

Analiza utjecaja distribucija intenziteta dolazaka i veličine paketa na mjere performansi sustava

Stjepanović, Karla

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Transport and Traffic Sciences / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:119:950927>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-20**



Repository / Repozitorij:

[Faculty of Transport and Traffic Sciences -
Institutional Repository](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET PROMETNIH ZNANOSTI

Karla Stjepanović

**ANALIZA UTJECAJA DISTRIBUCIJA INTENZITETA DOLAZAKA I
VELIČINE PAKETA NA MJERE PERFORMANSI SUSTAVA**

DIPLOMSKI RAD

Zagreb, 2019.

Zagreb, 1. travnja 2019.

Zavod: **Zavod za informacijsko komunikacijski promet**
Predmet: **Podvorbeni sustavi**

DIPLOMSKI ZADATAK br. 5159

Pristupnik: **Karla Stjepanović (0135233542)**
Studij: **Promet**
Smjer: **Informacijsko-komunikacijski promet**

Zadatak: **Analiza utjecaja distribucija intenziteta dolazaka i veličine paketa na mjere performansi sustava**

Opis zadatka:

Prikazati značajke Poissonovskih i Ne-poissonovskih prometnih modela. Analizirati ponašanje podvorenog sustava, komutacijskog čvorišta Internet mreže, u ovisnosti o značajkama procesa dolazaka i procesa posluživanja:

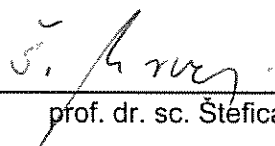
- Za zadane razdiobe međudolaznih vremena između paketa i razdiobe vremena posluživanja, koje će biti generirane pomoću dostupnog programskog alata, odrediti vrijednosti mjera performansi određenog sustava.

- Za zadane razdiobe međudolaznih vremena između paketa i razdiobe vremena posluživanja, koje će biti generirane pomoću dostupnog programskog alata, odrediti vrijednosti mjera performansi određenog sustava korištenjem razvijenih modela.

Odrediti veličinu pogreške pri određivanju performansi sustava posluživanja uporabom Poissonovskih podvorbenih modela ako se zanemare stvarne značajke procesa dolazaka i procesa posluživanja te analizirati utjecaj pogreške.

Mentor:

Predsjednik povjerenstva za
diplomski ispit:



prof. dr. sc. Štefica Mrvelj

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet prometnih znanosti

DIPLOMSKI RAD

**ANALIZA UTJECAJA DISTRIBUCIJA INTENZITETA DOLAZAKA I
VELIČINE PAKETA NA MJERE PERFORMANSI SUSTAVA**

**INFLUENCE ANALYSIS OF ARRIVAL RATE AND PACKET SIZE
DISTRIBUTIONS ON SYSTEM PERFORMANCE MEASURES**

Mentorica: prof. dr. sc. Štefica Mrvelj

Studentica: Karla Stjepanović

JMBAG: 0135233542

Zagreb, rujan 2019.

Zahvala

Zahvaljujem se svojoj mentorici prof. dr. sc. Štefici Mrvelj i doc. dr. sc. Marku Matulinu na stručnom usmjerenju prilikom izrade ovog diplomskog rada. Zahvaljujem se i svim profesorima na pruženom znanju tokom trajanja studija te mojoj obitelji i prijateljima na potpori u studiranju.

SAŽETAK

Ovaj rad analizira ponašanje podvorenog sustava, komutacijskog čvorišta mreže, u ovisnosti o značajkama procesa dolazaka i procesa posluživanja. U tu svrhu korišteni su Poissonovski i ne-Poissonovski podvorbeni modeli. Za zadane razdiobe međudolaznih vremena između paketa i razdiobe vremena posluživanja (koje su generirane pomoću dostupnog programskog alata) određeno je ponašanje podvorbenog sustava. Njegove mjere performansi određene su empirijski i korištenjem razvijenih modela. Prikazana je veličina pogreške pri određivanju performansi sustava posluživanja uporabom Poissonovskih podvorbenih modela ako se zanemare stvarne značajke procesa dolazaka i procesa posluživanja.

KLJUČNE RIJEČI: poissonovski podvorbeni sustavi; ne-poissonovski PS; kašnjenje u mreži; red čekanja; kvaliteta usluge

ABSTRACT

This paper analyzes the behavior of a Queueing system, of a switching node in a network, depending on the features of the arrival and serving processes. For this purpose Poisson and non-Poisson queueing models are used. For the simulated inter-arrival time distributions between packages and the service-time distributions (generated using the available software tool) the behavior of queueing system is determined. Its performance measures were determined empirically and using developed models. Error in determining the performance of a serving system using Poisson queueing models is shown if the actual features of the arrival and serving processes are neglected.

KEYWORDS: Poisson queues; Non-poisson queues; network delay; queue; Quality of Service (QoS)

SADRŽAJ

1. UVOD.....	1
2. Značajke prometnih modela za opisivanje toka u komunikacijskim mrežama	2
2.1. Analiza zahtjeva za kvalitetom usluge u višeuslužnim mrežama	2
2.2. Primjena podvorbenih sustava	4
2.3. Matematički opis podvorbenog sustava	7
2.3.1. Ulazni proces	7
2.3.2. Proces posluživanja	7
2.3.3. Prometna mjerila.....	8
2.4. Opis razdiobi ulaznog i izlaznog toka.....	12
2.4.1. Poissonova razdioba.....	13
2.4.2. Eksponencijalna razdioba	13
2.4.3. Normalna ili Gaussova razdioba.....	14
2.4.4. Pareto razdioba	15
3. Poissonovski prometni modeli.....	16
3.1. Slučajni procesi	16
3.2. M/M/1	19
3.3. Izračun mjerila izvedbe.....	21
4. Ne-poissonovski prometni modeli	22
4.1. M/G/1	22
4.2. G/M/1	23
4.3. G/G/1.....	24
5. Određivanje mjera dobrote sustava primjenom Poissonovskih prometnih modela	25
5.1. Simulacije za M/M/1 model	25
5.2. Usporedni rezultati	31
6. Određivanje mjera dobrote sustava primjenom Ne-poissonovskih prometnih modela .	33
6.1. G/M/1 model s normalnom razdiobom međudolaznih vremena.....	33
6.2. M/G/1 model s normalnom razdiobom vremena posluživanja	36
6.3. M/G/1 model s Pareto razdiobom vremena posluživanja	39
6.4. G/G/1 model s normalnom razdiobom međudolaznih vremena i Pareto razdiobom vremena posluživanja	42
6.5. Usporedni rezultati modela	44

7. Određivanje veličine pogreške zanemarivanjem značajki prometnog toka.....	46
8. ZAKLJUČAK	48
POPIS KRATICA	49
POPIS LITERATURE.....	50
POPIS SLIKA	52
POPIS GRAFIKONA.....	53
POPIS TABLICA.....	54

