $x_1$     | $x_2$     | $x_3$    | $x_4$     | $x_5$     |
|-------|-----------|-----------|-----------|----------|-----------|-----------|
| $x_0$ | $\infty$  | <b>65</b> | 78        | 102      | 70        | 86        |
| $x_1$ | 64        | $\infty$  | 22        | 28       | <b>14</b> | 20        |
| $x_2$ | 78        | 22        | $\infty$  | 34       | 35        | <b>25</b> |
| $x_3$ | 102       | 28        | <b>34</b> | $\infty$ | 2         | 43        |
| $x_4$ | 70        | 14        | 35        | <b>2</b> | $\infty$  | 26        |
| $x_5$ | <b>86</b> | 20        | 25        | 43       | 26        | $\infty$  |

Konačna relacija rute vozila 2 glasi: **0** → **1** → **4** → **3** → **2** → **5** → **0**, a ukupna udaljenost iznosi 226 km.

#### 6.2.5. PROJEKTIRANJE RUTE VOZILA 2 CLARK WRIGHT-OVIM ALGORITMOM „UŠTEDA“

Iz matrice udaljenosti računaju se uštede za svaki par čvorova međusobno. Uštede se izračunavaju prema formuli (5), a rješenje svakog pojedinačnog izračuna prikazuje vrijednost uštede između dva odabrana vrha. U nastavku je prikazan postupak izračuna te lista ušteda kao što je prikazano tablicom 19:

Uštede se računaju prema formuli (11):  $S(i, j) = d(0, i) + d(0, j) - d(i, j)$

$$S_{12} = 65 + 78 - 22 = 121$$

$$S_{13} = 65 + 102 - 28 = 139$$

$$S_{14} = 65 + 70 - 14 = 121$$

$$S_{15} = 65 + 86 - 20 = 131$$

$$S_{23} = 78 + 102 - 34 = 146$$

$$S_{24} = 78 + 70 - 35 = 113$$

$$S_{25} = 78 + 86 - 25 = 139$$

$$S_{34} = 102 + 70 - 2 = 170$$

$$S_{35} = 102 + 86 - 43 = 145$$

$$S_{45} = 70 + 86 - 26 = 130$$

**Tablica 19.** Lista ušteda za rutu 2 vozila 2 prema veličini

| GRANA ( $I, J$ ) | UŠTEDA $S(I, J)$ | GRANA ( $I, J$ ) | UŠTEDA $S(I, J)$ |
|------------------|------------------|------------------|------------------|
| (3,4)            | 170              | (1,5)            | 131              |
| (2,3)            | 146              | (4,5)            | 130              |
| (3,5)            | 145              | (1,2)            | 121              |
| (1,3)            | 139              | (1,4)            | 121              |
| (2,5)            | 139              | (2,4)            | 113              |

(3,4)  $\rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0$ ,

(2,3)  $\rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0$ ,

(3,5)  $\rightarrow$  čvor 3 je unutarnji čvor te ga nije moguće povezati s drugim čvorovima,

(1,3)  $\rightarrow$  čvor 3 je unutarnji čvor te ga nije moguće povezati s drugim čvorovima,

$(2,5) \rightarrow 0 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0,$

$(1,5) \rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0.$

Ruta je kompletirana, stoga se preostale veze zanemaruju. Rješenje dobiveno Clark-Wright-ovim algoritmom glasi:  $0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 0$ , a ukupna duljina rute iznosi 215 km.

## 6.2.6. PROJEKTIRANJE RUTE VOZILA 2 POMOĆU METODE GRANANJA I OGRANIČAVANJA

Projektiranje rute vozila 2 računa se pomoću metode grananja i ograničavanja na jednak način kao što je objašnjeno u poglavlju 6.1.3., dakle pomoću izračuna kazni za nepoštivanje predložene veze među lokacijama i odabira pojedinih relacija, prikazano tablicom 20:

**Tablica 20.** Matrični prikaz udaljenosti za rutu 2 vozila 2, po metode grananja i ograničavanja

|       | $x_0$    | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    | $x_4$    | $x_5$    |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $x_0$ | $\infty$ | 65       | 78       | 102      | 70       | 86       |
| $x_1$ | 64       | $\infty$ | 22       | 28       | 14       | 20       |
| $x_2$ | 78       | 22       | $\infty$ | 34       | 35       | 25       |
| $x_3$ | 102      | 28       | 34       | $\infty$ | 2        | 43       |
| $x_4$ | 70       | 14       | 35       | 2        | $\infty$ | 26       |
| $x_5$ | 86       | 20       | 25       | 43       | 26       | $\infty$ |

