Određivanje najkraćeg puta u prometnoj mreži

Šanjug, Matija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET PROMETNIH ZNANOSTI

Matija Šanjug

ODREĐIVANJE NAJKRAĆEG PUTA U PROMETNOJ MREŽI

DIPLOMSKI RAD

Zagreb, 2019.

Sveučilište u Zagrebu

Fakultet prometnih znanosti

DIPLOMSKI RAD

ODREĐIVANJE NAJKRAĆEG PUTA U PROMETNOJ MREŽI

DETERMINING THE SHORTEST PATH IN THE TRANSPORT NETWORK

Mentor: prof. dr. sc. Jasmina Pašagić Škrinjar

Student: Matija Šanjug

JMBAG: 0135234464

Zagreb, rujan 2019.

SAŽETAK

U upravljanju i planiranju logističkim procesima opskrbnoga lanca skoro svi logistički problemi koji se pojavljuju spadaju u probleme optimiranja, odnosno riječ je o problemima koji imaju više mogućih rješenja. Kroz ovaj rad bit će razrađene različite metode određivanja najkraćeg puta u transportnoj mreži. U radu će se koristiti i analizirati metode: Clark-Wrightov algoritam ušteda, Clark-Wright-ov algoritam ušteda – metoda s indikatorom T, metoda najbližeg neposjećenog susjeda, metoda grananja i ograničavanja te metoda linearnog programiranja. Tim metodama će se tražiti najkraći put u prometnoj mreži. U istraživanju će se analizirati metode, usporediti ih te naglasiti njihove pozitivne i negativne strane koje će biti prikazane na realnim primjerima. Cilj istraživanja je pronaći i prepoznati prednosti i mane pojedine metode te pronaći najpogodniju metodu.

KLJUČNE RIJEČI: optimizacija ruta; najkraći put; matematičke metode; metoda linearnog programiranja

SUMMARY

In the management and planning of supply chain logistics processes, almost all of the logistical problems that arise are optimization problems, that is, problems that have several possible solutions. Through this paper, different methods of determining the shortest path in the transport network will be elaborated. Methods that will be used and analyzed in the paper are: Clark-Wright Savings Algorithm, Clark-Wright Savings Algorithm - T Indicator Method, Nearest Neighbor Neighbor Method, Branching and Limiting Method, and Linear Programming Method. These methods will look for the shortest route in the transport network. The research will analyze the methods, compare them and highlight their positives and negatives, which will be presented on real life examples. The aim of the research is to find and identify the advantages and disadvantages of each method and find the most suitable method.

KEY WORDS: route optimization; the shortest path; mathematical methods; linear programming method

SADRŽAJ

1. UVOD

Logistika kao znanost i djelatnost imala je i još uvijek ima veliku ulogu u razvoju ljudske civilizacije kakva se danas poznaje i u kojoj živimo te je iz istog razloga jedan od ciljeva svake poslovne organizacije da kroz sustav logistike optimizira svoje troškove te tako bude konkurentnija na tržištu i stječe zadovoljne korisnike.

Globalizacija je utjecala tako što su se pojavila nova tržišta te su se tako širila postojeća tržišta, a to je dovelo do povećanja kretanja dobara. Povećanje ukupnog broja stanovništva na Zemlji dovelo je do drugačijeg vrednovanja radne snage odnosno do lakšeg pronalaska jeftine radne snage što je kasnije utjecalo na cijenu proizvoda. Informatizacija i kompjuterizacija imaju utjecaj na sve aspekte modernog načina života pa tako imaju i veliki utjecaj na logističke procese.

Zbog sve većih zahtjeva suvremenog tržišta poduzeća i tvrtke na razne načine smanjuju troškove kako bi bili što konkurentniji na tržištu. U razvoju tehnologija i u proizvodnji malo se može učiniti u smanjenju troškova pa zbog toga veliki značaj u smanjenju troškova imaju logistika i optimizacija opskrbnih lanaca. Jedna mogućnost toga je i tema ovog seminara, odnosno određivanje najkraćeg puta u prometnoj mreži.

U izradi rada korišteni su podaci prikupljeni u stvarnoj logističkoj tvrtki te se ruta nalazi na teritoriju Republike Hrvatske. Rad je podijeljen u sedam cjelina:

1. Uvod
2. Zadaci i ciljevi transportne logistike
3. Teorijske odrednice optimizacije rute u prometnoj mreži
4. Određivanje ruta pomoću matematičkog modela
5. Zadatak-određivanje najkraćeg puta
6. Komparacija zadanih metoda
7. Zaključak

U poglavlju „Zadaci i ciljevi transportne logistike“ opisana je transportna logistika te su objašnjeni njezini ciljevi i zadaci. Također objašnjena je i težnja za nepretkom transportnog sustava.

U poglavlju „Teorijske odrednice optimizacije rute u prometnoj mreži“ objašnjena je struktura prometne mreže. Definirano je optimiranje te su također objašnjeni pouzdanost i troškovi kao najvažniji kriteriji odabira prometnog pravca.

U poglavlju „Određivanje ruta pomoću matematičkih modela“ opisane su sve metode. Objašnjene su: metoda najbližeg neposjećenog susjeda, metoda grananja i ograničavanja, Clark-Wright-ov algoritam ušteda, Clark-Wright-ov algoritam ušteda - metoda s indikatorom T te metoda linearnog programiranja.

Praktični dio rada odvija se u poglavlju „Zadatak-određivanje najkraćeg puta.“ Korištenje metoda u ovom poglavlju odvija se na stvarnom primjeru, odnosno na toj ruti kako bi se dobili stvarni podaci koji će se koristiti za komparaciju metoda u poglavlju „Komparacija zadanih metoda.“

U posljednjem poglavlju nalazi se osvrt na cjelokupni rad te su predstavljeni rezultati.

2. ZADACI I CILJEVI TRANSPORTNE LOGISTIKE

Transportna logistika može se definirati kao znanstvena disciplina i kao stručna djelatnost u organizaciji i optimizaciji prijevoza robe i ljudi. Cilj joj je udovoljiti zahtjevima kupaca po najpovoljnijoj cijeni. Obuhvaća postupak planiranja, sprovođenja i kontrole protoka robe, informacija i financijskih sredstava prilikom isporuke robe krajnjim korisnicima. Ona omogućuje pokretanje proizvodnih procesa, otpremu gotovih proizvoda te povrat proizvoda. Također se koristi za odabir odgovarajuće vrste prometa (cestovni, željeznički, zračni, morski ili riječni), pripremu prijevoznih dokumenata, uređivanje vremena prijevoza i tako dalje.[1]

Primarni zadatak transportne logistike odnosno distribucijske logistike je, zajedno s ostalim sudionicima logističkog procesa, krajnjem potrošaču omogućiti da „pravi proizvod dobije na pravome mjestu u pravo vrijeme“ („Just-in-time“). Takav sustav mora krenuti od dobave potrebnih sirovina proizvođača do trenutka kada krajnji korisnik konzumira proizvod odnosno uslugu. Ključan je i pojam prijevoza, koji označuje stvarno fizičko premještanje ljudi i dobara od točke X do točke Y ne uključujući bilo kakve druge aktivnosti.[2]

Promjene u načinima proizvodnje te razvoj novih poslovnih modela vezanih uz lanac opskrbe također u snažno utjecali na promjene u transportnoj logistici. S proizvodne strane, sve veće oslanjanje na Just-in-time sustav dovelo je do povećanja zahtijeva za kvalitetnom transportnom podrškom. Na strani prodaje, tvrtke prihvaćaju sustave brze distribucije za specijalizirane proizvode koji se odnose na sustav naručivanja i brzog reagiranja na promjene u potražnji potrošača. Na taj se način nastoje smanjiti troškovi zaliha i pojava viška proizvoda koji bi se kasnije trebali prodavati po sniženim cijenama. Sve to također dovodi do važnih promjena u prijevoznoj logistici i upravljanju opskrbnim lancima.[3]

---

[1] Rihtarić M. i Šafran M. Transportna logistika, Hrvatska tehnička enciklopedija, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2017. URL: http://tehnika.lzmk.hr/transportna-logistika.

[2] Krpan Lj., Furjan M. i Maršanić R. Potencijali logistike povrata u maloprodaji, Tehnički glasnik, Vol. 8, No. 2, pp. 183, 2014.

[3] Kolaković M. Novi poslovni modeli u virtualnoj ekonomiji i njihov utjecaj na promjene u transportnoj logistici i upravljanju lancem opskrbe, Zbornik Ekonomskog fakulteta u Zagrebu, Vol. 3, No. 1, pp. 203, 2005.

Određene karakteristike sustava transportnih i logističkih usluga imaju primarnu važnost u valorizaciji određenog prometnog puta na tržištu prometnih usluga te njihovo zadovoljenje određuje budućnost poslovanja. Stoga se tim zadaćama koje se želi postići treba obratiti posebna pozornost, a one su:

- zadovoljavanje potreba kupaca,
- zaštita okoliša,
- kontinuirano poboljšavanje transportnih i pratećih logističkih usluga.[4]

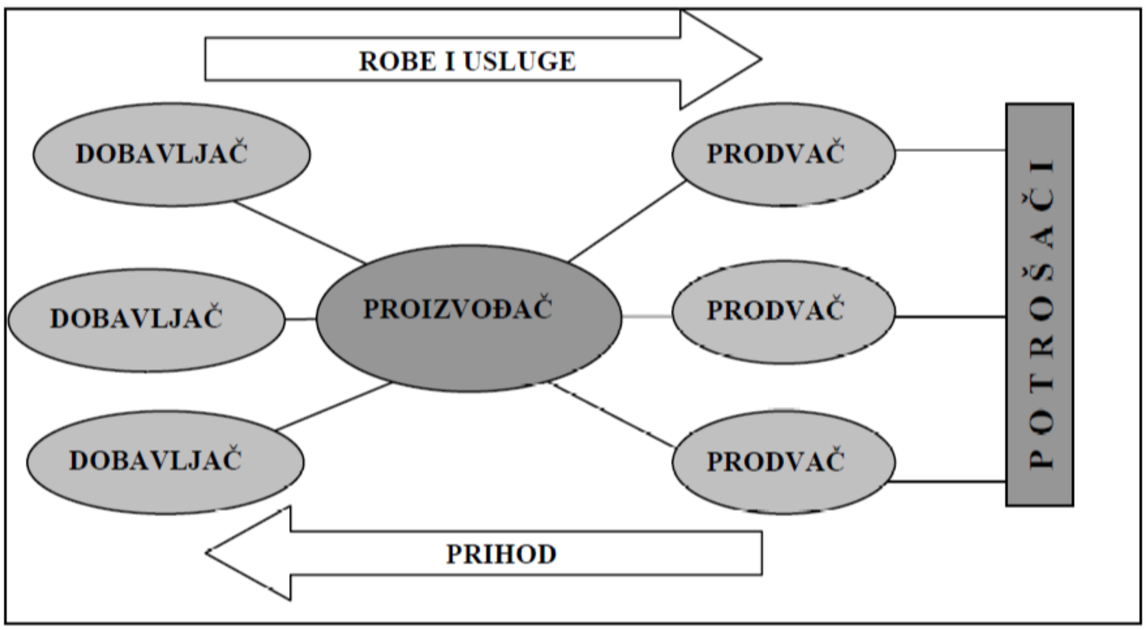
Najvažnija zadaća transportne logistike je zadovoljavanje potreba korisnika, što je razumljivo s obzirom da se stvaranje usluga transporta i logistike ne može uzeti kao cilj sam za sebe. Zadovoljiti potrebe prometnog tržišta zathjeva prijevoz putnika i robe prema odredištu tijekom određenog vremena, uz široki spektar popratnih logističkih usluga. Korisnik transportnih i logističkih usluga zauzima središnje mjesto jer upravo njegovo zadovoljstvo ili nezadovoljstvo (izravno ili neizravno) određuje razinu kvalitete prijevozne usluge. Drugim riječima, konačna ocjena kvalitete određuje odnos između ostvarenih želja i stvarnih potreba korisnika i konačnog proizvoda - transportne i logističke usluge. Tek prema dobivenoj ocjeni korsinika može se odrediti povoljan ili nepovoljan rezultat sa svim posljedicama koje on stvara.[5]

Zaštita okoliša također je ključan cilj transportne logistike, s obzirom na to da je zaštita okoliša i upravljanje okolišem dominantno područje ne samo u polju transporta, već je i ključno pitanje u opstanku ljudske vrste, pa ono mora biti prihvaćeno kao jedan od temeljnih čimbenika u određivanju kvalitete logističke aktivnosti. Temelj budućeg osiguranja i upravljanja kvalitetom usluge ovisi o čvršćem povezivanju s kriterijima zaštite okoliša i sigurnosti kao logična pretpostavka za postizanje svih drugih ciljeva transportne logistike. Stoga, poštujući i slijedeći ovaj cilj obvezuje prijevoznike i sve druge subjekte koji su uključeni u proizvodnju transportnih usluga na kontinuiranu kontrolu i kontinuirano poboljšavanje utjecaja na okoliš u svim fazama

[4] Poletan Jugović T. Prilog definiranju kvalitete transportno-logističke usluge na prometnom pravcu, Pomorstvo, Vol. 21, No. 2, pp. 104, 2007.
[5] Ibid. pp. 105.

pripreme i realizacija usluge. Time se mogu stvoriti uvjeti za pružanje kvalitetne usluge uz maksimalno očuvanje prirodnih resursa.[6]

Transportna logistika, vođena težnjom za napredak, danas kontinuirano prolazi kroz rekonstruiranje. To je jednim dijelom posljedica brojnih deregulacija koje su uzrokovale brze promjene u strukturi prometne industrije. Transportna industrija tradicionalno je podijeljena u nekoliko segmenata (cestovni, željeznički, morski i zračni), te dodatno prema veličini i težini pošiljki. Tradicionalni način transporta (Slika 1.) je uslijed potreba tržišta za kompleksnijom podijelom rada zastario je te kroz promjene u transportnoj industriji zamijenjen modernijim i kompleksnijim sustavom.[7]