1. UVOD

Mnoštvo je situacija u kojima korisnici zahtijevaju neku uslugu i gdje su resursi posluživanja ograničenog kapaciteta, te ne mogu poslužiti sve zahtjeve korisnika u trenutku kada je usluga zatražena. U takvim situacijama korisnici koji traže uslugu mogu napustiti sustav neposluženi ili čekati na posluživanje. Jedan od primjera takvih situacija, a koji su analizirani u ovom radu, su komunikacijski sustavi u kojima korisnike predstavljaju paketi, a poslužitelje kanali i memorije. Osnovni problem kod svih takvih situacija je određivanje kapaciteta sustava koji će biti dostatan da posluži zahtjeve korisnika na zadovoljavajući način. Kako bi se to moglo odrediti potrebno je poznavati značajke procesa dolazaka i procesa posluživanja. U skladu s teorijom podvorbenih sustava uobičajeno se pretpostavlja da se međudolazna vremena i vremena posluživanja mogu opisati nekom funkcijom razdiobe vjerojatnosti. Varijabilnost procesa dolazaka i posluživanja ključna je u određivanju ponašanja podvorbenog sustava. To ponašanje može se opisati različitim mjerama performansi sustava, kao što su: distribucija vremena čekanja na posluživanje i zadržavanja korisnika u sustavu i distribucija broja korisnika u sustavu i u redu čekanja. Najčešće se kao mjere performansi koriste prosječne vrijednosti tih distribucija. U ovom radu je naglasak na ispitivanju utjecaja distribucija dolazaka i vremena posluživanja na mjere performansi sustava posluživanja. Rad je podijeljen u sedam poglavlja:

1. Uvod
2. Značajke prometnih modela za opisivanje toka u komunikacijskim mrežama
3. Poissonovski prometni modeli
4. Nepoissonovski prometni modeli
5. Određivanje mjera dobrote sustava primjenom Poissonovskim prometnih modela
6. Određivanje mjera dobrote sustava primjenom Ne-poissonovskih prometnih modela
7. Određivanje velične pogreške zanemarivanjem značajki prometnog toka

U drugom poglavlju opisane su glavne značajke kojima se opisuje prometni tok u komunikacijskim mrežama. Prvo su objašnjeni zahtjevi za kvalitetom usluge u višeuslužnoj mreži jer su oni zapravo pokretač potrebe za modelima na temelju kojih se dizajnira mreža. U istom poglavlju objašnjena su glavna mjerila izvedbe nekog podvorbenog sustava i opisane su razdiobe koje su korištene u praktičnom dijelu rada. Treće i četvrto poglavlje prikazuje upotrebu poissonovskih i ne-poissonovskih prometnih modela. Sve ove značajke objašnjane u prethodnim poglavljima služe za određivanje mjerila dobrote sustava. Korištenjem poissonovskih i nepoissonovskih prometnih modela, u poglavljima pet i i šest napravljena je analiza mjera dobrote sustava na temelju izvršenih simulacija. Na kraju poglavlja šest dan je usporedni prikaz svih izračunatih parametara. U sedmom poglavlju pokazana je važnost razmatranja razdiobi prilikom odabira modela tako što je izračunata veličina pogreške do koje dolazi zanemarivanjem značajki prometnog toka.

2. Značajke prometnih modela za opisivanje toka u komunikacijskim mrežama

Kada je razvijena telefonska mreža krajem 19. i početkom 20. stoljeća, javili u se i izazovi vezani uz njenu izvedbu. Danski matematičar Agner Krarup Erlang (1878. - 1929.) je bio među prvima koji je omogućio izvedbu kakva danas postoji. On je uspio odrediti potreban broj kanala za ostvaranje usluge u telefonskoj mreži. Odnosno razvio je formulu kojom se izračunava vjerojatnost blokiranja poziva, danas poznata kao Erlangova B formula. Pored toga razvio je i formulu kojom se može izračunati vjerojatnost čekanja, a može se naći i pod nazivom Erlangova C formula. S time je postavio temelje teleprometnog inženjerstva i proučavanja podvorbenih sustava. Oni imaju važnu primjenu na telekomunikacijski promet koji uključuje promet u analognoj mreži (pozivi) i promet u digitalnoj mreži (poruke, paketi, ćelije). S obzirom da su ove pojave odnosno procesi slučajnog karaktera, nije moguće točno odrediti sve željene vrijednosti, ali je moguće dati njihove vjerojatnosti. Upravo iz tih razloga razvijeni su modeli kojima se omogućuje predviđanje ponašanja nekog sustava.

2.1. Analiza zahtjeva za kvalitetom usluge u višeslužnim mrežama

Višeslužna mreža (engl. *Multi Service Network*) može se definirati kao mreža dizajnirana tako da prenosi promet više od jedne vrste aplikacije putem jedne mrežne infrastrukture. Glavni zahtjev prilikom dizajniranja mreže je omogućiti pravilno usmjeravanje prometa za svaki par izvorište-odredište. Mrežni dizajn uključuje dimenzioniranje linka (dodjelu odgovarajućeg kapaciteta različitim linkovima), uravnoteženje prometnog opterećenja između različitih mogućih ruta i određivanje usmjeravanja kojim se jamči zadovoljenje određenih mrežnih performansi. Prilikom dizajniranja memorije treba voditi računa da bude toliko velika da može kompenzirati *burst* (naglo povećanje) način prijenosa podataka. Bitne značajke višeslužne mreže su mehanizmi za pružanje zahtijevane razine kvalitete usluge. Tipična metrika kvalitete usluge (eng. *Quality of Service, QoS*) za mrežne performanse je [1]:

- vjerojatnost blokiranja poziva
- gubitak paketa
- kašnjenje s kraja-na-kraj.

Kod mreža s komutacijom kanala u slučaju nedostupnih resursa za prijenos poziva na linku na putu od izvorišta do odredišta poziv je blokiran i odbijen. Blokiran poziv je poziv koji nije poslužen odmah [1]. Pozivi koji se smatraju blokiranim su i pozivi koji su preusmjereni na drugu grupu kanala tj. drugi link. Priroda blokiranih poziva određuje model koji će biti odabran jer blokirani pozivi dovode do razlika u prometnom opterećenju. Gubitak paketa (eng. *Packet Loss*) nastaje kada dođe do prepunjavanja spremnika (eng. *buffer*) tj. zagušenja u čvorovima

paketne mreže (eng. *ruterima*), kao posljedica čekanja paketa u redovima za usmjeravanje. Dakle, nastaju zbog ograničenja memorije dostupne za pohranjivanje paketa u čvorovima [2]. Međutim, za neke aplikacije, ako paket prekomjerno kasni, to je isto kao da je izgubljen. Zbog toga treba proširiti definiciju gubljenja, tako da se uključi prekomjerno kašnjenje paketa. Kašnjenje (eng. *latency, delay*) označuje vrijeme potrebno da se paket (ako se radi o paketnoj mreži) prenese od izvorišta do odredišta. Brojni čimbenici utječu na veličinu kašnjenja. U nastavku su nabrojane komponente ukupnog kašnjenja [2]:

- kašnjenje zbog kodiranja i dekodiranja
- kašnjenje zbog komprimiranja i dekomprimiranja
- kašnjenje zbog paketizacije i depaketizacije
- kašnjenje zbog prijenosa na linku
- kašnjenje zbog propagacije
- kašnjenje zbog usmjeravanja u čvorovima
- kašnjenje zbog čekanja u međuspremnicima rutera.