Slijedi prikaz reducirane matrice, prikazano tablicom 21, izračun prikazan tablicom 22:

**Tablica 21.** Matrični prikaz reducirane matrice za vozilo 2

|       | $x_0$    | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    | $x_4$    | $x_5$    |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $x_0$ | $\infty$ | 0        | 8        | 37       | 5        | 18       |
| $x_1$ | 0        | $\infty$ | 3        | 14       | 0        | 3        |
| $x_2$ | 6        | 0        | $\infty$ | 12       | 13       | 0        |
| $x_3$ | 50       | 26       | 27       | $\infty$ | 0        | 38       |
| $x_4$ | 18       | 12       | 28       | 0        | $\infty$ | 21       |
| $x_5$ | 16       | 0        | 0        | 23       | 6        | $\infty$ |

**Tablica 22.** Matrični prikaz izračuna za rutu 2 vozila 2

|       | $x_3$            | $x_5$            |
|-------|------------------|------------------|
| $x_1$ | 0 <sup>(8)</sup> | 8                |
| $x_2$ | 0                | 0 <sup>(8)</sup> |

$3 \rightarrow 4$

$2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$

$1 \rightarrow 0$

$0 \rightarrow 2 \rightarrow 0 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$

$5 \rightarrow 1$

$4 \rightarrow 5 \rightarrow 0 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 0$

Rješenje dobiveno metodom grananja i ograničavanja glasi: **0**  $\rightarrow$  **2**  $\rightarrow$  **3**  $\rightarrow$  **4**  $\rightarrow$  **5**  $\rightarrow$  **1**  $\rightarrow$  **0**, te je ukupna udaljenost rute 225 km.

Odabirom minimalnih udaljenosti u matrici rješava se metoda najbližeg susjeda postupkom objašnjenim u poglavlju 6.1.1.. Ruta vozila 3 obilazi šest različitih lokacija. U tablici 23. su navedene lokacije koje opslužuje vozilo 3, a prikazuju redoslijed i udaljenosti koje vozilo 3 slijedi.

|       | $x_0$    | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    | $x_4$    | $x_5$    |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $x_0$ | $\infty$ | 129      | 84       | 18       | 90       | 110      |
| $x_1$ | 129      | $\infty$ | 58       | 125      | 68       | 20       |
| $x_2$ | 84       | 58       | $\infty$ | 79       | 26       | 38       |
| $x_3$ | 18       | 125      | 79       | $\infty$ | 75       | 106      |
| $x_4$ | 90       | 68       | 26       | 75       | $\infty$ | 53       |
| $x_5$ | 110      | 20       | 38       | 106      | 53       | $\infty$ |

|       | $x_0$    | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_0$ | $\infty$ | 129   | 84    | 18    | 90    | 110   |
|       |          |       | 42    |       |       |       |

|       |     |          |          |          |          |          |
|-------|-----|----------|----------|----------|----------|----------|
| $x_1$ | 129 | $\infty$ | 58       | 125      | 68       | 20       |
| $x_2$ | 84  | 58       | $\infty$ | 79       | 26       | 38       |
| $x_3$ | 18  | 125      | 79       | $\infty$ | 75       | 106      |
| $x_4$ | 90  | 68       | 26       | 75       | $\infty$ | 53       |
| $x_5$ | 110 | 20       | 38       | 106      | 53       | $\infty$ |

Ruta kretanja vozila 3 izgleda ovako:  $0 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ , a ukupna udaljenost iznosi 306 km.

#### 6.2.8. PROJEKTIRANJE RUTE VOZILA 3 CLARK WRIGHT-OVIM ALGORITMOM „UŠTEDA“

Iz matrice udaljenosti računaju se uštede za svaki par čvorova međusobno. Uštede se izračunavaju prema formuli (5), a rješenje svakog pojedinačnog izračuna prikazuje vrijednost uštede između dva odabrana vrha. U nastavku je prikazan postupak izračuna te lista ušteda kao što je prikazano tablicom 25.:

Uštede se računaju prema formuli (11):  $S(i, j) = d(0, i) + d(0, j) - d(i, j)$

$$S_{12} = 129 + 84 - 58 = 155$$

$$S_{13} = 129 + 18 - 125 = 22$$

$$S_{14} = 129 + 90 - 68 = 151$$

$$S_{15} = 129 + 110 - 20 = 219$$

$$S_{23} = 84 + 18 - 79 = 23$$

$$S_{24} = 84 + 90 - 26 = 148$$

$$S_{25} = 84 + 110 - 38 = 27$$

$$S_{34} = 18 + 90 - 75 = 33$$

$$S_{35} = 18 + 110 - 106 = 22$$

$$S_{45} = 90 + 110 - 53 = 147$$

**Tablica 25.** Lista ušteda za rutu 3 vozila 3 prema veličini

| GRANA ( $I, J$ ) | UŠTEDA $S(I, J)$ | GRANA ( $I, J$ ) | UŠTEDA $S(I, J)$ |
|------------------|------------------|------------------|------------------|
| (1,5)            | 219              | (3,4)            | 33               |
| (1,2)            | 155              | (2,5)            | 27               |
| (1,4)            | 151              | (2,3)            | 23               |
| (2,4)            | 148              | (1,3)            | 22               |
| (4,5)            | 147              | (3,5)            | 22               |

**(1,5)  $\rightarrow 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0$ ,**

**(1,2)  $\rightarrow 0 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0$ ,**

**(1,4)  $\rightarrow$**  čvor 1 je unutarnji čvor te ga nije moguće povezati s drugim čvorovima,

**(2,4)  $\rightarrow 0 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0$ ,**

**(4,5)  $\rightarrow$**  oba čvora se već nalaze u ruti,

**(3,4)  $\rightarrow 0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0$ .**

Ruta je kompletirana, stoga se preostale veze zanemaruju. Rješenje dobiveno Clark-Wright-ovim algoritmom glasi:  **$0 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 0$** , a ukupna duljina rute iznosi 307 km.

### 6.2.9. PROJEKTIRANJE RUTE VOZILA 3 POMOĆU METODE GRANANJA I OGRANIČAVANJA

Projektiranje rute vozila 3 računa se pomoću metode grananja i ograničavanja na jednak način kao što je objašnjeno u poglavlju 6.1.3., dakle pomoću izračuna kazni za nepoštivanje predložene veze među lokacijama i odabira pojedinih relacija, kao što je prikazano tablicom 26:

**Tablica 26.** Matrični prikaz udaljenosti za rutu 3 vozila 3, primjenom metode grananja i ograničavanja

|       | $x_0$    | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    | $x_4$    | $x_5$    |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $x_0$ | $\infty$ | 129      | 84       | 18       | 90       | 110      |
| $x_1$ | 129      | $\infty$ | 58       | 125      | 68       | 20       |
| $x_2$ | 84       | 58       | $\infty$ | 79       | 26       | 38       |
| $x_3$ | 18       | 125      | 79       | $\infty$ | 75       | 106      |
| $x_4$ | 90       | 68       | 26       | 75       | $\infty$ | 53       |
| $x_5$ | 110      | 20       | 38       | 106      | 53       | $\infty$ |

Slijedi prikaz reducirane matrice, što je prikazano tablicom 27, te izračun prikazan tablicom 28:

**Tablica 27.** Matrični prikaz reducirane matrice za rutu 3 vozila 3

|       | $x_0$    | $x_1$    | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|----------|----------|-------|-------|-------|-------|
| $x_0$ | $\infty$ | 111      | 66    | 0     | 72    | 92    |
| $x_1$ | 109      | $\infty$ | 38    | 105   | 48    | 0     |

|       |    |     |          |          |          |          |
|-------|----|-----|----------|----------|----------|----------|
| $x_2$ | 58 | 32  | $\infty$ | 53       | 0        | 12       |
| $x_3$ | 0  | 107 | 61       | $\infty$ | 57       | 88       |
| $x_4$ | 64 | 42  | 0        | 49       | $\infty$ | 27       |
| $x_5$ | 90 | 0   | 18       | 86       | 33       | $\infty$ |

**Tablica 28.** Konačni matrični prikaz izračuna za rutu 3 vozila 3

|       |                  |                  |
|-------|------------------|------------------|
|       | <b>0</b>         | $x_2$            |
| $x_1$ | 7                | 0                |
| $x_4$ | 0 <sup>(7)</sup> | 0 <sup>(0)</sup> |

0 → 3

5 → 1

2 → 5 → 2 → 5 → 1

3 → 4 → 0 → 3 → 4

4 → 2 → 0 → 3 → 4 → 2

1 → 0 → 0 → 3 → 4 → 2 → 5 → 1 → 0

Rješenje dobiveno metodom grananja i ograničavanja glasi: **0 → 3 → 4 → 2 → 5 → 1 → 0**, te je ukupna udaljenost rute 306 km.