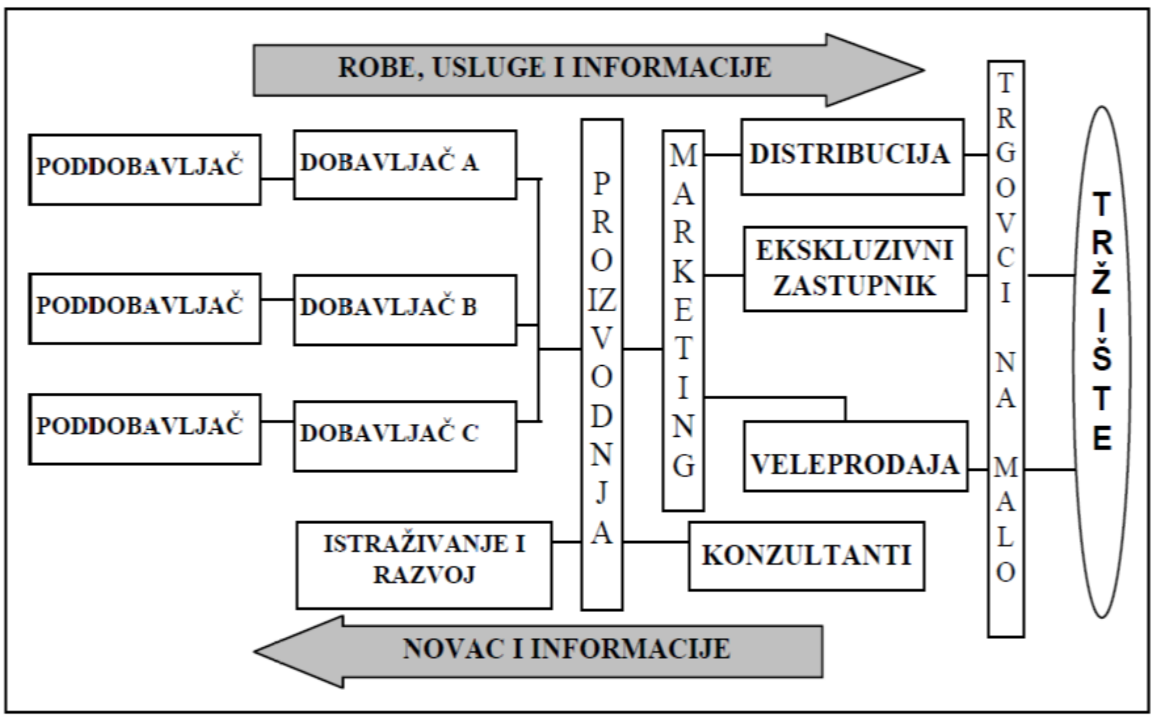
Slika 1. Tradicionalni način transporta

Izvor: Kolaković M. Novi poslovni modeli u virtualnoj ekonomiji i njihov utjecaj na promjene u transportnoj logistici i upravljanju lancem opskrbe, Zbornik Ekonomskog fakulteta u Zagrebu, Vol. 3, No. 1, pp. 202, 2005.

Danas, granice između različitih segmenata prometne industrije nestaju jer su tvrtke koje su se prije posebno specijalizirale za određenu kategoriju prijevoza, sada kroz kupnju ili spajanje s

[6] Ibid. pp. 105-106.
[7] Kolaković M. Novi poslovni modeli u virtualnoj ekonomiji, pp. 202-203.

tvrtkama iz drugih industrijskih segmenata postale obuhvatnije. Ključni faktor pokretanja restrukturiranja prometne industrije također je sve veći broj samostalnih poduzetnika koji pružaju logističke usluge. To su specijalizirane tvrtke koje se brinu za funkcije skladištenja i prijevoza. Neke od tih tvrtki jednostavno su neovisni su posrednici koji vode računa o transportnoj logicstici kroz sklapanje ugovora s drugim prijevoznim tvrtkama, a time i unutar transportne logistike dolazi do umrežavanja i stvaranja složenijeg sustava (Slika 2.). Da bi takav moderan lanac opskrbe djelovao, potrebna je visoka razina međusobnog povjerenja i svijesti o koristi za obje strane zajedničkog djelovanja na tržištu te svakako otvorena razmjena potrebnih informacija i znanja, koja bi trebala trajati kroz cijelo vrijeme održavanja poslovne suradnje. [8]



Slika 2. Suvremeni način transporta

Izvor: Kolaković M. Novi poslovni modeli u virtualnoj ekonomiji i njihov utjecaj na promjene u transportnoj logistici i upravljanju lancem opskrbe, Zbornik Ekonomskog fakulteta u Zagrebu, Vol. 3, No. 1, pp. 203, 2005.

Ovdje leži bitna razlika spram tradicionalnim načinom prijevoza gdje, osim potrebne komunikacije, nema aktivnog dijaloga i razmjene informacija. Time se pokazuje važnost protoka

[8] Ibid. pp. 203.

informacija za modernu proizvodnja, ali i svaku drugu ekonomsku aktivnost. Ovakav način poslovanja rezultira opipljivim koristima. Ovako utemeljen sustav proizvodnje vrlo je fleksibilan u razmjeni informacija, tako da se promjene, koje se događaju stalno, mogu brzo uočiti čime se povećava dostupno vrijeme za učinkovito djelovanje. Naravno, ovakvi napretci uvijek zahtijevaju još jedan kritični poslovni resurs današnjce - kvalitetan intelektualni kapital.[9]

[9] Ibid. pp. 203-204.

3. TEORIJSKE ODREDNICE OPTIMIZACIJE RUTE U PROMETNOJ MREŽI

Prometna mreža je sustav međusobno povezanih prometnih čvorišta, cesta, koridora, ruta, linija, prometnih lanaca koji omogućava brze, sigurne i racionalne procese proizvodnje transportnih proizvoda. Prometne mreže omogućavaju prijevoz stvari, materijala, robe ili putnika s jednog mjesta na drugo, istodobno prevladavajući prostorne i vremenske dimenzije. Prometne mreže čine više prometnih lanaca koji mogu imati više ili manje veza, to jest veći ili manji broj prometnica, koridora i drugih čimbenika. Čvorovi u prometnim mrežama su zapravo manja ili veća skladišta, terminali (univerzalni ili specijalizirani, logistički centri, stanice (autobusne, željezničke), luke (morske, riječne) i tako dalje.[10]

Temeljna funkcija mreže je omogućiti sigurno, učinkovito, ekološko i isplativo kretanje ljudi, roba i informacija od izvora do odredišta. Čvorovi, koji se nazivaju i vrhovi (eng. *vertex*, *node*), mrežni su elementi u kojima se koncentriraju, propuštaju, usmjeravaju, presijecaju, slijevaju ili odlijevaju prometni tokovi vozila (vlakovi, zrakoplovi, brodovi, informacije, paketi podataka). Nadalje, tamo se obavlja prikupljanje karata, skladištenje, informiranje korisnika i brojne druge aktivnosti. Konkretno govoreći, čvorovi mogu biti gradovi, raskrižja, zračne luke, željezničke stanice, autobusne stanice, pošte, robni terminali i druge poveznice. Čvorovi su međusobno povezani linkovima u prometnoj mreži koji služe za fizički prijevoz bez dodatnih usluga. Primjeri linkova u prometnoj mreži su: ulice, ceste, plovni putovi, zračni putevi, željeznice i tako dalje. Svaku mrežu možemo opisati matematički preko grafova i analitički preko matrica. Na taj se način mogu analizirati realni sustavi, poput gradova povezanih cestama ili rafinerije i potrošači povezani naftovodima ili plinovodima te druge mreže.[11]

Prema otvorenosti za korisnike, razlikuje se:

- javne mreže

[10] Buntak K., Grgurević D. i Drožđek I. Međusobni odnos logističkih i transportnih sustava, Tehnički glasnik, Vol. 6, No. 2, pp. 230, 2012.
[11] Šimunović Lj. Nastavni materijali iz kolegija Osnove prometnoga inženjerstva, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 2015.

- zatvorene (privatne) mreže,
- virtualne privatne mreže.

Prema prostornom obuhvatu, razlikuje se:

- lokalne/mjesne mreže,
- regionalne mreže,
- nacionalne mreže,
- međunarodne mreže,
- globalne mreže.

Prema načinu vođenja prometa i upravljanja prometnim entitetima, razlikuju se:

- prometne mreže bez centraliziranog nadzora i vođenja,
- prometne mreže s djelomičnim nadzorom i samostalnim upravljanjem prometnih entiteta,
- prometne mreže s centraliziranim automatiziranim vođenjem.[12]

Transportni lanci imaju ključnu ulogu u savladavanju prostornih i vremenskih dimenzija u sustavima prodaje, transporta ili logistike u distribuciji materijalnih dobara između mjesta proizvodnje i mjesta potrošnje. Njihov je osnovni zadatak, kao uopće i transportne logistike, omogućiti optimizaciju proizvodnih procesa za transportne proizvode s ciljevima sigurnosti, brzine i racionalizacije. Zahvaljujući znanju, vještinama i stalnim napretcima u transportnoj logistici proizvođači transportnih proizvoda omogućuju, putem transportnih lanaca, prijevoz materijalnih dobara s jednog mjesta na drugo, bez obzira na broj veza u prometnim lancima te izazova prostornih i vremenskih dimenzije procesa proizvodnje transportnih proizvoda.[13]

Procesi prometnog tržišta kontinuirano prolaze kroz evoluciju. Osnovna zadaća prijevoznika u pogledu zahtjeva za transportom i logistikom jest prilagoditi strategiju i odrediti što će zainteresirati korisnike i pronaći optimalan odgovor na sve njihove potrebe transporta i logistike na određenom prometnom putu. Problem izbora optimalne prometne rute složen je zadatak koji

[12] Ibid.
[13] Buntak K., Grgurević D. i Drožđek I. Međusobni odnos logističkih i transportnih sustava, pp. 231.

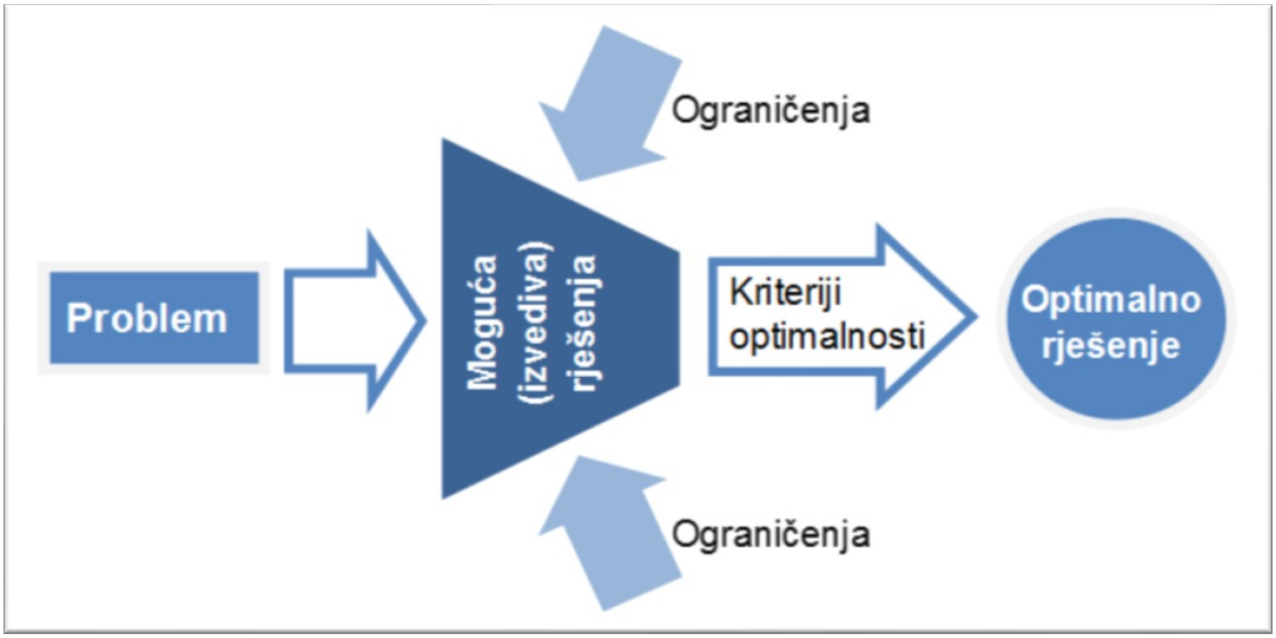
uključuje analizu, planiranje i upravljanje mnogim čimbenicima i elementima koji određuju prometni put. U skladu s tim, postoji potreba za određenom metodologijom za analizu, istraživanje i donošenje odluka povezanih s tim pitanjima. Kriteriji se trebaju definirati s obzirom na njihovu težinu, odnosno s obzirom na važnost koju ti kriteriji imaju za korisnika usluge, uzimajući u obzir specifičnosti pojedinih vrsta prijevoza, vrsta tereta i druge čimbenike, što sve dovodi do velikih varijacija u pogledu odabira nabolje rute. Pored toga, kriteriji se moraju analizirati usporedo u okruženju, to jest uspoređujući situaciju s nekoliko alternativnih prometnih pravaca koji se međusobno natječu u privlačenju istih robnih tokova.[14]

Pouzdanost i troškovi prijevoza na vrhu su ljestvice kao najvažnije odrednice odabira prometnog pravca. Vrijeme prijevoza je kriterij čiji se prioritet povećava sukladno povećanju trajanja puta, čime su ujedno povećavaju i mogućnosti uštede vremena. Premještanje tereta, elektroničko poslovanje, pouzdane narudžbe i dokumentacija nose manji prioritet. Navedeni kriteriji već su u službi transporta te su transparentni, za razliku od primjerice kriterija pouzdanosti i troškova prijevoza.[15] Primjenama matematičkih modela za optimizaciju ruta jedan je od načina na koji se može utjecati upravo na troškove prijevoza kao ključne odrednice odabira prometnog pravca, a time se ujedno djeluje na optimiranje šire prometne mreže.