Neke komponente kašnjenja su fiksne, dok su druge varijabilne. Komponente koje se odnose na kašnjenja u mreži teško se mogu predvidjeti jer ovise o trenutačnom opterećenju čvorova kao i o performansama mrežnih elemenata. Na varijabilnost određenih komponenata utječu različito vrijeme čekanja u čvorovima mreže i duljina paketa koja je različita za pojedine aplikacije, a i iste aplikacije mogu imati različite duljine paketa [2]. Upravljanje redovima čekanja nastoji ublažiti zagušenje mreže pa ako je potrebno i odbacivanjem paketa. Ako se u prijenosu pojave paketi koji su uslijed kašnjenja postali neupotrebljivi npr. prijenos slike i zvuka tada i takvi paketi (tzv. eng. *stale packets*) bivaju odbačeni kako bi oslobodili kapacitete jer će ih primatelj podataka ionako odbaciti. Algoritmi raspoređivanja ili planiranja (eng. *scheduling algorithms*) određuju koji paket će biti slijedeći poslan kako bi održao i poštovao prioritet u raspoređivanju raspoloživih kapaciteta. Upravljanje redovima čekanja također je dio QoS-a u kojima se tok podataka identificira i klasificira i tada se smješta u red čekanja radi osiguravanja odgovarajuće razine usluge prijenosa podataka [3].

Gore navedenim aspektima prilikom mrežnog dizajna bavi se teleprometno inženjerstvo koje obuhvaća mjerenje, modeliranje, karakterizaciju¹ i kontrolu multimedijalnog višeklasnog prometa radi postizanja određenih ciljeva unutar mreže. Ugovor o razini usluge, *Service Level Agreement* (SLA) detaljno opisuje te ciljeve. On određuje prava korisnika, odgovornosti i kazne za pružatelja usluga (npr. davatelja internetskih usluga, telekomunikacijskog operatora itd.) te procjenjuje kada pružatelj usluge krši bilo koji element SLA. Također, definira samu uslugu, mrežne karakteristike, sigurnosne aspekte, kriterije ocjenjivanja i razinu usluge (QoS) koju kupci imaju pravo očekivati [1]. Primjer prihvatljivih vrijednosti, prema QoS kriterijima za VoIP usluge mogu se vidjeti u tablici 1.

¹ Razumijevanje „prirode“ prometa, prepoznavanje karakteristika i izgradnja praktičnih modela.

Tablica 1. Prihvatljive vrijednosti, prema QoS kriterijima za VoIP usluge

<i>Parametar</i>	<i>Ciljana vrijednost</i>
<i>Jitter</i>	$\leq 30\ ms$
<i>Kašnjenje</i>	$\leq 150\ ms$
<i>Gubitak paketa</i>	$0 \leq 1\%$ (prihvatljivo)

Izvor: [4]

Kako je vidljivo iz tablice 1., pored navedenog skupa mjerila u ovom poglavlju, koja se koriste u ocjeni kvalitete usluge, važno je dodati i parametar *Jitter* koji predstavlja varijacije odnosno kolebanje kašnjenja. Kolebanje kašnjenja predstavlja varijacije međudolaznih vremena paketa iste sesije i značajan je parametar za stvarnovremenske usluge. Tablica 2 prikazuje poopćene QoS zahtjeve pojedinih aplikacija koji se moraju uzeti u obzir prilikom mrežnog dizajna. U njoj se može se vidjeti da određeni tipovi prometa, posebno stvarnovremenski promet kao što je govor, ne toleriraju velike varijacije u kašnjenju. Važna performasa je i širina prijenosa (engl. *bandwidth*) i mjeri se u bitovima po vremenskoj jedinici (npr. *bit/s*) [4]. Kod višeuslužnih mreža potrebno je za svaku uslugu zasebno odrediti širinu pojasa [5]. U paketno komutiranim mrežama mogu se dogoditi redovi čekanja na svakom linku i na svakom čvoru (OSI slojevi 2 i 3) [1]. Čekanje na razini paketa može se tolerirati do određenih granica ovisno o tipu aplikacije (podatkovne, govorne, video i itd.).

Tablica 2. Osjetljivost aplikacija na degradaciju vrijednosti QoS parametara

	Zahtijevana širina pojasa (kapacitet)	<i>Osjetljivost na:</i>		
		Kašnjenje	Varijacije kašnjenja	Gubitke
<i>IP telefonija</i>	Mala	Veliko	Veliko	Srednje
<i>Videokonferencija</i>	Velika	Veliko	Veliko	Srednje
<i>Video strujanje²</i>	Velika	Srednje	Srednje	Srednje
<i>Audio strujanje</i>	Mala	Srednje	Srednje	Srednje
<i>E-poslovanje</i>	Srednja	Srednje	Malo	Veliko
<i>E-mail</i>	Mala	Malo	Malo	Veliko
<i>Prijenos podataka</i>	Srednja	Malo	Malo	Veliko

Izvor: [5]

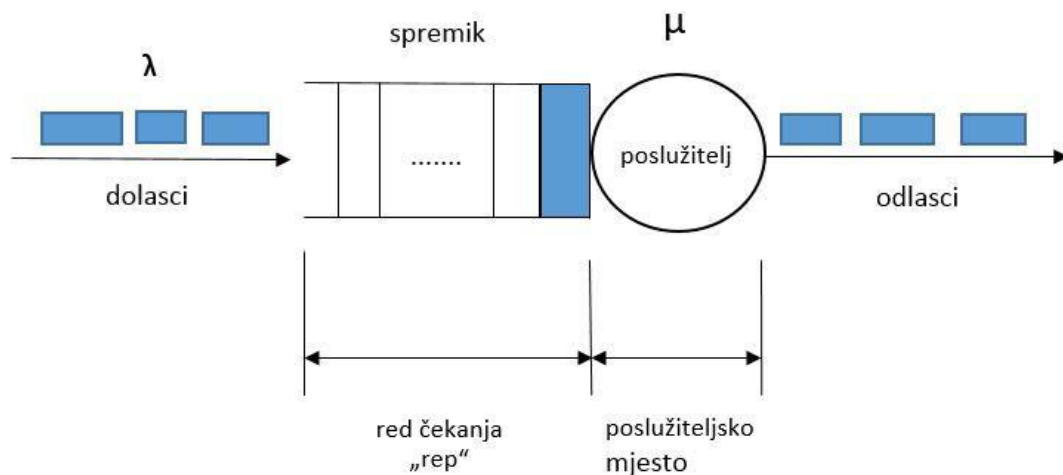
2.2. Primjena podvorbenih sustava

Kako bi se ostvarili gore spomenuti zahtjevi kvalitete usluge, u telekomunikacijskim mrežama se koristi teorija podvorbenih sustava (TPS) (naziva se još i teorija čekanja i teorija prometa). U engleskoj literaturi podvorbeni sustavi se prevode kao „sustavi redova (čekanja)“ ili samo „redovi čekanja“ (eng. *Queueing Systems*). Temelji se na teoriji vjerojatnosti i služi za