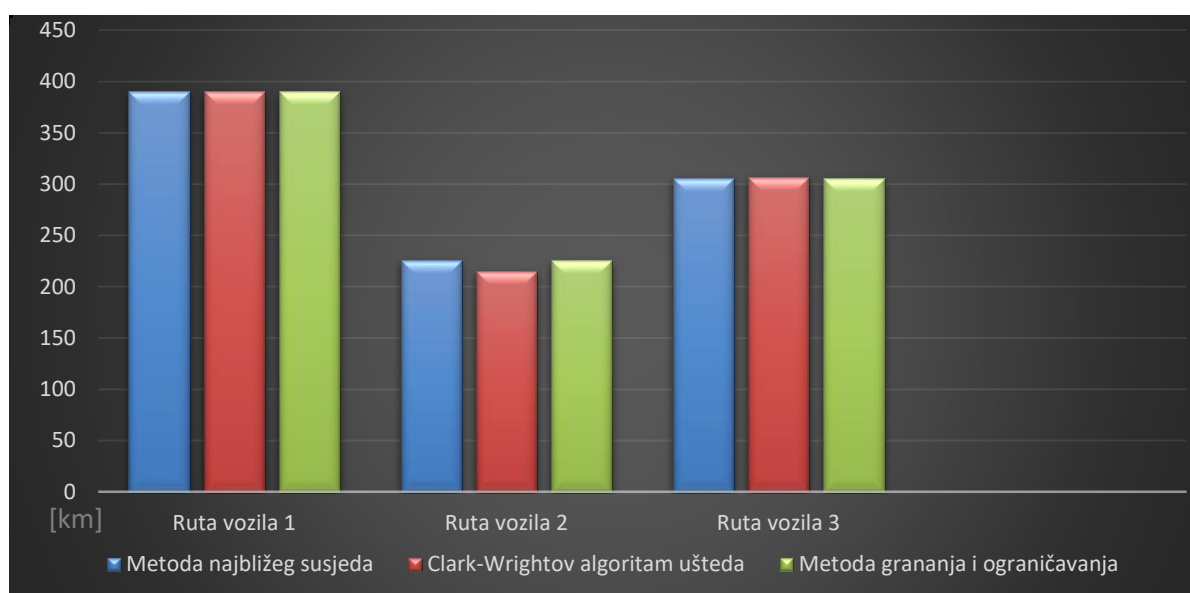
## 7. USPOREDBA REZULTATA DOBIVENIH PRIMJENOM MATEMATIČKIH MODELA

Nakon izračuna najkraćeg puta za rutu, a time ujedno i metode koja daje najkraći put, potrebno je izdvojiti najbolje rješenje triju primijenjenih matematičkih modela, kao što je prikazano tablicom 29.

**Tablica 29.** Rezultati dobiveni primjenom matematičkih modela

| <i>Ruta vozila</i>          | <i>Metoda<br/>najbližeg<br/>susjeda<br/><br/>(km)</i> | <i>Clark - Wright-<br/>ov algoritam<br/>ušteta (km)</i> | <i>Metoda<br/>grananja i<br/>ograničenja<br/><br/>(km)</i> | <i>Najbolje<br/>rješenje<br/><br/>(km)</i> |
|-----------------------------|-------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| <b><i>Ruta vozila 1</i></b> | 390                                                   | 390                                                     | 390                                                        | 390                                        |
| <b><i>Ruta vozila 2</i></b> | 226                                                   | 215                                                     | 225                                                        | 215                                        |
| <b><i>Ruta vozila 3</i></b> | 306                                                   | 307                                                     | 306                                                        | 306                                        |

Odnosi između ruta pojedinih vozila i danih rješenja u kilometrima dani su grafikonom 1:



**Grafikon 1.** Odnosi ruta vozila i dobivenih rješenja

Prva ruta prema izračunima ispada posve jednaka po svim metoda.

Ruta vozila 2 je potpuno različita po metodama, gdje se korištenjem Clark – Wright - ove metode dobiva najkraća ruta. Metoda najbližeg susjeda, te metoda grananja i ograničavanja daju gotovo identične rezultate, te u usporedbi s njima, ruta dobivena Clark – Wright – ovo metodom kraća je za 4,86%.