Optimiranje se općenito može definirati kao postupak utvrđivanja najpovoljnijeg rješenja određenog problema s danim ograničenjima i usvojenim kriterijima optimalnosti (Slika 3). Pomoću matematičke terminologije postupak optimizacije može se definirati kao određivanje skupa vrijednosti „varijabla odlučivanja“ (promjenjivih veličina) kojima se postiže optimalna vrijednost „funkcije cilja“ (prema usvojenom kriteriju optimalnosti) s zadanim ograničenjima (uvjetima). Svrha optimizacije je maksimizirati korisnost (radni učinak, profit...) ili minimizirati potrošnju resursa s danim ograničenjima. Pritom je funkcija cilja je matematički opis skupa cilja, koji predstavlja kriterij optimalnosti, a postavljena ograničenja određuju „skup mogućih“ ili „izvedivih rješenja“, to jest kvantitativni raspon dopuštenih vrijednosti varijabla odlučivanja. Optimalno rješenje označuje najbolje (najpovoljnije) rješenje promatranog problema s obzirom na zadana ograničenja i usvojeni kriterij optimalnosti. Kriterija optimalnosti može biti više, a ovisno

[14] Poletan Jugović T. Struktura preferencije kriterija pri izboru optimalnog prometnog pravca, Pomorstvo, Vol. 20, No. 2, pp. 58, 2006.
[15] Ibid. pp. 58-60.

o uočenom problemu to može biti minimalizacija ili maksimizacija, odnosno minimiziranje jednih veličina dok se maksimiziraju druge.[16]



Slika 3. Postupak optimiranja

Izvor: Stanković R. i Pašagić Škrinjar J. Autorizirana predavanja iz kolegija Logistika i transportni modeli, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 2015, pp. 9.

[16] Stanković R. i Pašagić Škrinjar J. Autorizirana predavanja iz kolegija Logistika i transportni modeli, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 2015, pp. 7.

4. ODREĐIVANJE RUTA POMOĆU MATEMATIČKOG MODELA

Matematički modeli su u osnovi sustavi matematičkih izraza, jednadžba ili nejednadžba, koji opisuju objekt modeliranja, a sam pojam matematički model može se definirati kao:

- matematički opis objekta modeliranja (sustav, proces, događaj, problem...), bilo da se radi o postojećem modelu objekta ili nečemu što se tek treba graditi ili bi se moglo pojaviti;
- apstraktni prikaz stvarnog sustava koji koristi matematički jezik koji u primjenjivom obliku predstavlja postojeće znanje o tom sustavu.

Prema svrsi, razlikuju se dvije vrste matematičkih modela: optimizacijski modeli primijenjeni za postizanje maksimalne ili minimalne vrijednosti određene veličine (maksimalizacija profita, učinkovitost ili minimalizacija troškova, potrebno radno vrijeme i drugo), te modeli predviđanja koji se koriste za opisivanje i predviđanje stanja (događaja) koji se očekuju pod određenim uvjetima (predviđanje potražnje, rokova završetka određenih aktivnosti i drugo). Rezultati dobiveni na modelu predviđanja (odziv modela) mogu se koristiti kao ulaz podatci za optimizacijske modele kada je potrebno kvantificirati očekivane promjene.[17]

Logistički sustavi su dinamični sustavi koji se sastoje od velikog broja elemenata i njihovih interakcija, od kojih su mnoge nelinearni i nedeterminističke, a neka pojednostavljenja uvedena su u modeliranje kako bi se promatrani sustavi mogli matematički opisati. Na primjer, isključeni su određeni elementi sustava koji nisu relevantni za promatrani problem, zanemarena je stohastička komponenta odnosa, dinamičke količine se smatraju konstantnima i slično, ali pojednostavljenja su dopuštena samo u mjeri u kojoj ne mogu značajno utjecati na proizlaziti.[18]

[17] Stanković R. i Pašagić Škrinjar J. Autorizirana predavanja iz kolegija Logistika i transportni modeli, pp. 7.
[18] Ibid. pp. 8.

4.1. Metoda najbližeg neposjećenog susjeda

Metode najbližeg susjeda su raznolika skupina statističkih metoda objedinjenih idejom da se sličnost između točke i njenog najbližeg susjeda može koristiti za određeni statistički zaključak, odnosno da se ta sličnost može iskoristiti za stvaranje korisnih zaključaka. U nekim je slučajevima sličnost udaljenost između točke i najbližeg susjeda, u drugima se odgovarajuća sličnost temelji na drugim identifikacijskim karakteristikama točaka. Podaci o lokaciji mogu se koristiti za odgovaranje na mnogo različitih pitanja, ovisno o znanstvenom kontekstu i području primjene.[19]

Heuristika najbližeg susjeda je jedan od prvih algoritama za rješavanje „problema putujućeg trgovca, a često se koristi kao početno rješenje za testiranje heuristike popravljanja, ali rješenja su uvijek daleko od optimalnih. Algoritam djeluje nasumičnim odabirom početnog grada iz skupa gradova, njegovim dodavanjem rute i označavanjem odabranog grada kao posjećenog. Zatim se iz skupa neposjećenih gradova traži najbliži grad prethodno dodanom i dodaje ga se ruti te označuje kao posjećenog. Ovaj se korak ponavlja sve dok svi gradovi nisu posjećeni.[20]

Kod rješavanja problema ovom metodom zadaje se prvotno matrica udaljenosti između gradova, odnosno udaljenosti između različitih lokacija. Potrebno je izračunati minimalan put između lokacija pomoću metode najbližeg susjeda.

Postupak izračuna započinje na način da se odabere čvor, lokacije koja predstavlja početnu točku rute. Ruta započinje iz čvora iz kojeg je najmanja udaljenost do sljedećeg čvora te se odabire najmanja udaljenost prema jednom od čvorova (lokacija).

Na kraju postupka ostaju dva posljednja čvora za kompletnost rute. Potrebno je odabrati minimalnu udaljenost iz čvora prema pretposljednjem čvoru. Na kraju postupka polazni čvor ujedno mora predstavljati i završni čvor, dok su između svi preostali čvorovi u ruti, budući da je cilj dobiti Hamiltonov ciklus, odnosno da početna točka bude ujedno i završna točka.

[19] Dixon P. M. Nearest Neighbor Methods, Statistics Preprints 51, Iowa State University Digital Repository, 2001, pp. 1-2. URL: http://lib.dr.iastate.edu/stat_las_preprints/51.
[20] Carić T. Nastavni tekst iz kolegija Optimizacija prometnih procesa, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 2014, pp. 27.

4.2. Metoda grananja i ograničavanja

Problem trgovačkog putnika nastaje u situacijama kada je potrebno odabrati najprikladniju rutu (rutu s najmanjim troškovima putovanja) koju bi trebala slijediti osoba (trgovački putnik) koja prolazi kroz nekoliko gradova, krećući se iz jednog grada do drugog drugi i svaki grad posjeti samo jednom. Putni troškovi obično se uzimaju kao udaljenosti između gradova izraženih u kilometrima, mada to mogu biti i cijene javnog gradskog prijevoza ili nešto drugo.

Za početni korak potrebno je ispisati minimalne vrijednosti iz svakog retka, odnosno, traži se minimalni element u svakom retku (ui). Zatim se tim minimalnim vrijednostima oduzimaju sve vrijednosti istog retka. Za daljnji korak potrebno je izdvojiti minimalni element iz svakog stupca (vj). Oduzimaju se sve vrijednosti stupaca s minimalnim vrijednostima stupaca. Cilj ovih redukcija je dobiti prvau reduciranu matricu koja ima barem jednu nulu u svakom retku i svakom stupcu.

Polja koja sadrže nulu su kandidati za uspostavljanje direktne veze među gradovima, odnosno lokacijama. U daljnjem koraku donja granica na duljini svih kružnih puteva računa se prema sljedećoj formuli:

$$\sum_{i=1}^{n} ui + \sum_{j=1}^{n} vj$$

U navedenoj formuli, traži se suma sljedećih elemenata:

- ui= zbroj minimalnih vrijednosti elemenata iz svakog retka
- vj = zbroj minimalnih vrijednosti elemenata iz svakog stupca

Nakon toga za svako polje s nulom računa se kazna za nekorištenje predložene veze među gradovima na način da kazna na polju (i, j) bude jednaka zbroju minimalnog elementa u retku „i" te minimalnog elementa u stupcu „j", ne uključujući promatrano polje (i, j). Nakon što su izračunate sve kazne za nekorištenje predložene veze među gradovima, odabire se kazna koja ima najveću vrijednost u odnosu na druge. Polje s najvećom kaznom koristi se kao odrednica za prvu relaciju (i -> j) te se odabrani redak i stupac brišu iz matrice, a također se eliminira i mogućnost suprotne rute.

Nakon odabira prve relacije, nastaje nova reducirana matrica. Ukoliko u novoj matrici postoji stupac ili redak koji ne sadrži nulu, oduzima se prvotno najmanja vrijednost u svakom retku te zatim ukoliko i dalje ne postoji nula u nekom stupcu oduzima se minmalna vrijednost u tom stupcu. Taj postupak se izvršava nakon svake reducirane matrice kako bi uvijek postoja nula u svakom retku i stupcu prije izračuna kazni.

Na opisani način matrica postepeno postaje sve reduciranija. Nakon što su izračunate sve relacije, njihovim spajanjem dobiva se konačna ruta.

4.3. Clark-Wright-ov algoritam ušteda

Jadna od najpoznatijih heurističkih metoda, koja rješava problem usmjeravanja vozila, je Clarke-Wright-ova metoda. Rješavanje uloge usmjeravanja Clarke-Wright-ovom metodom provodi se postupnim koracima. Prvo, pronalazi se najmanje poželjno rješenje koje se zatim poboljšava svakim postepenim korakom. Zahvaljujući ovom rješenju, definirani uvjeti se mogu nadgledati i kontrolirati u sljedećim koracima. Svako mjesto isporuke ima određeni zahtjev za prijevoz određenih količina po transportnim elementima. Prijevoz se izvodi vozilima, a njihova ruta započinje i završava u čvoru V_0 i njihov kapacitet je ograničen. Cilj je sastaviti skupove ruta za vozila da ispune zahtjev da svaka isporučna točka bude zadovoljna samo jednom vožnjom vozila, a ukupni troškovi prijevoza moraju biti minimalni. Temeljem svega predstavljenog, mogu se izdvojiti dva osnovna uvjeta prihvatljivosti rješenja:

- svaki kupac mora biti opslužen samo jednom (unutar jedne rute),
- ne smije se prekoračiti kapacitet opsluživanja vozila.[21]

[21] Jeřábek K., Majercak P. i ostali. Application of Clark and Wright´s Savings Algorithm Model to Solve Routing Problem in Supply Logistics, NAŠE MORE, Vol. 63, No. 3, pp. 117-118, 2016.

Potrebno je izračunati najkraći put između gradova, tako da svaka lokacija bude posjećena samo jednom te da početna točka, odnosno čvor ujedno bude i završna točka. U prvom koraku potrebno je izračunati uštede S(i, j) pomoću sljedeće formule:

$$S(i,j) = d(B, i) + d(B,j) - d(i,j).$$

U drugom koraku potrebno je izvršiti rangiranje svih ušteda te ih poredati prema veličini, odnosno izraditi listu ušteda koja započinje najvećom uštedom. Iz tog razloga radi se tablica koja sadrži dva dijela. U lijevom dijelu svakog stupca nalaze se grane, odnosno relacije između čvorova, dok se u desnom dijelu nalaze vrijednosti istih.

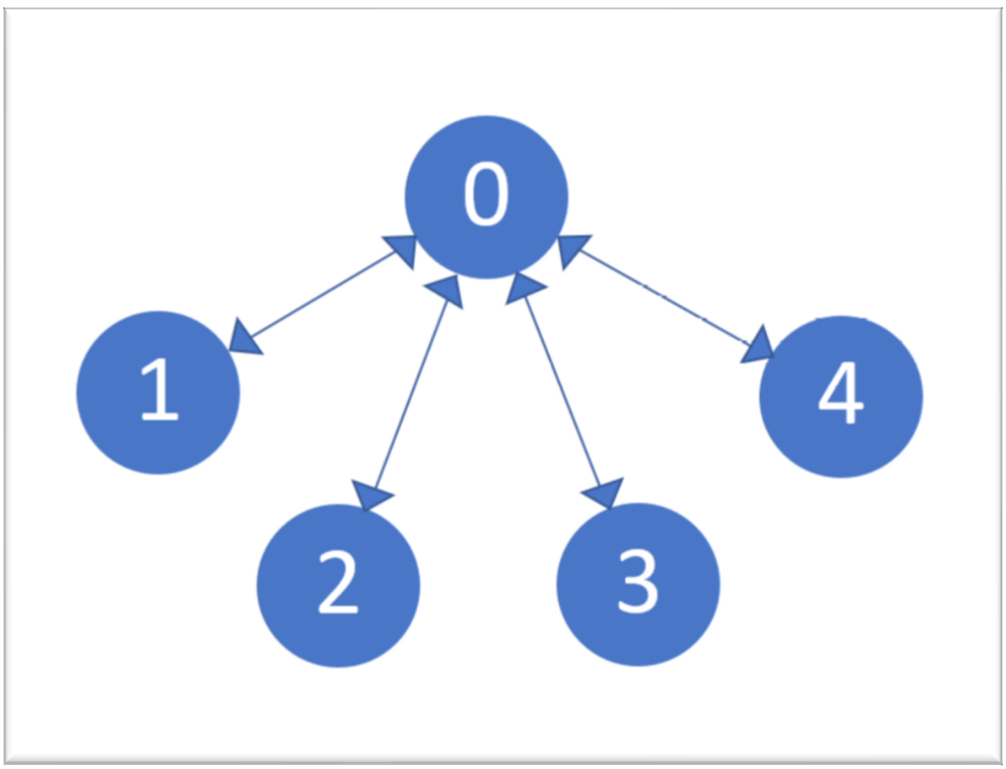
Nakon što su uštede izračunate i rangirane započinje sljedeći korak, odnosno projektiranje rute. Izrada rute obavlja se prema rangiranim uštedama, uz zadovoljavanje navedenih ograničenja:

- Prema rangiranju, čvorovi najveće uštede predstavljaju i početak rute;
- ukoliko čvor u sljedećoj ruti već postoji, a nije unutarnja točka, čvor povezan sa tim čvorom može se uvrstiti u rutu;
- ukoliko su čvorovi već uključeni u rutu te se uštede ne upotrebljavaju pri projektiranju rute, da bi povezivanje čvorova bilo moguće, jedan od čvorova u uštedi mora biti vanjski čvor u ruti;
- ukoliko je jedan čvor već uključen u djelomičnu rutu, ali je unutarnja točka, direktna poveznica nije moguća;
- na kraju se svi uključeni čvorovi mogu zanemariti jer su već povezani u rutu, stoga su ograničenja zadovoljena i direktna veza među čvorovima je moguća.