² eng. *video streaming*

modeliranje širokog raspona problema iz područja prometnog inženjerstva. Teorija podvorbena sustava ima za cilj optimizirati procese u kojima korisnici dolaze slučajno u na posluživanje u podvorbena sustav [6]. U paketnim mrežama, slučajane događaje predstavljaju dolasci paketa i duljine paketa. TPS se može koristiti za proučavanje statistika broja paketa u redu ili npr. razdiobe kašnjenja u redu, prosječnog kašnjenja u redu, varijance kašnjenja u redu čekanja. Koristi se, također, za oblikovanje računalnih sustava gdje se misli na kapacitete računalne opreme (sabitnice, memorije, određivanje kapaciteta spremnika) i rad mreže računala: LAN, WAN itd., [6]. Dok se na fizičkom sloju proučava brzina prijenosa bita, na mrežnom sloju proučava se kašnjenje. Za proučavanje performansi čvorova paketske mreže koji moraju prospojiti ulazni promet na dostupne izlazne linkove, potrebni su složeni modeli čekanja [7].

Podvorbena sustav sastoji od korisnika, repa, poslužitelja i zbirke pravila prema kojima se obavlja posluživanje dolazećeg korisnika [6]. Na slici 1 prikazan je jednoposlužiteljski PS. Korisnici dolaze slučajno pred PS nekim intenzitetom dolazaka koji se označava sa λ . Ukoliko je poslužitelj zauzet, korisnik se smješta u spremnik koji u teoriji može biti ograničenog ili neograničenog kapaciteta. Red čekanja se naziva još i rep. Poslužitelj radi određenim intenzitetom μ i označava brzinu posluživanja korisnika u jedinici vremena.



Slika 1. Shematski prikaz jednoposlužiteljskog PS

Kada zahtjevi privremeno stižu većom brzinom od vremena potrebnog za ispunjenje svakog od njih, stvara se red čekanja, pod uvjetom da ima mjesta za pohranu tih zahtjeva koje treba poslužiti. Spremnik služi za prihvat paketa prilikom naglog povećanja prometnog volumena (eng. *burst traffic*). U paketno komutiranoj mreži kao što je Internet gotovo je nemoguće predvidjeti koliko će korisnika, kada i u kojoj količini početi slati podatke pa su neki dijelovi mreže zagušeni, a neki nisu [3].

Kendallove oznake predstavljaju skraćeni način opisivanja glavnih obilježja PS. Nazvane su po britanskom matematičaru Davidu Georgeu Kendallu koji je prvi predložio takav način zapisa. Kendallove oznake se prema nekim autorima sastoje od šest, a prema nekima od pet simbola [6] i [8]:

$$A / B / C / K_q / K_i / P.S$$

A: oznaka za razdiobu međudolaznih vremena Najčešće korištene razdiobe su:

M – eksponencijalna (*M* ovdje označava dolazak bez pamćenja)

E_k – Erlangova *k* – tog reda

D – konstantna ili deterministička

G – opća, tj. bilo koja

GI – opća s neovisnim intervalima (eng. *general independent*)

H_k – hiperekspencijalna reda *k*

B – Bernoulijeva

PH - fazni tip (eng. *phase type*).

B: oznaka za razdiobu trajanja posluživanja. Vrste razdiobe su iste kao za međudolazna vremena.

C: broj poslužitelja

$c \equiv$ broj istovrsnih paralelnih poslužitelja

$c(k) \equiv$ serijski spojeni poslužitelji u *k* koraka ili stadija

K_q : kapacitet sustava (tj. najveći dopušteni broj korisnika u PS, sastoji se od broja mjesta kod poslužitelja i u spremniku)

K_i : kapacitet izvora (tj. najveći dopušteni broj korisnika u izvoru)

P.S: podvorbena stega. Neke od mogućih oznaka su:

T: čekanje ograničeno na T [vremenskih jedinica], FCFS, LCFS, SRO, RR, PS

p1: prednosni s odgodivim prekidom

p2a: prednosni s neodgodivim prekidom i bez ponavljanja

p2b: prednosni s neodgodivim prekidom i s ponavljanjem

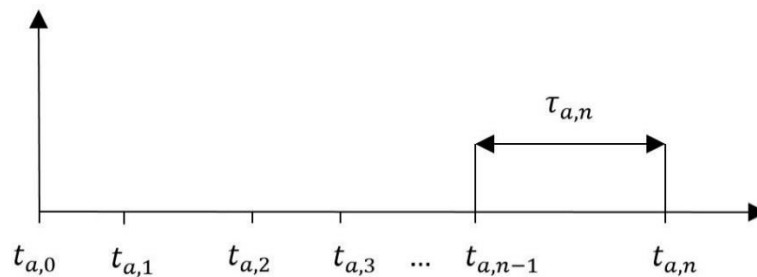
d: vremenski promijenjive prednosti (dinamički prioriteti).

Najjednostavnija disciplina i najčešće susretana u praksi je disciplina "prvi došao prvi poslužen" (eng. *First Come First Served*). Postoje i druge discipline kao što su: slučajno posluživanje, zadnji došao prvi poslužen, grupno posluživanje i disciplina posluživanja s prioritetom. Kada posljednja tri parametra za neki model nisu navedena (npr. M/M/1 model, pretpostavlja se: $K_q = \infty$, $K_i = \infty$ i $P.S = FIFO$).

2.3. Matematički opis podvorbenog sustava

2.3.1. Ulazni proces

Analiza svakog podvorbenog sustava počinje definiranjem ulaznog procesa (slika 2). Ovdje se pretpostavlja da korisnici dolaze pojedinačno (ne u skupinama). Trenutci dolazaka korisnika pred PS su: $t_{a,0}; t_{a,1}; \dots; t_{a,n}; \dots$, a vremenski odsječki τ_a nazivaju se *međudolaznim vremenima*: $\tau_{a,n} \equiv t_{a,n} - t_{a,n-1}; n = 1, 2, \dots; \tau_{a,0} \equiv 0$



Slika 2. Prikaz ulaznog procesa

Izvor: [6]

Pretpostavlja se da su međudolazna vremena međusobno neovisne i nenegativne slučajne varijable. Za potrebe obrade jednostavnih podvorbenih sustava (PS) dovoljno je pretpostaviti da međudolazna vremena svih korisnika imaju istu razdiobu s funkcijom razdiobe $A(t)$ i gustoće $a(t)$ za koje vrijedi [6]:

$$A(t) \triangleq [\tau_a \leq t]; A(t) = 0 \text{ za } t \leq 0; a(t) = \frac{dA(t)}{dt}; T_a = \frac{1}{\lambda} = \int_0^{\infty} t \cdot a(t) dt \quad (1)$$

T_a u navedenom izrazu ima značenje matematičkog očekivanja odnosno, očekivanog međudolaznog vremena i predstavlja recipročnu vrijednost brzine dolazaka zahtjeva/korisnika λ .