Treća ruta vozila također daje gotovo iste rezultate. Mala razlika je dobivena Clark - Wright – ovom metodom, koja je u odnosu na ostale dvije identične metode, duža zanemarivih 0,33%.

## 8. ZAKLJUČAK

Potreba za određivanjem ruta prijevoza se javila povećanjem broja vozila na putovima, te je danas bez logističkih metoda rutiranja vozila skoro nemoguće zamisliti prijevoz. Problem određivanja ruta vozila je često jednostavniji nego što se čini na prvi pogled. Jedan od najpoznatijih primjera usmjeravanja problema je problem trgovačkog putnika. Trgovački putnik treba posjetiti veliki broj gradova, ali mora se vratiti u isti grad odakle je počeo, pri čemu njegova putanja treba biti najkraća moguća. Problem rutiranja vozila je isti kao problem trgovačkog putnika, gdje je potražnja povezana sa svakim gradom. Ako se tome doda vremenska ograničenost da se stigne svakom kupcu, dobije se problem usmjeravanja vozila sa vremenskim ograničenjem. Pored ograničenja kapaciteta, vozilo bi trebalo posjetiti klijente u određenom vremenskom periodu, što dodatno komplicira situaciju. Upravo sa ovim se povezuju problemi u poslovanju i ekonomiji, posebice uključujući i one u proizvodnji, rutiranju i raspoređivanju, pa se ti problemi mogu nazvati problemi optimizacije. Ovakvi problemi su uglavnom teško rješivi, te je zbog toga u radu opisan način rješavanja istog, te metode koje se koriste pri tome. Metode za rješavanje problema optimizacije prijevoza su matematičke i heurističke.

U praktičnom dijelu ovog rada prikazana je izrada ruta pomoću matematičkih metoda. Primjenom tri različite metode izračuna, svaka je korištena za određivanje najbolje rute prijevoza triju različitih ruta vozila. Nakon dobivenih rezultata te njihovih usporedbi može se reći da u obrađenim primjerima, metode nam daju zanimljive razlike u rezultatima. Dakle, prva ruta prema izračunima ispada posve jednaka po svim metoda. Ruta vozila 2 je potpuno različita po metodama, gdje se korištenjem Clark – Wright - ove metode dobiva najkraća ruta. Metoda najbližeg susjeda, te metoda grananja i ograničavanja daju gotovo identične rezultate, te u usporedbi s njima, ruta dobivena Clark – Wright – ovo metodom kraća je za 4,86%. Treća ruta vozila također daje gotovo iste rezultate. Mala razlika je dobivena Clark -Wright – ovom metodom, koja je u odnosu na ostale dvije identične metode, duža zanemarivih 0,33%. Prilikom izrada ovih ruta matematičkim metodama glavni kriterij bio je parametar udaljenost. Njihovom analizom utvrđeno je postoji li mogućnost dodatnih smanjenja troškova. Naravno, najkraći put ne mora značiti i najefikasniji. Dakle, za vjerovati je da matematičke metode ne omogućavaju izračunavanje potpuno optimalnih rješenja, pogotovo ako znamo više faktora koji utječu na efikasnost prijevoza. Pozitivno je da su matematičke metode relativno jeftini način na čijoj se osnovi može doći do željenih rezultata, kojima se može lakše provjeriti, te na

osnovu toga donijeti potpuni zaključak o najisplativijoj ruti. Stoga, rješenja treba uzeti kao preporuku. Spomenuti treba da su matematičke metode temelji programskih alata za detaljnije izračune s više parametara, ali takvi se alati ne isplate korisnicima s malim vozim parkom ako računamo da je implementacija takvih sustava znatna investicija. Vjeruje se da je manjim vozim parkovima više isplativo određivanje ruta pomoću matematičkih metoda koje su besplatne, a puno učinkovitije od intuitivnog načina.