4.4. Clark-Wright-ov algoritam ušteda – metoda s indikatorom T

Algoriatm Clark-Wright u početku konstruira rute naprijed-natrag (0, i, 0) za *i* (i = 1, ..., n) te ih postupno spaja primjenjujući kriterij štednje. Točnije, spajanje dviju ruta (0,., i, 0) i (0, j,., 0) u jednu rutu (0,., i, j,.., 0) stvara uštedu $S_{ij} = C_{i0} + C_{0j} - C_{ij}$. Budući da su uštede ostale iste u algoritmu, one se mogu unaprijed izračunati. U takozvanoj paralelnoj verziji algoritma koja se čini najboljom, izvedivo spajanje ruta koje donosi najveće uštede provodi se pri svakoj iteraciji, sve dok više nije moguće izvesti spajanje. Ovaj jednostavan algoritam posjeduje prednosti intuitivnog, primjenjivog i brzog postupanja. Ovakva metoda može se koristiti za početno rješenje za sofisticiranije algoritme.[22]

Postupkom je potrebno odrediti najkraći put uz uvjet da se krene iz čvora 0, da se svaki čvor posjeti samo jednom te da završetak rute bude ponovno u čvoru 0. Za početak potrebno je izraditi polu-matricu udaljenosti. Dovoljno je izraditi polu-matricu, a ne cjelokupnu matricu, jer je graf simetričan, odnosno jednaka je udaljenost u oba smjera putovanja kao što je prikazano na slici 4.



Slika 4. Primjer distibucijske mreže Clark-Wright-og algoritma ušteda s indikatorom T

Izvor: Izradio autor.

[22] Toth P. i Vigo D. Vehicle Routing: Problems, Methods, and Applications, Second Edition, SIAM, Philadelphia, 2014, pp. 86-90.

U sljedećem koraku potrebno je izračunati uštede za svaki vanjski par lokacija te izraditi novu polu-matricu ušteda. Uštede se računaju prema sljedećoj formuli:

$$S_{ij} = C_{0i} + C_{0j} - C_{ij}.$$

Na jednak način računaju se i ostale vrijednosti ušteda. Nakon izračuna ušteda, u polu-matricu potrebno je unijeti vrijednosti T u odgovarajuće rubrike, odnosno u područja polazišta. Kalkulacije uštede za povezivanje svakog para temelji se na mogućnosti uštede uzimajući u obzir trošak kružne dostave vozila do svakog para. Indikator T pokazati će jesu li dvije lokacije npr. *i* te *j* ili 0 (početna točka) i *j* direktno povezane. Indikator T može imati jednu od tri vrijednosti:

- T = 2 – kada vozilo ide iz početne točke do jedne lokacije i vraća se do početne točke.T_{0j} = 2 i samo u prvom retku matrice, vrijednost indikatora T unosi se u matricu i zaokružuje kako bi se razlikovala od ukupne uštede, T= 2 označava kružnu, dvosmjernu dostavu, odnosno dostavu s povratkom;
- T = 1 – kada vozilo ide direktno do lokacije *i* te *j*, to se prikazuje kao T_{ij}= 1 i može se uvesti na bilo koje mjesto u matrici, T= 1 označava jednosmjernu dostavu;
- T = 0 – kada vozilo ide direktno do lokacije *i* te *j*, to se prikazuje kao T_{ij} = 0, T = 0 pokazuje da niti jedno putovanje nije učinjeno između parova lokacije.

Sljedeći korak je odrediti najveću vrijednost uštede u matrici Ako se maksimalna ušteda prikazuje u ćeliji i i j u matrici, tada se lokacije i i j mogu biti povezane ukoliko su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

- T_{0i} i T_{0j} > 0,
- lokacije *i* i *j* nisu već na istoj ruti.

Prvi uvjet govori da se ušteda može koristiti ukoliko su T_{0i} i T_{0j} veći od nule, a drugi uvjet označava da se barem jedan od čvorova ne nalazi u već postojećoj djelomičnoj ruti. S obzirom da su uvjeti zadovoljeni u nekoj ćeliji (i,j), označi se vrijednost T_{ij}= 1, što označuje jednosmjernu rutu između lokacija *i* te *j*. Ovom radnjom omogućena je jednosmjerna ruta između lokacija *i* te *j*, a onemogućena jednosmjerna ruta od lokacije *i* do početne točke (0) te jednosmjerna ruta od početne točke (0) do lokacije *j*. Stoga je potrebno smanjiti vrijednost T= 2 u ćelijama (0,i) i (0,j) na T= 1.

U sljedećem koraku potrebno je uvrstiti sljedeću najveću vrijednost uštede, a da su pritom zadovoljena ograničenja. Odabrana ćelija koja sadrži najveću vrijednost uštede ne može biti iskorištena u prethodnom izračunu, T_{0i} i T_{0j} moraju biti veći od nule te lokacije ne mogu biti na istoj ruti, tada se ove dvije lokacije mogu povezati. Ako je u nekoj od sljedećih ćelija najveća vrijednost uštede, a da u tom slučaju T_{0i} ili T_{0j} nisu veći od nule, takvo bi povezivanje narušilo poštivanje ograničenja, pa se gleda sljedeća najveća ušteda koja je veća od nule[23].

4.5. Metoda linearnog programiranja

Problemi optimiranja, na koje se mogu svesti mnogi logistički problemi, učinkovito se rješavaju linearnim programiranjem, to jest korištenjem modela linearnog programiranja. Ovaj pristup rješavanju problema uključuje sljedeće pretpostavke:

- traži se maksimum ili minimum funkcije cilja,
- varijable odlučivnja (argumenti funkcije cilja) moraju biti neovisne jedna o drugoj, a njihov utjecaj na vrijednost funkcije cilja mora biti zbrojiv,
- odnosi između vrijednosti funkcije cilja i varijabli odlučivanja, kao i odnosi ograničenja, mogu se izraziti linearnim jednadžbama ili nejednadžbama,
- ulazni podaci su konstante unutar promatranog područja, to jest razdoblja definirana s određenom točnošću (unutar prihvatljivih granica tolerancije).[24]

Matematički modeli linearnoga programiranja ili linearni modeli imaju gore navedene karakteristike, a sastoje se od sljedećih triju sastavnica:

[23] Ibid.
[24] Ratko Stanković, Jasmina Pašagić Škrinjar, *Logistika i transportni modeli*, 14.

- varijabla odlučivanja,
- funkcije cilja,
- ograničenja.[25]

[25] Ibid.

5. ODREĐIVANJE NAJKRAĆEG PUTA NA STVARNOM PRIMJERU

5.1. Ulazni podaci

Podaci koji se koriste u ovom radu su preuzeti na primjeru dostava iz logističkog poduzeća koje dostavno vozilo treba obići u jednome danu. Zatim je trebalo odrediti vremenske i prostorne udaljenosti između točaka na transportnoj mreži. Ruta je kretala iz Sesvetskog kraljevca te je trebalo vršiti dostavu u Konjšćini, Varaždinu, Nedelišću, Trnovcu, Petkovcu Topličkom te završiti u Bedenici. Podaci su dobiveni iz realnog sektora od stvarnog poduzeća koje se bavi distribucijom..

Podaci za prvu rutu su prikazani kao na tablici 1. Iz podataka je vidljivo da je vozilo krenulo na dostavu u 8:00 h te je na zadnje odredište stiglo u 15.00 h. Dostavno vozilo je vršilo dostavu na šest mjesta te je na toj ruti prošlo 192 kilometra, a trošak rute je prema dobivenim podacima iznosio 1433, 21 kunu. Cijena je dobivena po kilometru prevezenog tereta.

Tablica 1. Podaci za prvu rutu

	Prostor:	Početak:	Kraj:	Naziv:	Grad:	Težina:
1	Vozilo-fiksni kontejner	08:53	09:20	Dostavno mjesto 1	Konjščina	3194 kg
2	Vozilo-fiksni kontejner	10:15	10:53	Dostavno mjesto 2	Varaždin	2508 kg
3	Vozilo-fiksni kontejner	11:13	11:32	Dostavno mjesto 3	Nedelišće	890 kg
4	Vozilo-fiksni kontejner	11:48	12:12	Dostavno mjesto 4	Trnovec	1636 kg
5	Vozilo-fiksni kontejner	12:35	12:50	Dostavno mjesto 5	Petkovec Toplički	458 kg
6	Vozilo-fiksni kontejner	14:15	14:46	Dostavno mjesto 6	Bedenica	2844 kg

Izvor: Izradio autor

5.2. Stvarna ruta

5.2.1. Metoda najbližeg neposjećenog susjeda

S obzirom da se kod metode najbližeg susjeda odabire minimalna udaljenosti tako se za početak odabire minimalna vrijednost u prvom retku 0 koja iznosi 31,6 te predstavlja poveznicu između 0 i 6. Zatim se u retku 6 traži minimalna udaljenost, ne uključujući vrhove 0 radi pod-rute te 6 jer je taj vrh već odabran. Minimalna vrijednost u retku 6 iznosi 9,1 i povezuje čvor 6 sa čvorom 1. Ruta se nastavlja od čvora 1 prema čvoru 5 obzirom da minimalna udaljenost između ta dva čvora iznosi 32,2. Odabirom minimalne vrijednosti koja iznosi 17,8, nastaje nova grana u ruti, a povezuje čvorove 5 i 4. Udaljenost koja iznosi 6,9 povezuje čvor 4 s čvorom 2. Čvor 2 povezan je s čvorom 3 jer minimalna udaljenost u retku koju je moguće izabrati iznosi 10,1. Preostali čvorovi koje je potrebno povezati u rutu su 3 i 0, obzirom da čvor 0 treba doći kao posljednji, odnosno završni čvor, a udaljenost između 3 i 0 iznosi 82,2. Udaljenost između pretposljednjeg i posljednjeg čvora ne mora biti minimalna jer se povezivanje vrši prema redoslijedu, polazni čvor je uvijek i posljednji, završni čvor, stoga i posljednja vrijednost, tj. udaljenost ne mora nužno biti minimalna kao što metoda najbližeg susjeda to nalaže, primjerice u ovom primjeru je maksimalna (tablica 2.).

Tablica 2. Matrični prikaz udaljenosti metodom najbližeg neposjećenog susjeda

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	35,5	73,6	82,2	71,4	58,5	31,6
1	35,5	0	48,5	57,6	46,5	32,2	9,1
2	73,6	48,5	0	10,1	6,9	19,9	44,2
3	82,2	57,6	10,1	0	18,4	28,6	52,8
4	71,4	46,5	6,9	18,4	0	17,8	42,1
5	58,2	32,2	19,9	28,6	17,8	0	29,1
6	31,6	9,1	44,2	52,8	42,1	29,1	0

Izvor: Izradio autor

$0 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 0 = 189,9$

5.2.2. Metoda grananja i ograničavanja

Rješavanje problema trgovačkog putnika pomoću metode grananja i ograničavanja izvodi se na način kako je objašnjeno u poglavlju 4. Matrični prikaz međusobnih udaljenosti između lokacija osnova je za izračun metode grananja i ograničavanja je matrični prikaz međusobnih udaljenosti koji se nalazi u nastavku (tablica 3.).

Tablica 3. Matrični prikaz međusobnih udaljenosti između lokacija

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	35,5	73,6	82,2	71,4	58,5	31,6
1	35,5	0	48,5	57,6	46,5	32,2	9,1
2	73,6	48,5	0	10,1	6,9	19,9	44,2
3	82,2	57,6	10,1	0	18,4	28,6	52,8
4	71,4	46,5	6,9	18,4	0	17,8	42,1
5	58,2	32,2	19,9	28,6	17,8	0	29,1
6	31,6	9,1	44,2	52,8	42,1	29,1	0

Izvor: Izradio autor

Vrijednosti iz svakog retka oduzimaju se s minimalnim vrijednostima pojedinih redaka. U prvom retku kod čvora 0 minimalna udaljenost iznosi 31,6, stoga se ona oduzima od svih ostalih vrijednosti u tom retku, zatim u drugom retku, minimalna vrijednost kod čvora 1 iznosi 9,1, pa se ta vrijednost oduzima od ostalih vrijednosti u istom retku. Isti princip vrijedi za sve ostale retke (tablica 4.).