2.3.2. Proces posluživanja

Osnovna veličina kod procesa posluživanja je trajanje posluživanja (boravak kod poslužitelja ili vrijeme posluživanja). Proces posluživanja definira sljedeće oznake:

$$\tau_{s,1} = \tau_{s,2} = \dots = \tau_{s,n} = \dots = \tau_s \Rightarrow SV \tau_s = \text{„trajanje posluživanja“}$$

$$B(t) = [\tau_s \leq t]; t \leq 0; b(t) = \frac{dB(t)}{dt}; T_s = \frac{1}{\mu} = \int_0^{\infty} t \cdot b(t) dt \quad (2)$$

U navedenom izrazu, T_s ima značenje matematičkog očekivanja, odnosno očekivanog vremena posluživanja. To je prosječna vrijednost vremena provedenog kod poslužitelja ili vremena posluživanja, a predstavlja recipročnu vrijednost brzine posluživanja zahtjeva/korisnika, μ . Određivanjem ulaznog procesa, tj. procesa dolazaka korisnika pred PS i procesa posluživanja, te uz definiranu podvorbenu stegu, matematički je model PS potpuno određen. U najjednostavnijem pristupu se pretpostavlja da su oba ta procesa međusobno neovisna [6].

S obzirom na činjenicu da je naglasak u ovom radu na mreže u kojima je mod ili način posluživanja paket, potrebno je objasniti o čemu ovisi slučajna varijabla vrijeme posluživanja. Za modeliranje prometa u mreži paketom se smatra blok podataka koji treba prenijeti (on se sastoji od korisničkog sadržaja i zaglavlja čija duljina može varirati) [9]. U višeuslužnim mrežama zastupljene su različite vrste prometnih tokova generirane od različitih aplikacija korisnika. Jedna od značajki prometnih tokova je i veličina paketa koja utječe na to koliko vremena će paket provesti na prijenosnom linku. Veličina paketa ovisi o vrsti aplikacije koju koristi korisnik i o vrsti sadržaja koji se prenosi. Generalno se može reći da se sadržaji koji zahtijevaju prijenos u stvarnom vremenu prenose u manjim paketima, dok oni koji nisu osjetljivi na kašnjenja u većim paketima. Veličina paketa predstavlja količinu posla podvorbenom sustavu (linku). U skladu s navedenim može se zapisati [9]:

$$\tau_{s,i} = \frac{p_i}{C} \quad (3)$$

Uvedene oznake imaju značenje:

$\tau_{s,i} \equiv$ trajanje posluživanja i -tog korisnika

$p_i \equiv$ veličina i -tog paketa izražena u bitima

$C \equiv$ kapacitet poslužitelja izražen količinom bita koji se može prenijeti u sekundi.

Prosječno vrijeme posluživanja T_s može se izraziti kao [9]:

$$T_s = \frac{\bar{p}}{C} = \frac{\bar{p}}{\mu \cdot \bar{p}} = \frac{1}{\mu} \quad (4)$$

2.3.3. Prometna mjerila

Neka od glavnih prometnih mjerila (ili veličina) koje su korištene u ovom radu, a čije je značenje je objašnjeno u nastavku su: ponuđeni promet (a), jakost prometai ili prometno opterećene (ρ), obavljeni promet (a'), iskoristivost poslužitelja (ρ'), prosječni broj korisnika u sustavu (L_q), prosječni broj korisnika u redu (L_w) i vrijeme odziva ili trajanje boravka u PS (T_q).

"Ponuđeni promet (eng. *offered traffic*) je jednak prosječnom broju korisnika ponuđenih podvorbenom sustavu tijekom razdoblja koje je jednako prosječnoj vrijednosti trajanja posluživanja jednoga korisnika", [6]. Pod pojmom ponuđeni korisnici se smatraju oni korisnici koji dolaze pred PS. Jedinica za mjerenje ponuđenog prometa u telekomunikacijskim mrežama je [erlang]. Jedan *erlang* odgovara prometu od 3 600 sekundi nastalih od poziva na istom poslužitelju/kanalu ili jedan *erlang* je prometno opterećenje koje je dovoljno da bi držalo zauzetim jedan sat, jedan kanal [10]. U skladu s navednim ponuđeni promet se može prikazati pomoću izraza, [6]:

$$a = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot T_s = \frac{T_s}{T_a} \quad (5)$$

Oznake u navedenom izrazu imaju značenje koje je uvedeno u prethodnim poglavljima.

„Prometno opterećenje ili jakost prometa je ponuđeni promet po jednom poslužitelju“, [6]. Ako poslužiteljsko mjesto ima c paralelnih poslužitelja koji rade brzinom μ jakost prometa se određuje prema izrazu navedenom u [6]:

$$\rho = \frac{a}{c} = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} \quad (6)$$

Ako poslužiteljsko mjesto ima c paralelnih poslužitelja, svaki prima prosječno (λ/c) korisnika u jedinici vremena, a to znači da takav sustav može obaviti maksimalni promet od c [erl], jer maksimalni promet koji može obaviti jedan poslužitelj iznosi 1 [erl]. Za jednosposlužiteljski sustav bez gubitaka ($c = 1$) prometno opterećenje je jednako ponuđenom prometu, $\rho = a$. Kako jakost prometa ne može biti veća od jedinice, izraz za ρ se piše i na sljedeći način, [6]:

$$\rho = \min \left\{ \frac{\lambda}{c \cdot \mu}; 1 \right\} \quad (7)$$

Veza između prometnog opterećenja i duljine paketa dana je izrazom (8), [9].

$$\rho = \frac{\lambda \cdot \bar{p}}{C} \quad (8)$$

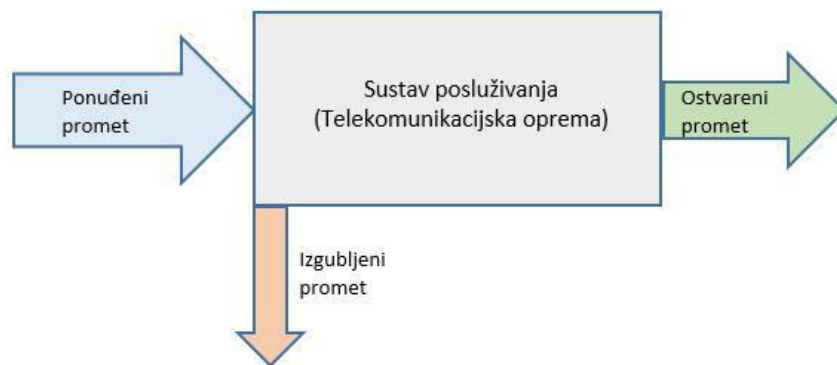
Sve veličine navedene u prethodnom izrazu objašnjene su u potpoglavlju 2.3.2. poglavljima „

Obavljeni ili ostvareni promet (eng. *carried traffic*) je dio ponuđenog prometa koji se ne gubi na ulazu u PS, nego prolazi kroz njega“, [6]. To je mjera broja korisnika koji su posluženi u PS. Ako sustav omogućuje stvaranje neograničenog repa, obavljeni promet je jednak ponuđenom (uz pretpostavku da su korisnici strpljivi i ne napuštaju red). U podvorbenim sustavima u stacionarnom stanju uvijek je obavljeni promet numerički jednak prosječnom broju zaposlenih poslužitelja. Ako je $B(a)$ vjerojatnost blokiranja, obavljeni promet je, [6]:

$$a' = a [1 - B(a)] \quad (9)$$

Slika 3 prikazuje tri vrste prometa koje su opisane iznad. Ponuđeni promet je stvarna količina poziva koji nastoje pristupiti sustavu. Taj promet se ne može izmjeriti, nego samo procijeniti

za razliku od ostvarenog prometa koji može biti stvarno izmjeren. Kod proračuna je stoga nužno razlikovati ponuđeni i ostvareni promet. Povećavajući količinu blokiranih poziva povećava se i razlika između ostvarenog i ponuđenog prometa [10].