## LITERATURA

- [1] Čavrak, V., *Ekonomika prometa, Škola za cestovni promet*, Zagreb, 2009.
- [2] Preuzeto sa: [www.securus.co.rs/gps-pracenje-vozila](http://www.securus.co.rs/gps-pracenje-vozila) (Pristupljeno: travanj 2019.)
- [3] Preuzeto sa: [www.njuskalo.hr/kamioni-cisterne/mercedes-1850-cisterna-prehranu-mlijeko-oglas-18821347](http://www.njuskalo.hr/kamioni-cisterne/mercedes-1850-cisterna-prehranu-mlijeko-oglas-18821347) (Pristupljeno: travanj 2019.)
- [4] Ivaković, Č., Stanković, R., Šafran, M.: *Špedicija i logistički procesi*, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 2010.
- [5] Bošnjak, I., Županović, I.: *Analiza tržišta cestovnog prijevoza u Republici Hrvatskoj*, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 2006.
- [6] Europska komisija: *Bijela knjiga, Plan za jedinstveni europski prometni prostor*, Bruxelles, 2011.
- [7] Županović, I. *Tehnologija cestovnog prijevoza*. Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 1998.
- [8] Rogić K., Šutić B., Kolarić G. *Methodology of Introducing Fleet Management System*. *Promet – Traffic&Transportation*, vol. 20, p.105-106, 2008.
- [9] Kolarić G., Skorić L. *Metode distribucije u gradska središta*. *Tehnički glasnik* 8, str. 405-412, 2014.
- [10] Carić, T., Fosin, J. *Autorizirana predavanja iz kolegija Optimizacija prometnih procesa*, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 2015.
- [11] Zelenika, M.; *Vrijeme rada i odmora; Autorizirana predavanja iz kolegija Organizacija prijevoza putnika*, Fakultet prometnih znanosti, 2014.
- [12] Preuzeto sa: [files.fpz.hr/Djelatnici/tcaric/Tonci-Caric-Optimizacija-prometnih-procesa.pdf](http://files.fpz.hr/Djelatnici/tcaric/Tonci-Caric-Optimizacija-prometnih-procesa.pdf) (Pristupljeno: 15.03.2019.)
- [13] Preuzeto sa: [www.fmlc.com.hr/smanjite-kilometrazu-koristenjem-gps-a/](http://www.fmlc.com.hr/smanjite-kilometrazu-koristenjem-gps-a/) (Pristupljeno: travanj 2019.)
- [14] Preuzeto sa: [marker.hr/blog/buducnost-e-commercea-skladista-kojem-rade-roboti-296/](http://marker.hr/blog/buducnost-e-commercea-skladista-kojem-rade-roboti-296/) (Pristupljeno: svibanj 2019.)

- [15] Preuzeto sa: [www.qubole.com/big-data-analytics/](http://www.qubole.com/big-data-analytics/) (Pristupljeno: svibanj 2019.)
- [16] Preuzeto sa: [www.securus.co.rs/gps-pracenje-vozila](http://www.securus.co.rs/gps-pracenje-vozila) (Pristupljeno: svibanj 2019.)
- [17] Preuzeto sa: [www.rtvsllo.si/zabava/avtomobilnost/novice/leta-2018-prodor-baterijskih-vozil-na-slovenski-trg/441740](http://www.rtvsllo.si/zabava/avtomobilnost/novice/leta-2018-prodor-baterijskih-vozil-na-slovenski-trg/441740) (Pristupljeno: svibanj 2019.)
- [19] Preuzeto sa: [www.autoluco.com/veliki-servis](http://www.autoluco.com/veliki-servis) (Pristupljeno: lipanj 2019.)
- [20] Preuzeto sa: <https://wreg.com/2017/01/11/fedex-hosting-job-fair-saturday/> (Pristupljeno: lipanj 2019.)
- [21] Preuzeto sa:  
<https://uprava.gov.hr/UserDocsImages/Istaknute%20teme/Smjernice%20za%20upravljanje%20voznim%20parkom.pdf> (Pristupljeno: svibanj 2019.)
- [22] Preuzeto sa:  
[blog.routific.com/howdoexpertslikefedexplantheirroutes](http://blog.routific.com/howdoexpertslikefedexplantheirroutes) [sea9ca1b02afd?fbclid=IwAR3hwpVyZMKIZX0BIleD4M3QrVis2BPlZ7y9hFS04MQGsYVNuCX795xYVsI](https://www.facebook.com/IwAR3hwpVyZMKIZX0BIleD4M3QrVis2BPlZ7y9hFS04MQGsYVNuCX795xYVsI) (Pristupljeno: svibanj 2019.)
- [23] Preuzeto sa :  
[www.google.com/search?q=40+feet+container+high+cube+dimensions&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwit7afP18rjAhXlqHEKHWUjDQcQ\\_AUIESgB&biw=1366&bih=657#imgsrc=G3IGXgcBxu7dwM](http://www.google.com/search?q=40+feet+container+high+cube+dimensions&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwit7afP18rjAhXlqHEKHWUjDQcQ_AUIESgB&biw=1366&bih=657#imgsrc=G3IGXgcBxu7dwM) (Pristupljeno: svibanj 2019.)
- [24] Stanković, R., Pašagić Škrinjar, J. Autorizirana predavanja iz kolegija Logistika i transportni modeli, Zagreb, 2015.
- [25] Preuzeto sa: <http://www.zemris.fer.hr/~golub/ga/studenti/martinjak/Usporedba.pdf> (Pristupljeno: svibanj 2019.)
- [26] Preuzeto sa: [https://bib.irb.hr/datoteka/594933.Diplomski\\_rad\\_-\\_Alan\\_Tus.pdf](https://bib.irb.hr/datoteka/594933.Diplomski_rad_-_Alan_Tus.pdf) (Pristupljeno: kolovoz 2019.)
- [27] Teodorović, D., Transportne mreže, Saobraćajni fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd 2007.
- [28] Golden B.L., Magnanti T.L., Nguyen H.Q.: Implementing Vehicle Routing Algorithms, Networks 7, 1997.