Tablica 4. Matrični prikaz minimalnih vrijednosti redaka metodom grananja i ograničavanja

	0	1	2	3	4	5	6	min
0	0	35,5	73,6	82,2	71,4	58,5	31,6	31,6
1	35,5	0	48,5	57,6	46,5	32,2	9,1	9,1
2	73,6	48,5	0	10,1	6,9	19,9	44,2	6,9
3	82,2	57,6	10,1	0	18,4	28,6	52,8	10,1
4	71,4	46,5	6,9	18,4	0	17,8	42,1	6,9
5	58,2	32,2	19,9	28,6	17,8	0	29,1	17,8
6	31,6	9,1	44,2	52,8	42,1	29,1	0	9,1

Izvor: Izradio autor

Nakon dobivanja prvih reduciranih vrijednosti matrice, oduzimaju se sve vrijednosti stupaca s minimalnim vrijednostima svakog pojedinog stupca. U stupcu 0 minimalna vrijednost iznosi 22,5, navedena vrijednost oduzima se od svih vrijednosti u prvom stupcu. U drugom stupcu, kod čvora 6 minimalna vrijednost je 0, oduzimanjem nule od svih vrijednosti, rezultat ostaje nepromijenjen. Treći stupac ima minimalnu vrijednost 0, također sve vrijednosti ostaju nepromijenjene. Istim principom rješavaju se preostali retci (tablica 5.).

Tablica 5. Matrični prikaz minimalnih vrijednosti stupaca metodom grananja i ograničavanja

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	3,9	42	50,6	39,8	26,9	0
1	26,4	0	39,4	48,5	37,4	23,1	0
2	66,7	41,6	0	3,2	0	13	37,3
3	72,1	47,5	0	0	8,3	18,5	42,7
4	64,5	39,6	0	11,5	0	10,9	35,2
5	40,4	14,4	2,1	10,8	0	0	11,3
6	22,5	0	35,1	43,7	33	20	0
min	22,5	0	0	3,2	0	10,9	0

Izvor: Izradio autor

Matrica s potpuno reduciranim vrijednostima, odnosno kada u svakom stupcu i retku postoji 0, izgleda kao prikazano na tablici 6.

Tablica 6. Matrični prikaz reduciranih vrijednosti metodom grananja i ograničavanja

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	3,9	42	47,4	39,8	16	0
1	3,9	0	39,4	45,3	37,4	12,2	0
2	44,2	41,6	0	0	0	2,1	37,3
3	49,6	47,5	0	0	8,3	7,6	42,7
4	42	39,6	0	8,3	0	0	35,2
5	17,9	14,4	2,1	7,6	0	0	11,3
6	0	0	35,1	40,5	33	9,1	0

Izvor: Izradio autor

Sljedeći korak je izračun kazni za nekorištenje predložene veze među gradovima, tako da se zbrajaju minimalne vrijednosti iz stupca i retka gdje se nula nalazi te odabir najveće vrijednosti kazne koja ujedno znači i prva relacija u ruti. Primjerice, prva nula prema redoslijedu je nula u retku 0 i stupcu 6, kod navedene nule zbraja se minimalna vrijednost u stupcu (0) i minimalna vrijednost u retku (6). Na tom primjeru to glasi: 3,9 + 0 = 3,9, pa se nuli se dopiše navedena vrijednost kazne. Zatim sljedeća nula po redu jest nula u retku 1 te stupcu 6, minimalna vrijednost u retku 1 iznosi 3,9, kada se zbroji sa 0 što je minimalna vrijednošt u stupcu 6, dobije se vrijednost kazne 3,9 koja se dopiše navedenoj nuli. Jednakim principom izračunavaju se preostale kazne za svaku nulu u reduciranoj matrici udaljenosti. Izračun svih kazni izgleda kao prikazano na tablici 7.

Tablica 7. Matrica vrijednosti kazni metodom grananja i ograničavanja

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	3,9	42	47,4	39,8	16	$0^{(3,9)}$
1	3,9	0	39,4	45,3	37,4	12,2	$0^{(3,9)}$
2	44,2	41,6	0	$0^{(7,6)}$	0	2,1	37,3
3	49,6	47,5	$0^{(7,6)}$	0	8,3	7,6	42,7
4	42	39,6	0	8,3	0	$0^{(2,1)}$	35,2
5	17,9	14,4	2,1	7,6	$0^{(2,1)}$	0	11,3
6	$0^{(3,9)}$	$0^{(3,9)}$	35,1	40,5	33	9,1	0

Izvor: Izradio autor

Najveća kazna se nalazi kod nule na sjecištu retka 2 i stupca 3. Uzima se ta kazna te se prekriže redak 2 te stupac 3, kao na tablici 8.

Tablica 8. Matrični prikaz odabira početne relacije metodom grananja i ograničavanja

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	3,9	42	47,4	39,8	16	$0^{(3,9)}$
1	3,9	0	39,4	45,3	37,4	12,2	$0^{(3,9)}$
2	44,2	41,6	0	$0^{(7,6)}$	0	2,1	37,3
3	49,6	47,5	$0^{(7,6)}$	0	8,3	7,6	42,7
4	42	39,6	0	8,3	0	0	35,2
5	17,9	14,4	2,1	7,6	$0^{(2,1)}$	0	11,3
6	$0^{(3,9)}$	$0^{(3,9)}$	35,1	40,5	33	9,1	0

Izvor: Izradio autor

Prva relacija u ruti je 2 → 3 te se ta dva čvora ukidaju u procesu daljnjeg izračuna rute, također potrebno je isključiti vrijednost u retku 3 i stupcu 2 da ne bi nastala pod-ruta (*subtour*) 0 → 2 →3 → 0. Obzirom da svi retci i svi stupci ne sadrže nulu, potrebno je ponovno oduzeti retke s minimalnim vrijednosti redaka te stupce s minimalnim elementima stupaca kao što je prije navedeno. Oduzima se vrijednost 7,6 u retku 3 te nakon toga svi stupci i retci imaju nule kao što je prikazano na tablici 9.

Tablica 9. Reducirana matrica metodom grananja i ograničavanja

	0	1	2	4	5	6
0	0	3,9	42	39,8	16	0
1	3,9	0	39,4	37,4	12,2	0
3	42	39,9	0	0,7	0	35,1
4	42	39,6	0	0	0	35,2
5	17,9	14,4	2,1	0	0	11,3
6	0	0	35,1	33	9,1	0

Izvor: Izradio autor

U sljedećoj matrici izračunate su kazne za nekorištenje predložene veze među gradovima i odabir nove relacije, a pošto četiri čvora imaju vrijednost kazne 3,9 koristi se metoda sjevero-zapadnog kuta te se odabare čvor 0 → 6, kao što je prikazano na tablici 10.

Tablica 10. Reducirana matrica vrijednosti kazni i odabira daljnje relacije metodom grananja i ograničavanja

	0	1	2	4	5	6
~~0~~	~~0~~	~~3,9~~	~~42~~	~~39,8~~	~~16~~	~~$0^{(3,9)}$~~
1	3,9	0	39,4	37,4	12,2	$0^{(3,9)}$
3	42	39,9	0	0,7	$0^{(0,7)}$	35,1
4	42	39,6	$0^{(2,1)}$	0	0	35,2
5	17,9	14,4	2,1	$0^{(2,8)}$	0	11,3
6	$0^{(3,9)}$	$0^{(3,9)}$	35,1	33	9,1	0

Izvor: Izradio autor

Po istom principu te na isti način koji je prikazan gore u primjeru nastavlja se reducirati matrica do kraja, se se dobivene relacije povezuju. Time je dobiveno rješenje, odnosno cjelokupna ruta koja glasi: 0 ↔ 6 ↔ 1 ↔ 5 ↔ 4 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 0 =187 km.

5.2.3 Clark-Wright-ov algoritam ušteda

U matrici (tablica 11.) su prikazane udaljenosti između svakog čvora. Udaljenoati iz matrice će se koristiti za izračun ušteda metodom Clark-Wrigt-og algoritma ušteda.

Tablica 11. Matrica udaljenost čvorova metodom Clark-Wright-og algoritma ušteda

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	35,5	73,6	82,2	71,4	58,5	31,6
1	35,5	0	48,5	57,6	46,5	32,2	9,1
2	73,6	48,5	0	10,1	6,9	19,9	44,2
3	82,2	57,6	10,1	0	18,4	28,6	52,8
4	71,4	46,5	6,9	18,4	0	17,8	42,1
5	58,2	32,2	19,9	28,6	17,8	0	29,1
6	31,6	9,1	44,2	52,8	42,1	29,1	0

Izvor: Izradio autor

U prvom koraku potrebno je iz matrice udaljenosti izračunati uštede za svaki par čvorova međusobno. Uštede se izračunavaju prema formuli, a rješenje svakog pojedinačnog izračuna prikazuje vrijednost uštede između dva odabrana vrha. U nastavku je prikazan postupak izračuna: Uštede se izračunavaju prema sljedećoj formuli:

$$S(i, j) = d(0,i) + d(0, j) - d(i, j)$$

S12 = d(0,1) + d(0,2) – d(1,2) = 35,5 + 73,6 – 48,5 = 60,6

S13=35,5+82,2-57,6=60,1

S14=35,5+71,4-46,5=60,4

S15=35,5+58,5-32,2=61,8

S16=35,5+31,6-9,1=58

S23=73,6+82,2-10,1=145,7

S24=73,6+71,4-6,9=138,1

S25=73,6+58,5-19,9=112,2

S26=73,6+31,6-44,2=61

S34=82,2+71,4-18,4=135,2

S35=82,2+58,5-28,6=112,1

S36=82,2+31,6-52,8=61

S45=71,4+58,2-17,8=112,1

S46=71,4+31,6-42,1=60,9

S56=58,5+31,6-29,1=61

U tablici 12. prikazane su vrijednosti ušteda za svaku granu između vrhova dobivenih pomoću formule i udaljenosti iz matrice udaljenosti.

Tablica 12. Vrijednosti ušteda za svaku granu metodom Clark-Wright-og algoritma ušteda

Grana (i,j)	Ušteda s(i,j)
(1,2)	60,6
(1,3)	60,1
(1,4)	60,4
(1,5)	61,8
(1,6)	58
(2,3)	145,7
(2,4)	138,1
(2,5)	112,2
(2,6)	61
(3,4)	135,2
(3,5)	112,1
(3,6)	61
(4,5)	112,1
(4,6)	60,9
(5,6)	61

Izvor: Izradio autor

Sljedeći korak je poredati te vrijednosti po veličini kako bi se olakšali daljni koraci, kako bi računanje bilo preglednije te kako bi se mogao nastaviti postupak izvršavanja Clark-Wright-ovog algoritma. Izgled vrijednosti po redosljedu dan je u sljedećoj tablici 13.

Tablica 13. Poredak vrijednosti ušteda za svaku granu metodom Clark-Wright-og algoritma ušteda

Grana (i,j)	Ušteda s(i,j)
(2,3)	145,7
(2,4)	138,1
(3,4)	135,2
(2,5)	112,2
(3,5)	112,1
(4,5)	112,1
(1,5)	61,8
(2,6)	61
(3,6)	61
(5,6)	61
(4,6)	60,9
(1,2)	60,6
(1,4)	60,4
(1,3)	60,1
(1,6)	58

Izvor: Izradio autor

U posljednjem koraku koriste se vrijednosti prema redosljedu ušteda i izračunava se ruta prema rangiranim uštedama uz zadovoljavanje operativnih ograničenja, odnosno uvjeta. U nastavku je prikazan postupak izračuna rute:

- (2,3) => 0 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 0,

- (2,4) => 0 ↔ 4 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 0,
- (3,4) => Povezivanje čvorova u ovom slučaju nije moguće, jer su oba čvora vanjski vrhovi te bi u slučaju povezivanja došlo do nastanka pod-rute, odnosno *subtour-a*,
- (2,5) => Navedenu granu nije moguće koristiti jer čvor 2 kao poveznica je unutarnji čvor u ruti,
- (3,5) => 0 ↔ 4 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 5 ↔ 0,
- (4,5) => Povezivanje čvorova u ovom slučaju nije moguće, jer su oba čvora vanjski vrhovi te bi u slučaju povezivanja došlo do nastanka pod-rute, odnosno *subtour-a*,
- (1,5) => 0 ↔ 4 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 5 ↔ 1↔ 0,
- (2,6) => Čvor 2 je unutarnji čvor u ruti, uvjet nije zadovoljen,
- (3,6) => Čvor 3 je unutarnji čvor u ruti, uvjet nije zadovoljen,
- (5,6) => Čvor 5 je unutarnji čvor u ruti, uvjet nije zadovoljen,
- (4,6) => 0 ↔ 6 ↔ 4 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 5 ↔ 1↔ 0 =187.

Povezivanjem u rutu posljednjeg čvora, algoritam završava te se ostale grane, odnosno uštede ne uzimaju u obzir. Konačna ruta glasi: 0 ↔ 6 ↔ 4 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 5 ↔ 1 ↔ 0.

5.2.4. Clark-Wright-ov algoritam ušteda – metoda s indikatorom T

Uštede se izračunavaju na jednak način kao i kod Clark-Wright-ovog algoritma ušteda, odnosno prema formuli. Udaljenosti su predstavljne u poli-matrici koja je prikazana u nastavku (tablica 14).