Slika 3. Vrste prometa

Izvor: [10]

„Iskoristivost poslužitelja je obavljani promet na jednog poslužitelja u stacionarnom stanju sustava, ili dio ukupnog vremena promatranja unutar kojeg je poslužitelj zaposlen“, [6]. U PS bez gubitaka, tj. kod kojega ni jedan korisnik ne može biti gubitak i ako svi poslužitelji imaju istu brzinu posluživanja, μ , iskoristivost poslužitelja i jakost prometa (prometno opterećenje) su numerički jednake veličine [6]. Za c paralelnih poslužitelja je, [6]:

$$\rho' = \frac{a'}{c} \quad (10)$$

Prosječni broj korisnika u sustavu, L_q prema [6] određuje se kao:

$$L_q = E\{n_q\} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot Q_n, \text{ gdje je } Q_n = P[n_q = n] \quad (11)$$

U tablici 3 navedeni su izrazi koji vrijede neovisno o modelu sustava posluživanja (objašnjeni u poglavljima 3 i 4) i isti su korišteni pri izračunu izlaznih veličina u poglavlju 5 i 6. Dio tih izraza iz tablice 3 bazira se na Littelovom zakonu te je stoga formula koja ga opisuje objašnjena u nastavku. Neka je L prosječni broj korisnika, λ je intenzitet dolaska, a T prosječna duljina intervala unutar kojeg se očekuje λ korisnika. Izraz se odnosi na rep, poslužiteljsko mjesto i cijeli PS. Između tih veličina vrijedi sljedeći odnos koji se naziva Littleova formula i vrijedi za sve PS u statičkoj ravnoteži, i to uz vrlo mala ograničenja, [11]:

$$L = \lambda \cdot T \quad (12)$$

Oznake unutar formule mogu imati značenje:

L \equiv prosječna vrijednost broja korisnika u repu, kod poslužitelja ili u PS

λ \equiv prosječna vrijednost brzine ulazaka u sustav

T \equiv prosječna vrijednost duljine boravka u repu, kod poslužitelja ili u PS.

Tablica 3. Izrazi koji vrijede neovisno o modelu sustava posluživanja

<ul style="list-style-type: none"> • Promet, a je jednak prosječnom intenzitetu dolazaka korisnika pomnožen sa prosječnim vremenom posluživanja. S obzirom da je $T_s = \frac{1}{\mu}$ može se pisati sljedeći izraz: 	$a = \lambda \cdot T_s = \frac{\lambda}{\mu}$	(13)
<ul style="list-style-type: none"> • Veličinu prometa, a može se još pisati pomoću izraza u kojem je promet jednak sumi vremena posluživanja podijeljen sa sumom međudolaznih vremena: 	$a = \frac{\sum_{i=1}^N t_{s_i}}{\sum_{i=1}^N t_{a_i}}$	(14)
<ul style="list-style-type: none"> • Prometno opterećenje ili jakost prometa, ρ jednako je prometu podijeljenom sa brojem poslužitelja: 	$\rho = \frac{a}{c}$	(15)
<ul style="list-style-type: none"> • Prosječni broj korisnika u sustavu, L_q jednak je sumi prosječnog broja korisnika koji čekaju u redu, L_w i prosječnog broja korisnika koji su kod poslužitelja, L_s: 	$L_q = L_w + L_s$	(16)
<ul style="list-style-type: none"> • Prosječno vrijeme boravka u sustavu, T_q često se naziva vremenom odziva. Jednako je sumi prosječne vrijednosti čekanja, T_w i prosječne vrijednosti trajanja posluživanja, T_s: 	$T_q = T_w + T_s$	(17)
<ul style="list-style-type: none"> • Prosječno vrijeme čekanja (boravka u redu) jednako je omjeru prosječne duljine reda, i i brzine dolazaka korisnika: 	$T_w = \frac{L_w}{\lambda}$	(18)
<ul style="list-style-type: none"> • Prosječno vrijeme boravka u sustavu jednako je omjeru prosječnog broja korisnika u sustavu i brzine dolazaka korisnika: 	$T_q = \frac{L_q}{\lambda}$	(19)

Izvor: [6]

2.4. Opis razdiobi ulaznog i izlaznog toka

Slučajna varijabla X može biti neprekinuta (drugi naziv: kontinuirana) i diskretna te se prema tome razlikuju i razdiobe³. Slučajna varijabla X je diskretna ako joj je zadani skup $\mathcal{R}(X) = X(\Omega)$ konačan ili prebrojivo beskonačan skup. Diskretne slučajne varijable opisuju se funkcijom vjerojatnosti (eng. *Probability mass function*, PMF) i kumulativnom funkcijom razdiobe (vjerojatnosti), $F(x)$, (eng. *Cumulative distribution function*, CDF). Funkcija vjerojatnosti se ne definira za neprekinute slučajne varijable (ne može se odrediti vjerojatnost nekog elementarnog događaja iz skupa Ω koji je kontinuiran). Dok se kumulativna funkcija razdiobe vjerojatnosti može odrediti za obje vrste SV [12]. Za slučajnu varijablu X se kaže da je neprekinuta ako joj je skup vrijednosti $\mathcal{R}(X)$ neprebrojiv. Ona se može opisati funkcijom gustoće vjerojatnosti, $f(x)$, FGV (eng. *Probability density function*, PDF) i, kao što je već navedeno, kumulativnom funkcijom razdiobe (vjerojatnosti), $F(x)$. Primjer diskretne slučajne varijable je broj korisnika u repu, a neprekinute SV je trajanje boravka korisnika u podvorbenom sustavu.