## POPIS SLIKA

|                                                                                |    |
|--------------------------------------------------------------------------------|----|
| SLIKA 1 UPRAVLJANJE PRIJEVOZOM ROBE.....                                       | 3  |
| SLIKA 2 DIJAGRAM BIG DATA MOGUĆNOSTI.....                                      | 9  |
| SLIKA 3 BESPILOTNA LETJELICA AMAZONA .....                                     | 11 |
| SLIKA 4 ZADACI UPRAVLJANJA VOZNIM PARKOM.....                                  | 12 |
| SLIKA 5 GPS NAČIN PRAĆENJA VOZILA .....                                        | 13 |
| SLIKA 6 ČETIRI OSNOVNA KORAKA RJEŠENJA PROBLEMA MATEMATIČKIM MODELIRANJEM..... | 16 |
| SLIKA 7 PRIKAZ NAJUČESTALIJIH INAČICA PROBLEMA USMJERAVANJA VOZILA .....       | 23 |

## POPIS TABLICA

|                                                                                                                |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| TABLICA 1. MATRIČNI PRIKAZ UDALJENOSTI ZA RUTU 1 VOZILA 1 .....                                                | 27 |
| TABLICA 2. MATRIČNI PRIKAZ ZA IZRAČUN RUTE 1 VOZILA 1, METODA NAJBЛИŽEG SUSJEDA ....                           | 28 |
| TABLICA 3. MATRIČNI PRIKAZ ZA IZRAČUN RUTE 1 VOZILA 1 .....                                                    | 28 |
| TABLICA 4. MATRIČNI PRIKAZ IZRAČUNA RUTE 1 VOZILA 1 .....                                                      | 29 |
| TABLICA 5. MATRIČNI PRIKAZ IZRAČUNA RUTA 1 VOZILA 1 .....                                                      | 29 |
| TABLICA 6. MATRIČNI PRIKAZ IZRAČUNA RUTE 1 VOZILA 1, PRIMJENOM METODE NAJBЛИŽEG<br>SUSJEDA .....               | 30 |
| TABLICA 7. KONAČNI MATRIČNI PRIKAZ IZRAČUNA RUTE 1 VOZILA 1 .....                                              | 30 |
| TABLICA 8. MATRICA UDALJENOSTI IZMEĐU TOČAKA RUTE 1 VOZILA 2, CLARK – WRIGHT – OV<br>ALGORITAM „UŠTEDA“ .....  | 31 |
| TABLICA 9. LISTA RANGIRANIH UŠTEDA PREMA VELIČINI ZA RUTU 1 VOZILA 2.....                                      | 32 |
| TABLICA 10. MATRIČNI PRIKAZ UDALJENOSTI ZA RUTU 1 VOZILA 1, PRIMJENOM METODE<br>GRANANJA I OGRANIČAVANJA ..... | 34 |
| TABLICA 11. MATRIČNI PRIKAZ REDUCIRANE MATRICE ZA IZRAČUN RUTE 1 VOZILA 1 .....                                | 34 |
| TABLICA 12. MATRIČNI PRIKAZ IZRAČUNA RUTE 1 VOZILA 1 .....                                                     | 35 |
| TABLICA 13. MATRIČNI PRIKAZ ZA IZRAČUN RUTE 1 VOZILA 1 .....                                                   | 35 |
| TABLICA 14. MATRIČNI PRIKAZ ZA IZRAČUN RUTE 1 VOZILA 1 .....                                                   | 36 |
| TABLICA 15. MATRIČNI PRIKAZ ZA IZRAČUN RUTE 1 VOZILA 1 .....                                                   | 36 |
| TABLICA 16. MATRIČNI PRIKAZ REDUCIRANE MATRICE RUTE 1 VOZILA 1 .....                                           | 37 |
| TABLICA 17. MATRICA UDALJENOSTI ZA IZRAČUN RUTE 2 VOZILA 2, PRIMJENOM METODE<br>NAJBЛИŽEG SUSJEDA.....         | 37 |
| TABLICA 18. KONAČNI MATRIČNI PRIKAZ UDALJENOSTI ZA RUTU 2 VOZILA 2.....                                        | 38 |
| TABLICA 19. LISTA UŠTEDA ZA RUTU 2 VOZILA 2 PREMA VELIČINI.....                                                | 39 |
| TABLICA 20. MATRIČNI PRIKAZ UDALJENOSTI ZA RUTU 2 VOZILA 2, PRIMJENOM METODE<br>GRANANJA I OGRANIČAVANJA ..... | 40 |
| TABLICA 21. MATRIČNI PRIKAZ REDUCIRANE MATRICE ZA VOZILO 2 .....                                               | 40 |
| TABLICA 22. MATRIČNI PRIKAZ IZRAČUNA ZA RUTU 2 VOZILA 2.....                                                   | 41 |
| TABLICA 23. MATRICA UDALJENOSTI ZA RUTU 3 VOZILA 3, PRIMJENOM METODE NAJBЛИŽEG<br>SUSJEDA .....                | 42 |
| TABLICA 24. KONAČNI MATRIČNI PRIKAZ UDALJENOSTI ZA RUTU 3 VOZILA 3.....                                        | 42 |
| TABLICA 25. LISTA UŠTEDA ZA RUTU 3 VOZILA 3 PREMA VELIČINI.....                                                | 44 |