Tablica 14. Polu-matrica udaljenosti Clark-Wright-og algoritma ušteda s indikatorom T

	1	2	3	4	5	6
0	35,5	73,6	82,2	71,4	58,5	31,6
	1	48,5	57,6	46,5	32,2	9,1
		2	10,1	6,9	19,9	44,2
			3	18,4	28,6	52,5
				4	17,8	42,1
					5	29,1

Izvor: Izradio autor

Uštede se izračunavaju prema formuli (4):

$S(i, j) = d(0,i) + d(0, j) – d(i, j)$

S12 = d(0,1) + d(0,2) – d(1,2) = 35,5 + 73,6 – 48,5 = 60,6

S13=35,5+82,2-57,6=60,1

S14=35,5+71,4-46,5=60,4

S15=35,5+58,5-32,2=61,8

S16=35,5+31,6-9,1=58

S23=73,6+82,2-10,1=145,7

S24=73,6+71,4-6,9=138,1

S25=73,6+58,5-19,9=112,2

S26=73,6+31,6-44,2=61

S34=82,2+71,4-18,4=135,2

S35=82,2+58,5-28,6=112,1

S36=82,2+31,6-52,8=61

S45=71,4+58,2-17,8=112,1

S46=71,4+31,6-42,1=60,9

S56=58,5+31,6-29,1=61

Uštede prema čvorovima predstavljene su u polu-matrici koja je prikazana u nastavku (tablica 15.).

Tablica 15. Polu-matrica ušteda Clark-Wright-og algoritma ušteda s indikatorom T

	1	2	3	4	5	6
0	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
	1	60,6	60,1	60,4	61,8	58
		2	145,7	138,1	112,2	61
			3	135,2	112,1	61
				4	112,1	60,9
					5	61

Izvor: Izradio autor

Najveća ušteda je ušteda između čvorova 2 i 3 (tablica 16.), stoga se mogućnost korištenja navedenih čvorova smanjuje za jedan. Postavlja se ruta 0 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 0.

Tablica 16. Polu-matrica ušteda s označenom najvećom vrijednošću Clark-Wright-og algoritma ušteda s indikatorom T

	1	2	3	4	5	6
0	**2**	**1**	**1**	**2**	**2**	**2**
	1	60,6	60,1	60,4	61,8	58
		2	145,7	138,1	112,2	61
			3	135,2	112,1	61
				4	112,1	60,9
					5	61

Izvor: Izradio autor

Sljedeća najveća ušteda iznosi 138,1 km i uključuje čvorove 2 i 4. Na jednak način oduzimaju se mogućnosti korištenja čvorova. Obzirom na oduzimanje mogućnosti korištenja, čvor 3 iskorišten je maksimalno dva puta te sada ima funkciju unutarnjeg čvora u novo nastaloj ruti: 0 ↔ 4 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 0 (tablica 17.).

Tablica 17. Polu-matrica ušteda s označene dvije najveće vrijednosti Clark-Wright-og algoritma ušteda s indikatorom T

	1	2	3	4	5	6
0	**2**	**0**	**1**	**1**	**2**	**2**
	1	60,6	60,1	60,4	61,8	58
		2	145,7	138,1	112,2	61
			3	135,2	112,1	61
				4	112,1	60,9
					5	61

Izvor: Izradio autor

Sljedeća maksimalna ušteda iznosi 135,2 km, a uključuje čvorove 3 i 4, međutim navedenu uštedu nije moguće koristiti jer čvorovi su vanjske točke jedne rute te sljedeću nakon nje najveću uštedu 122,2 km, čvorova 2 i 5, nije moguće koristiti jer čvor *x*6 više nema mogućnost korištenja zbog lokacije unutarnjeg čvora u ruti. Najveća ušteda koju je moguće koristiti je ušteda koja uključuje čvorove 3 i 5, a iznosi 112,1 km. Povezivanjem čvorova 3 i 5 nastaje ruta 0 ↔ 4 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 5 ↔ 0 (tablica 18.).

Tablica 18. Polu-matrica ušteda s označene tri najveće vrijednosti Clark-Wright-og algoritma ušteda s indikatorom T

	1	2	3	4	5	6
0	**2**	**0**	**0**	**1**	**1**	**2**
	1	60,6	60,1	60,4	61,8	58
		2	145,7	138,1	112,2	61
			3	135,2	112,1	61
				4	112,1	60,9
					5	61

Izvor: Izradio autor

Ušteda čvorova 1 i 5 iznosi 61,8 km, odnosno sljedeća najveća ušteda koju je moguće koristiti. Čvor 5 nadovezuje se na čvor 1 i taj postupak čini čvor 5 uz čvorove 3, 2 unutarnjim čvorovima, odnosno nije ih moguće koristiti pri daljnjim izračunima. Nova ruta glasi: 0 ↔ 4 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 5 ↔ 1 ↔ 0 (tablica 19.).

Tablica 19. Polu-matrica ušteda s označene četiri najveće vrijednosti Clark-Wright-og algoritma ušteda s indikatorom T

	1	2	3	4	5	6
0	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**2**
	1	60,6	60,1	60,4	61,8	58
		2	145,7	138,1	112,2	61
			3	135,2	112,1	61
				4	112,1	60,9
					5	61

Izvor: Izradio autor

Posljednji čvor koji je potrebno povezati s rutom je čvor 6. Čvor je moguće povezati s čvorom 1 ili s čvorom 4 ovisno o veličini uštede, stoga se sve ostale vrijednosti zanemaruju. Obzirom da je vrijednost uštede 4 i 6 veća od vrijednosti uštede 1 i 6, jedine dvije moguće kombinacije, čvor 6 povezuje se s čvorom 4, a ušteda iznosi 60,9 km. Posljednjim korakom, kompletirana je ruta koja glasi: 0 ↔ 6 ↔ 4 ↔ 2 ↔ 3 ↔ 5 ↔ 1 ↔ 0 (tablica 20.).

Tablica 20. Polu-matrica ušteda s označenih pet najvećih vrijednosti Clark-Wright-og algoritma ušteda s indikatorom T

	1	2	3	4	5	6
0	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
	1	60,6	60,1	60,4	61,8	58
		2	145,7	138,1	112,2	61
			3	135,2	112,1	61
				4	112,1	60,9
					5	61

Izvor: Izradio autor

Posljednji čvor koji je potrebno povezati s rutom je čvor $x7$. Čvor je moguće povezati s čvorom $x5$ ili s čvorom $x1$ ovisno o veličini uštede, stoga se sve ostale vrijednosti zanemaruju. Obzirom da je vrijednost uštede $x5$ i $x7$ veća od vrijednosti uštede $x1$ i $x7$, jedine dvije moguće kombinacije, čvor $x7$ povezuje se s čvorom $x5$, a ušteda iznosi 121 km. Posljednjim korakom, kompletirana je ruta koja glasi: 0 ↔ 7 ↔ 5 ↔ 4 ↔ 3 ↔ 6 ↔ 2 ↔ 1 ↔ 0.

5.2.5. Metoda linearnog programiranja

Prvi korak je u Excelu napraviti tablicu koja prikazuje sva mjesta po kojima se vozilo kreće te im dodijeliti redne brojeve, kao što to je prikazano na tablici 21.

Tablica 21. Brojevi čvorova metodom linearnog programiranja

Čvorovi	
Ime	Broj
Sesv. Kraljevec	1
Konjšćina	2
Varaždin	3
Nedelišće	4
Trnovec	5
Petkovec Topl.	6
Bedenica	7

Izvor: Izradio autor

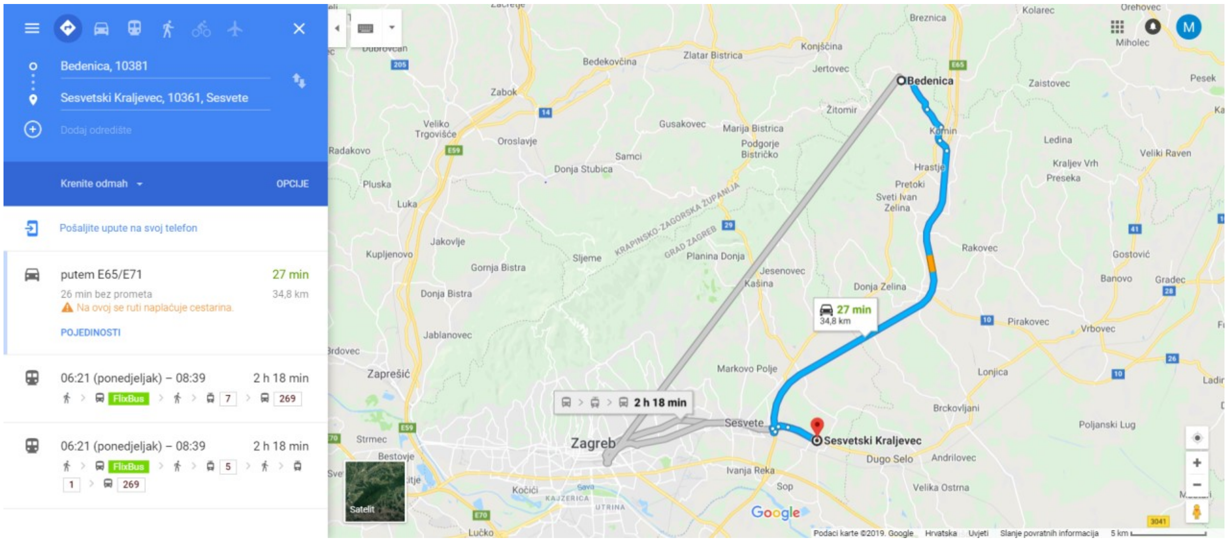
Nakon toga se traži udaljenost između mjesta, odnosno traži se udaljenost lukova. To je učinjeno na način da se prvo provjerava udaljenost od broja jedan, odnosno izvorište, a to je Sesvetski Kraljevec. Najkraća udaljenost je bila s brojem sedam, odnosno Bedenica te je iznosila 31, 6 kilometara. Nakon toga se traži najkraća udaljenost iz broja sedam, a najmanja udaljenost bila je s brojem dva, odnosno sa Konjšćinom, te je iznosila 9,1 kilometar. Najkraća udaljenost iz broja dva bila je s brojem šest, to jest sa Petkovcem, a iznosila je 32,2 kilometara. Iz Petkovca je najmanje udaljen broj pet, odnosno Trnovec te je udaljenost iznosila 17, 8. Najmanja udaljenost iz broja pet je bio broj tri te je udaljenost iznosila 6,9 kilometara. Na kraju se broj tri, odnosno Varaždin poveže s brojem četiri, odnosno s Nedelišćem, a udaljenost iznosi 10,1 kilometar. Kako podaci izgledaju u tablici prikazano je na tablici 22.

Tablica 22. Udaljenost lukova metodom linearnog programiranja

Čvorovi		Lukovi		
Ime	Broj	Od	Do	Km
Sesv. Kraljevec	1	1	2	35,5
Konjšćina	2	1	3	73,6
Varaždin	3	1	4	82,2
Nedelišće	4	1	5	71,4
Trnovec	5	1	6	58,5
Petkovec Topl.	6	1	7	31,6
Bedenica	7	7	2	9,1
Sesv. Kraljevec	1	7	3	44,2
		7	4	52,8
		7	5	42,1
		7	6	29,1
		2	3	48,5
		2	4	57,6
		2	5	46,5
		2	6	32,2
		6	3	19,9
		6	4	28,6
		6	5	17,8
		5	3	6,9
		5	4	18,4
		3	4	10,1

Izvor: Izradio autor

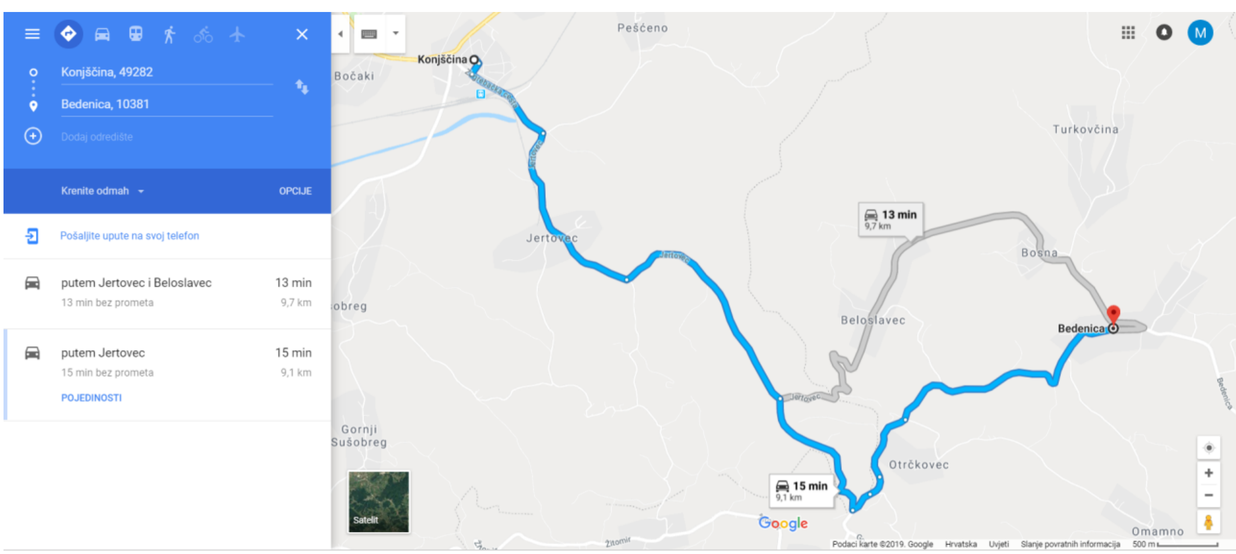
Za prvi dio rute dostavno vozilo je prevezlo 2.844 kilograma iz izvorišnog čvora odnosno Sesvetskog Kraljevca do Bedenice te je prošlo 34,8 kilometara. Ruta je prikazana na slici 5 te vožnja traje 27 minuta.