Momenti su brojevi koji opisuju razdiobu. U području statističke analize kada se svojstva pučanstva (populacije) procjenjuju s pomoću uzoraka, momenti su mjerila sredine uzoraka ili srednje vrijednosti. Njih ima nekoliko desetaka, a neki od njih su primjerice: matematičko očekivanje $E(X)$, varijanca $Var(X)$, medijan i mod [6]. Varianca (znak σ^2) je mjera disperzije mjerenih ili slučajnih veličina; prosječna suma kvadrata odstupanja vrijednosti obilježja (veličine) od aritmetičke sredine [13]. Pozitivni drugi korijen iz varijance mjera je odstupanja, a naziva se standardna devijacija. Standardna devijacija (standardno odstupanje) (znak σ), prosječno je srednje kvadratno odstupanje numeričkih vrijednosti neke veličine x_1, x_2, \dots, x_N od njihove aritmetičke sredine x . Relativna standardna devijacija (koeficijent varijacije) (znak V) je omjer standardne devijacije i aritmetičke sredine (x) pomnožen sa 100. Percentil ili centil (lat. *centum*: sto), jedna je od određenih srednjih vrijednosti (tzv. kvantila) statističkih nizova, koji uređeni brožčani ili redosljedni niz dijele na jednake dijelove. Medijan dijeli niz na dva jednaka dijela, kvartili dijele niz na četiri, decili na deset, a percentili na stotinu jednakih dijelova [13]. Ispod su prikazane neke od važnijih razdioba koje su značajne u proučavanju teorije prometa. Od navedenih razdioba u sljedećim potpoglavljima pod diskretne razdiobe spada Poissonova razdioba, a pod kontinuirane spadaju ostale navedene: eksponencijalna, normalna ili Gaussova i Pareto. Ove razdiobe služe za opis međudolaznih vremena i vremena posluživanja za neki podvorbeni sustav. Grafovi FGV za ove razdiobe prikazani su u poglavljima 5 i 6.

³ razdioba ili distribucija od eng. *distribution*

2.4.1. Poissonova razdioba

Def. Diskretna slučajna varijabla X ima Poissonovu razdiobu s parametrom $\lambda > 0$ ako X poprima vrijednosti iz skupa $\{0,1,2, \dots\}$ s vjerojatnostima, [14]:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad x = 0,1,2, \dots \quad (20)$$

Funkcija razdiobe $F(x)$ je, [14]:

$$F(x) = \sum_{x_i=0}^x \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \quad (21)$$

Za $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ numeričke karakteristike (matematičko očekivanje i varijanca) iznose, [14]:

$$E(X) = \lambda, \quad (22)$$

$$Var(X) = \lambda \quad (23)$$

Poissonova razdioba javlja se u graničnim slučajevima primjene binomne razdiobe kada broj pojavljivanja pokusa neograničeno raste i vjerojatnost p je mala. Ulogu očekivanja np pojavljivanja broja ishoda zamjenjuje intenzitet λ pojavljivanja ishoda. U primjeni se uzima $\lambda = np$ [14]. Za dovoljno velik n i mali p , binomna razdiobu $\mathcal{B}(n, p)$ može se aproksimirati Poissonovom razdiobom. U praksi se uzima zahtjev $np \leq 10$ i $n > 50$, ali aproksimacija je tim bolja što je n veći, a p manji. Poissonovu razdiobu imaju slučajne varijable čije su vrijednosti jednake primjerice: broju telefonskih poziva u nekom vremenskom intervalu, broju korisnika koji dolaze pred poštanski šalter, broju automobilskih nesreća u nekom vremenskom intervalu, broju tiskarskih pogrešaka na stranici teksta [14].

2.4.2. Eksponecijalna razdioba

Ova razdioba je veoma značajna u primjeni na podvorbene sustave. Kontinuirana slučajna varijabla, SV X ima ekspanencijalnu razdiobu s parametrom $\lambda > 0$ ako je njezina funkcija gustoće vjerojatnosti [14]:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (24)$$

Funkcija razdiobe $F(x)$ je po definiciji za $x > 0$, [14]:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = 0 + \lambda \int_0^x e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

to je, [14]:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases} \quad (25)$$

Očekivanje je, [14]:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\lambda x} dx = \dots = \frac{1}{\lambda} \quad (26)$$

(Integral se izračunava metodom parcijalne integracije.)

Varijanca iznosi, [14]:

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (E(X))^2 = \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2} = \dots = \frac{1}{\lambda^2} \quad (27)$$

Eksponencijalna slučajna varijabla X u praksi najčešće mjeri vrijeme između dva događaja. Općenito vrijeme do pojave nekog događaja čija je vjerojatnost pojavljivanja u svakom kratkom intervalu jednake duljine jednaka [14]. Tipičan primjer vrijeme koje prođe između dva uzastopna dolaska zahtjeva za uspostavu poziva, duljina trajanja poziva, vrijeme do pojave nesreće itd. Javlja se i u problemima vezanim za vrijeme ispravnog rada uređaja čije se karakteristike mijenjaju u vremenu, npr. vrijeme ispravnog rada žarulje itd. Kod ove razdiobe bitno je napomenuti njezino svojstvo zaboravljivosti te da je ona izuzetno važna u teoriji prometa.

2.4.3. Normalna ili Gaussova razdioba

Najvažnija razdioba koju ima velik broj slučajnih varijabli je normalna ili Gaussova. Uz određena ograničenja velik broj drugih razdiobi može se aproksimirati normalnom razdiobom.

Def.: Za neprekinutu slučajnu varijablu X s funkcijom gustoće vjerojatnosti [14]:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad X \in \mathbb{R} \quad (28)$$

kaže se da ima normalnu ili Gaussovu razdiobu s paramentrima $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ i piše se $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Normalna razdioba služi kao usporedba simetričnosti i spljoštenosti ostalih razdioba. Funkcija razdiobe je [14]:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \quad (29)$$

Očekivanje i varijanca su [14]:

$$E(X) = \mu \quad (30)$$

$$Var(X) = \sigma^2 \quad (31)$$

2.4.4. Pareto razdioba

Rep ove razdiobe pada puno sporije od eksponencijalne razdiobe te se zato kaže da je ona dugorepa (eng. *heavy-tailed*) razdioba [11]. Pareto razdioba ima dva parametra $\alpha > 0$ i $\beta > 0$, i definirana je, [11]:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \beta \\ 1 - (x/\beta)^{-\alpha}, & \beta \leq x < \infty \end{cases} \quad (32)$$

Funkcija gustoće vjerojatnosti je, [11]:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \beta \\ \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{-(\alpha+1)}, & \beta \leq x < \infty \end{cases} \quad (33)$$

Matematičko očekivanje, $E[X]$ i iznosi [11]:

$$E[X] = \int_0^{\infty} F_X^c(x) dx = \beta + \beta^\alpha \int_\beta^{\infty} x^{-\alpha} dx = \frac{\alpha\beta}{\alpha-1}, \text{ za } \alpha > 1 \quad (33)$$

gdje $E[X]$ ne postoji za $\alpha \leq 1$.