|                                                                                                                |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| TABLICA 26. MATRIČNI PRIKAZ UDALJENOSTI ZA RUTU 3 VOZILA 3, PRIMJENOM METODE<br>GRANANJA I OGRANIČAVANJA ..... | 45 |
| TABLICA 27. MATRIČNI PRIKAZ REDUCIRANE MATRICE ZA RUTU 3 VOZILA 3.....                                         | 45 |
| TABLICA 28. KONAČNI MATRIČNI PRIKAZ IZRAČUNA ZA RUTU 3 VOZILA 3 .....                                          | 46 |
| TABLICA 29. REZULTATI DOBIVENI PRIMJENOM MATEMATIČKIH MODELA .....                                             | 47 |

## POPIS GRAFIKONA

|                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------|----|
| GRAFIKON 1. ODNOSI RUTA VOZILA I DOBIVENIH RJEŠENJA ..... | 47 |
|-----------------------------------------------------------|----|



Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet prometnih znanosti  
10000 Zagreb  
Vukelićeva 4

## IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI I SUGLASNOST

Izjavljujem i svojim potpisom potvrđujem kako je ovaj \_\_\_\_\_ diplomski rad  
isključivo rezultat mog vlastitog rada koji se temelji na mojim istraživanjima i oslanja se na  
objavljenu literaturu što pokazuju korištene bilješke i bibliografija.

Izjavljujem kako nijedan dio rada nije napisan na nedozvoljen način, niti je prepisan iz  
necitiranog rada, te nijedan dio rada ne krši bilo čija autorska prava.

Izjavljujem također, kako nijedan dio rada nije iskorišten za bilo koji drugi rad u bilo kojoj drugoj  
visokoškolskoj, znanstvenoj ili obrazovnoj ustanovi.

Svojim potpisom potvrđujem i dajem suglasnost za javnu objavu \_\_\_\_\_ diplomskog rada  
pod naslovom **Analiza matematičkih metoda u procesu određivanja ruta prijevoza**

na internetskim stranicama i repozitoriju Fakulteta prometnih znanosti, Digitalnom akademskom  
repozitoriju (DAR) pri Nacionalnoj i sveučilišnoj knjižnici u Zagrebu.

U Zagrebu, \_\_\_\_\_ 11/09/2019 \_\_\_\_\_

Student/ica:

*delavić*  
(potpis)