Slika 5. Relacija 1-7

Izvor: Izradio autor

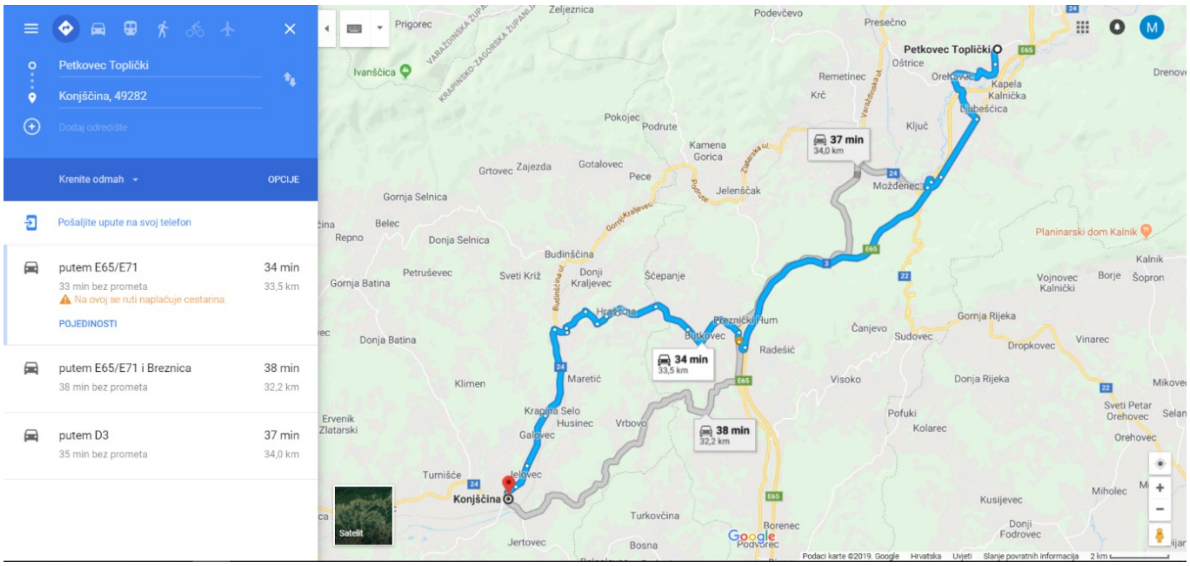
Za drugi dio rute vozilo je između broja sedam i broja dva, odnosno između Bedenice i Konjšćine prošlo 9,1 kilometar te je na toj relaciji prevezlo 3.194 kilograma. Ruta je prikazana na slici 6. te vožnja traje 15 minuta.



Slika 6. Relacija 7-2

Izvor: Izradio autor

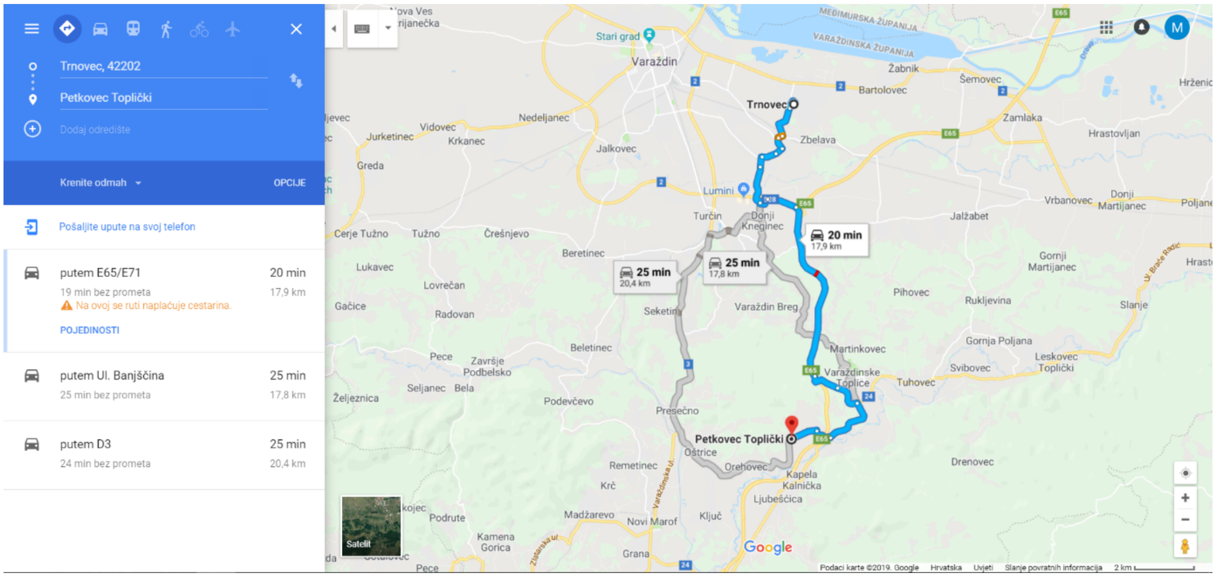
Na relaciji između brojeva dva i šest, odnosno između Konjščine i Petkovca Topličkog vozilo je prošlo 32,2 kilometara te je prevezlo 458 kilograma. Ruta je prikazana na slici 7. te vožnja traje 38 minuta.



Slika 7. Relacija 2-6

Izvor: Izradio autor

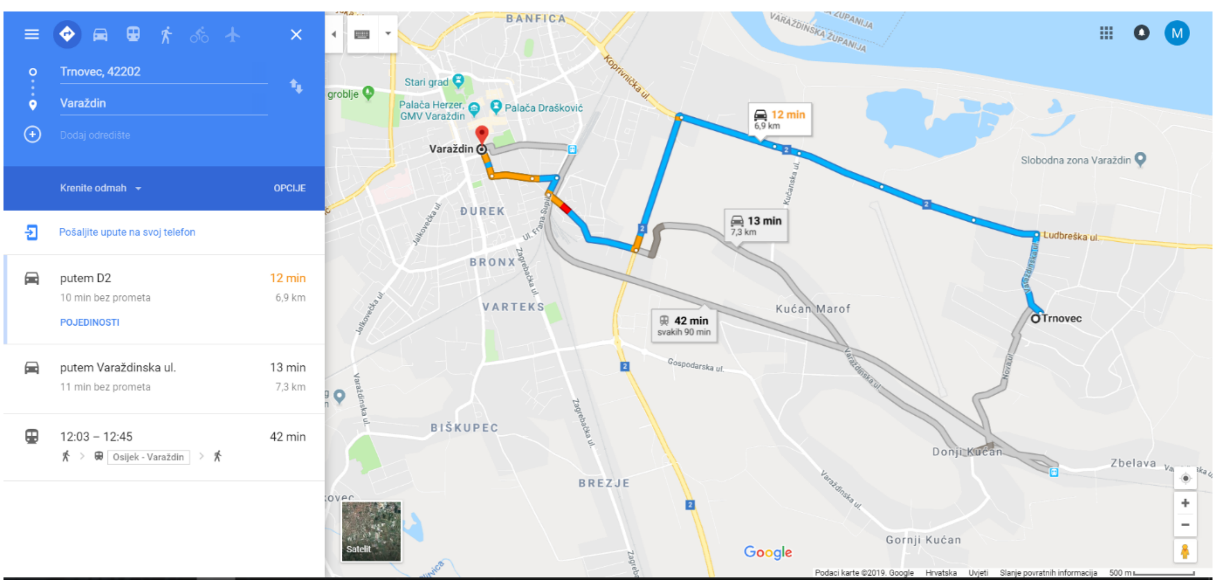
Na relaciji između brojeva šest i pet, odnosno između Petkovca Topličkog i Trnovca vozilo je prošlo 17,8 kilometara te je prevezlo 1.636 kilograma. Ruta je prikazana na slici 8. te vožnja traje 25 minuta.



Slika 8. Relacija 6-5

Izvor: Izradio autor

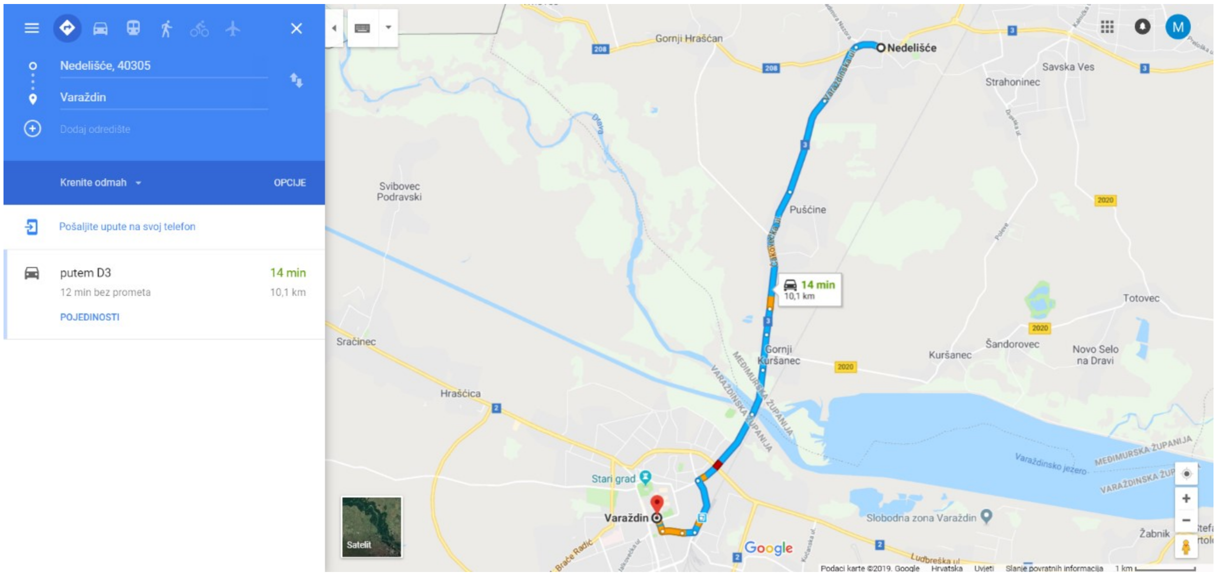
Na relaciji između brojeva pet i tri, odnosno između Trnovca i Varaždina vozilo je prošlo 6,9 kilometara te je prevezlo 2.508 kilograma. Ruta je prikazana na slici 9. te vožnja traje 12 minuta.



Slika 9. Relacija 5-3

Izvor: Izradio autor

Na relaciji između brojeva tri i četiri, odnosno između Varaždina i Nedelišća vozilo je prošlo 10,1 kilometara te je prevezlo 890 kilograma. Ruta je prikazana na slici 10. te vožnja traje 14 minuta.



Slika 10. Relacija 3-4

Izvor: Izradio autor

Problem određivanja najkraćeg puta u transportnoj mreži najkraće se može opisati kako slijedi:

- Transportna mreža obuhvaća n čvorova, od kojih je čvor 1 polazište, a čvor n odredište;
- Susjedni čvorovi i, j povezani su lukovima nenegativnih duljina d_{ij};
- Treba odrediti najkraći put koji povezuje polazište i odredište.

Optimalno rješenje dobilo se primjenom linearnog programiranja na način da se za funkciju cilja koristila sljedeća funkcija: $\min F = \sum d_{ij} \cdot x_{ij}\ ; \quad d_{ij} \geq 0\ ; \quad x_{ij} \in \{0,1\}$

Ograničenja su navedena u nastavku:

- polazište: nIL-nUL=1
- tranzitni čvor: nIL-nUL=0
- odredište: nIL-nUL= -1

Kod svega navedenog d_{ij} je duljina luka koji povezuje susjedne čvorove i,j, x_{ij} je varijabla odlučivanja, ona treba biti binarna te je 0 ukoliko luk nije dio puta odnosno ako put nije korišten te 1 ako je put dio puta odnosno korišten je. nIL je broj izlaznih lukova odnosno izlaznih lukova koji su dio najkraćeg puta, a nUL je broj korištenih ulaznih lukova odnosno ulaznih lukova koji su dio najkraćeg puta.

Za rutu broj jedan nakon određivanja kilometara kreće se sa Solverom. Za rješenje se koristi formula sumproducta te se prvo označuju kilometri, a zatim Da/Ne stupac koji je u tom trenutku prazan. To je točnije prikazano je na tablici 23.

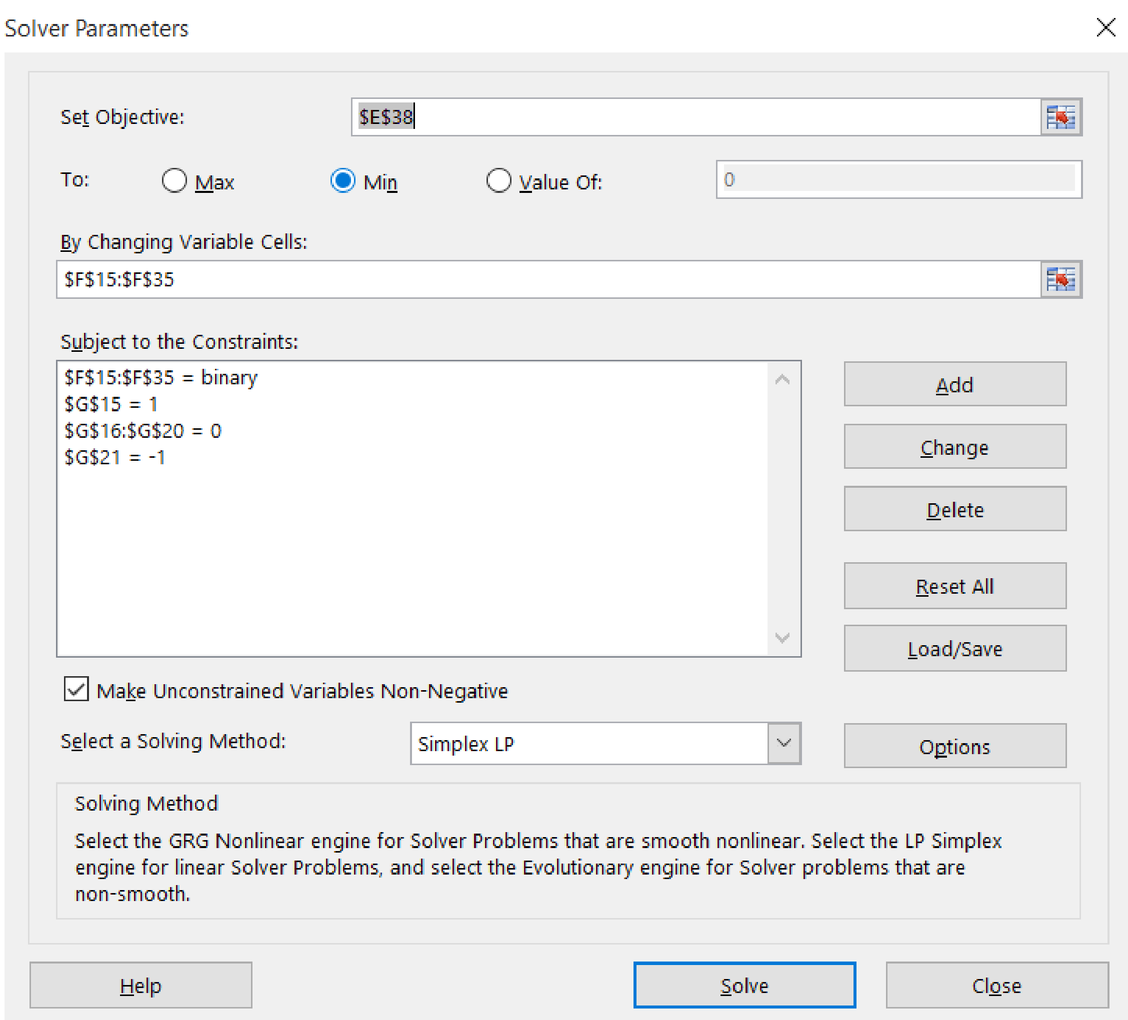
Tablica 23. Sumproduct metodom linearnog programiranja

SUM =SUMPRODUCT(E15:E35;F15:F35)

	A	B	C	D	E	F	G	H
11								
12								
13	Čvorovi		Lukovi				Ograničenja	
14	Ime	Broj	Od	Do	Km	0=Ne, 1= Da	nIL - nUL =	
15	Sesv. Kraljevec	1	1	2	35,5	1	1	
16	Konjšćina	2	1	3	73,6	0	0	
17	Varaždin	3	1	4	82,2	0	0	
18	Nedelišće	4	1	5	71,4	0	0	
19	Trnovec	5	1	6	58,5	0	0	
20	Petkovec Topl.	6	1	7	34,8	0	0	
21	Bedenica	7	7	2	9,1	0	-1	
22	Sesv. Kraljevec	1	7	3	44,2	0		
23			7	4	52,8	0		
24			7	5	42,1	0		
25			7	6	29,1	1		
26			2	3	48,5	1		
27			2	4	57,6	0		
28			2	5	46,5	0		
29			2	6	32,2	0		
30			6	3	19,9	0		
31			6	4	28,6	0		
32			6	5	17,8	1		
33			5	3	6,9	0		
34			5	4	18,4	1		
35			3	4	10,1	1		
36								
37								
38				Km=	=SUMPRODUCT(E15:E35;F15:F35)			
39					SUMPRODUCT(array1; [array2]; [array3]; [array4]; ...)			
40								

Izvor: Izradio autor

Nakon određivanja sumproducta upisuju se formule za svaki čvor prije nego se kreće u Solver odrediti funkciju cilja i ograničenja. Za funkciju cilja određuje se ćelija sa sumproductom, za ciljeve se uzima da ulazni čvor bude jednak jedan, odnosno da ćelija G15 bude jednaka jedan, zatim se postavlja da završni čvor mora biti jednak -1, odnosno da ćelija G21 mora biti jednaka -1. Također tranzitni čvorovi moraju biti jednaki nuli, odnosno ćelije od G16 do G20 moraju biti jednake nuli, a ćelije od F15 do F35 moraju biti binarne. Za varijabilne ćelije bira se prazni stupac, odnosno Da/Ne stupac, to jest od ćelije F15 do ćelije F35. Uz to se također odabire minimum te metoda Simplex LP. U Solveru to izgleda kao na slici 11, a konačni izgled tablice s rješenjem je izgleda kao na tablici 24.



Slika 11. Solver metodom linearnog programiranja

Izvor: Izradio autor

Tablica 24. Konačni izgled tablice i rješenje metodom linearnog programiranja

Čvorovi		Lukovi				Ograničenja
Ime	Broj	Od	Do	Km	0=Ne, 1= Da	nIL - nUL =
Sesv. Kraljevec	1	1	2	35,5	1	1
Konjšćina	2	1	3	73,6	0	0
Varaždin	3	1	4	82,2	0	0
Nedelišće	4	1	5	71,4	0	0
Trnovec	5	1	6	58,5	0	0
Petkovec Topl.	6	1	7	34,8	0	0
Bedenica	7	7	2	9,1	0	-1
Sesv. Kraljevec	1	7	3	44,2	0	
		7	4	52,8	0	
		7	5	42,1	0	
		7	6	29,1	1	
		2	3	48,5	1	
		2	4	57,6	0	
		2	5	46,5	0	
		2	6	32,2	0	
		6	3	19,9	0	
		6	4	28,6	0	
		6	5	17,8	1	
		5	3	6,9	0	
		5	4	18,4	1	
		3	4	10,1	1	
			Km=	**159,4**		

Izvor: Izradio autor

Kao što je vidljivo broj kilometara je smanjen sa 192 na 159,4. S obzirom na to da je za put od 192 kilometara trošak bio 1.433,31 kunu, tada je trošak za 159,4 kilometara 1.189, 86 kuna. Vidljivo je da je ušteda 243,35 kune.

6. KOMPARACIJA ZADANIH METODA

U prošlom poglavlju prvo se koristila metoda najbližeg neposlјećenog susjeda. Ta metoda je najjednostavnija. Odabire se proizvoljno najmanja udaljenost i zatim se križa taj stupac. Taj postupak se ponavlja do kraja. Dobivena ruta je izgledala:

$0 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 0$

Iako je najjednostavnija, dobiven je najlošiji rezultat. Ruta je ovom metodom bila optimizirana i postignut je pozitivan rezultat, ali samo za 2.1 kilometar. Početna ruta je obavljena za 192 kilometra, a korištenjem ove metode kilometri su smanjeni na 189,9. Takvo smanjenje udaljenosti daleko je od ispativog rezultata.

Kod sljedeće tri metode, odnosno kod metode grananja i ograničavanja, Clark-Wright-ovog algoritma uštede te Clark-Wright-ovog algoritma uštede s indikatorom T, dobiveni su isti rezultati. Dobiveni rezultat iznosi 187 kilometara. Taj rezultat je pozitivniji nego kod metode najbližeg neposjećenog susjeda. Postigla se ušteda od 5 kilometara. Iako je postignut bolji rezultat ove tri metode su kompliciranije od prve. Kod Clark-Wrigtov-ih metoda postoji znatna količina računanja pomoću formula te one oduzmu podosta vremena. Nakon izračuna ušteda i postavljanja u redoslјed metoda postaje puno preglednija. Kod metode s indikatorom T iako postoji isto opsežno računanje preko formule, koristi se polu-matrica pa je samim time metoda u početku preglednija. Kod te metode, konstatno se moraju raditi nove polu-matrice pa također iziskuje dosta vremena.

Najkopliciranija metoda, odnosno metoda koja iziskuje najviše vremena je metoda grananja i ograničavanja. Ona započinje sa matricom udaljenosti u kojoj se moraju od redaka i stupaca oduzeti minimalne vrijednost kako bi u svakom retku i stupcu bila nula. Polja koja sadrže nulu su kandidati za uspostavljanje direktne veze među gradovima, a svakoj nuli se moraju odrediti kazne koje su zbroj minimalne vrijednosti u istom stupcu i u istom retku, ne računajući promatrano polje. Nakon odabire kazne miču se redak i stupac te se provjerava da li u svakom retku i stupcu ima nula. Ukoliko nema opet se oduzima minimalna vrijednost. Da bi ova metoda bila preglednija za svaki korak u ovoj metodi se treba raditi nova matrica te to iziskuje dosta vremena i iz toga razloga za ovu metodu je potrebno najviše vremena.

Posljednja metoda koja je korištena u ovom radu je metoda linearnog programiranja. Ova metoda je dala najbolji rezultat. Broj kilometara je smanjen sa 192 na 159,4. S obzirom na to da je za put od 192 kilometara trošak bio 1.433,31 kunu, tada je trošak za 159,4 kilometara 1.189, 86 kuna. Vidljivo je da je ušteda 243,35 kune. Cijena je dobivena po kilometru prevezenog tereta. Pošto su kilogrami ostali jednaki, gleda se samo prevezi put, odnosno ušteda pri prevezenim kilometrima. Postupak kod ove metode je trajao kraće od prijašnjih, a dao je najbolje rezultate.

7. ZAKLJUČAK

Zbog sve većih zahtjeva suvremenog tržišta poduzeća i tvrtke na razne načine smanjuju troškove kako bi bili što konkurentniji na tržištu. Cilj svake tvrtke je ostvarivanje zarade i zadovoljstvo korisnika, a to se može postići samo ukoliko se prate distribucijska načela. Odnosno, u pravo vrijeme, na pravom mjestu u optimalnim količinama, u odgovarajućem asortimanu i uz najniže troškove.

Prometna mreža je sustav međusobno povezanih prometnih čvorišta, cesta, koridora, ruta, linija, prometnih lanaca koji omogućava brze, sigurne i racionalne procese proizvodnje transportnih proizvoda. Temeljna funkcija mreže je osigurati optimalno kretanje ljudi, roba i informacija od izvora do odredišta. Unutar toga, primarni zadatak transportne logistike, odnosno distribucijske logistike, je, zajedno s ostalim sudionicima logističkog procesa, krajnjem potrošaču omogućiti da „pravi proizvod dobije na pravome mjestu u pravo vrijeme“.

U ovom radu istražilo se kako projektiranje ruta transportnih sredstava koje se koriste za transportnoj mreži, pomoću raznih matematičkih metoda, može dovesti do željene uštede. Neke od osnovnih metoda koje se koriste korištene su ovom radu: Clark-Wright-ov algoritam ušteda, Clark-Wright-ov algoritam ušteda-metoda s indikatorom T, te metoda grananja i ograničavanja, i metoda najbližeg susjeda. Korištene su za usporedbu dobivenih rezultata.

Optimiranjem kao postupkom utvrđivanja najpovoljnijeg rješenja određenog problema s danim ograničenjima i usvojenim kriterijima nastojalo se pronaći optimalno rješenje. Kod sljedeće tri metode, odnosno kod metode grananja i ograničavanja, Clark-Wright-ovog algoritma uštede te Clark-Wright-ovog algoritma uštede s indikatorom T, dobiveni je isti rezultat koji iznosi 187 kilometara. Iako je taj rezultat pozitivniji nego kod metode najbližeg neposjećenog susjeda, ove tri metode su kompliciranije od prve i iziskuju veći utrošak vremena za kalkulacije. Posljednja metoda koja je korištena u ovom radu je metoda linearnog programiranja. Ova metoda je dala najbolji rezultat. Broj kilometara je smanjen sa 192 na 159,4. Postupak kod ove metode je trajao kraće od prijašnjih, a dao je najbolje rezultate, pa je ona i najpreporučljivija.

POPIS LITERATURE

KNJIGE

1. Toth P. i Vigo D. Vehicle Routing: Problems, Methods, and Applications, Second Edition, SIAM, Philadelphia, 2014.

ZNANSTVENI I STRUČNI ČLANCI

1. Buntak K., Grgurević D. i Drožđek I. Međusobni odnos logističkih i transportnih sustava, Tehnički glasnik, Vol. 6, No. 2, pp. 228-232, 2012.
2. Jeřábek K., Majercak P. i ostali. Application of Clark and Wright´s Savings Algorithm Model to Solve Routing Problem in Supply Logistics, NAŠE MORE, Vol. 63, No. 3, pp. 115-119, 2016.
3. Krpan Lj., Furjan M. i Maršanić R. Potencijali logistike povrata u maloprodaji, Tehnički glasnik, Vol. 8, No. 2, pp. 182-191, 2014.
4. Kolaković M. Novi poslovni modeli u virtualnoj ekonomiji i njihov utjecaj na promjene u transportnoj logistici i upravljanju lancem opskrbe, Zbornik Ekonomskog fakulteta u Zagrebu, Vol. 3, No. 1, pp. 198-210, 2005.
5. Poletan Jugović T. Prilog definiranju kvalitete transportno-logističke usluge na prometnom pravcu, Pomorstvo, Vol. 21, No. 2, pp. 95-108, 2007.
6. Poletan Jugović T. Struktura preferencije kriterija pri izboru optimalnog prometnog pravca, Pomorstvo, Vol. 20, No. 2, pp. 47-64, 2006.

OSTALI IZVORI

1. Carić T. Nastavni tekst iz kolegija Optimizacija prometnih procesa, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 2014.

2. Stanković R. i Pašagić Škrinjar J. Autorizirana predavanja iz kolegija Logistika i transportni modeli, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 2015.
3. Šimunović Lj. Nastavni materijali iz kolegija Osnove prometnoga inženjerstva, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 2015.

INTERNETSKE STRANICE

1. Dixon P. M. Nearest Neighbor Methods, Statistics Preprints 51, Iowa State University Digital Repository, 2001. URL: http://lib.dr.iastate.edu/stat_las_preprints/51 (pristupljeno: kolovoz, 2019).
2. Rihtarić M. i Šafran M. Transportna logistika, Hrvatska tehnička enciklopedija, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2017. URL: http://tehnika.lzmk.hr/transportna-logistika (pristupljeno, kolovoz, 2019).

POPIS SLIKA

POPIS TABLICA