Varijanca, $Var[X]$ je, [11]:

$$Var[X] = \sigma_X^2 = \frac{\alpha\beta^2}{\alpha-2} - \frac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, \text{ za } \alpha > 2 \quad (34)$$

3. Poissonovski prometni modeli

Podvorbeni sustavi kod kojih je proces dolazaka i posluživanja Poissonov slučajni proces nazivaju se poissonovskima. Primjer poissonovskog podvorbenog modela je $M/M/1/\infty/\infty/FCFS$ (skraćeno $M/M/1$). Prvo slovo "M" označava "Markovljeve" dolaske, što u ovom slučaju znači Poissonov proces. Drugo slovo "M" označava "Markovljevo" vrijeme posluživanja, što ovdje znači eksponencijalno distribuirano vrijeme poluživanja. Zadnji broj "1" znači da postoji samo jedan poslužitelj [11]. Za teoriju prometa se može reći da je primjenjena teorija slučajnih (ili stohastičkih) procesa. Poissonov i Markovljev proces opisani su u potpoglavlju 3.1. u nastavku.

3.1. Slučajni procesi

Slučajni proces je matematički model vjerojatnosnog eksperimenta koji se mijenja u vremenu i stvara niz brojačnih (numeričkih) vrijednosti. Svaka brojčana vrijednost u nizu modelira se slučajnom varijablom pa se može reći da je slučajni proces konačan ili beskonačan niz slučajnih varijabli. Slučajni procesi se mogu koristiti npr. za modeliranje: dnevnih cijena dionica; pogodaka u nogometnoj utakmici; vremena prestanka rada stroja; radarskih mjerenja položaja aviona [12]; veličine prometa u svakoj točki telekomunikacijske mreže tijekom nekog razdoblja, broja korisnika koji ulaze u poštu tijekom radnog vremena, dnevnih iznosa zaliha u skladištu pričuvnih dijelova [6]. Slučajni procesi proučavaju se da bi se dala vjerojatnost ili učestalost određenih graničnih događaja. Na primjer, kolika je vjerojatnost da će u određenom satu svi kanali/sklopovi nekog telefonskog sustava postati istodobno zauzeti ili kolika je frekvencija kojom neki spremnik u računalnoj mreži postaje napunjen [12].

Ako na značajke neke pojave koja se odvija u vremenu djeluju nepredvidivi, tj. slučajni, utjecaji, tada je riječ o slučajnom procesu. Formalna definicija prema [6] glasi: „ SP je zbirka SV koje su definirane na istom vjerojatnosnom prostoru i obilježene s pomoću realnih brojeva $\{N(t), t \in T\}$, gdje je T skup trenutaka na koje se odnosi SP , a tada je $X(t)$ iznos procesa u trenutku t . t se naziva parametrom SP , a T skupom parametara SP . t je uvijek skalar, a T je skup skalara. Ako je T konačno ili prebrojivo beskonačno, naziva ga diskretnim. Inače T nazivamo kontinuiranim. Skup svih mogućih vrijednosti koje može imati $X(t)$ naziva se skupom stanja S . U tom smislu kao T, S može biti diskretan ili kontinuiran“:

$$T = \{0, 1, 2, \dots\} \triangleq I \quad : \text{diskretni } T$$

$$T = [0, \infty) \quad : \text{kontinuirani } T$$

Postoji više vrsta slučajnih procesa. Ovdje su objašnjeni procesi koji se baziraju na dolascima (eng. *Arrival-Type Processes*) i Markovljevi procesi. Markovljev proces je SP kod kojega razdiobe budućeg razvoja procesa ovise samo o sadašnjem stanju, a ne ovise o tome kako je proces došao u sadašnje stanje (neovisne su o tome kada se zadnji dolazak dogodio) [7]. Za određivanje vjerojatnosti idućeg stanja bitno je samo znati u kojem se stanju sustav trenutno nalazi [12]. Markovljevi procesi razlikuju se po skupu stanja S , ono može biti diskretno ili kontinuirano i skupu parametara T koji isto može biti diskretan ili kontinuiran [6]. MP s diskretnim skupom stanja naziva se lanac. Ako je i prostor parametara (vrijeme) diskretan, dobiva se Markovljev lanac s diskretnim parametrom. Kako je u primjenama na podvorbene sustave parametar isključivo vrijeme, to su onda Markovljevi lanci s diskretnim vremenom (MLDV) [6].

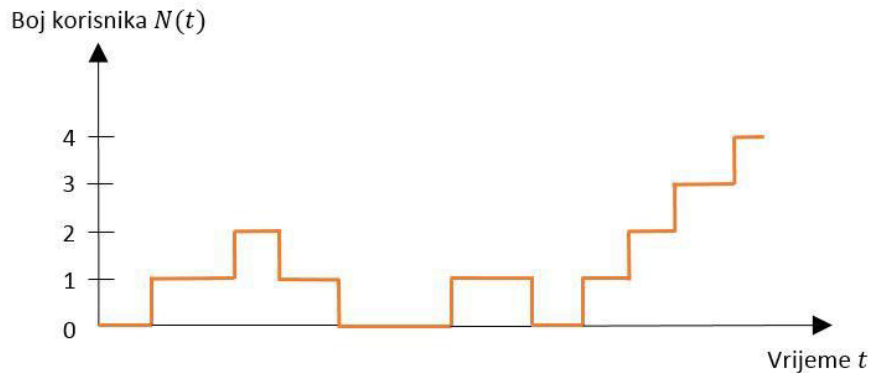
Pod procesima koji se baziraju na dolascima podrazumijevaju se pojave koje imaju „karakter“ dolaska, poput prijema poruka na prijemniku, dolaska kupaca na blagajnu itd. Ovdje su opisani modeli u kojima su međudolazna vremena (vremena između uzastopnih dolazaka) neovisne slučajne varijable. Bernoullijev proces razmatra slučajeve gdje se dolasci događaju u diskretnom vremenu, a međudolazna vremena su geometrijski raspoređena. Usporedno, Poissonov proces razmatra slučajeve gdje se dolasci događaju u kontinuiranom vremenu, a međudolazna vremena su eksponencijalno raspoređena. Primjenjuje se na situacije kada ne postoji „prirodan način“ dijeljenja vremena na diskretna razdoblja. Njihova usporedba dana je u tablici 4 [12].

Tablica 4. Usporedba Poissonovog i Bernoullijevog procesa

	POISSONOV PROCES	BERNOULLIEV PROCES
Vremena dolazaka	kontinuirana	diskretna
Funkcija vjerojatnosti za dolaske	poissonova	binomna
Međudolazna vremena (Funkcija razdiobe vjerojatnosti)	eksponencijalna	geometrijska
Intenzitet dolazaka	λ /jedinici vremena	p/po pokusu

Izvor: [12]

Stohastički (slučajni) proces $\{N(t), t \geq 0\}$ je brojidbeni proces (eng. *Counting Process*) ako $N(t)$ predstavlja broj „događaja“ koji se dogodio do vremena t . Ako je $N(t)$ jednako broju korisnika koji je ušao u npr. poštanski ured do vremena t , tada je brojidbeni proces u kome jedan događaj odgovara jednoj osobi koja je ušla u poštanski ured. Promjena broja korisnika u sustavu (koji čekaju ili su kod poslužitelja) tijekom vremena modelira se pomoću poznavanja slučajnih procesa. Grafički prikaz promjene ili evolucije broja korisnika u sustavu može se vidjeti na slici 4.



Slika 4. Promjena broja korisnika u sustavu

Brojdbeni proces se pod određenim uvjetima može smatrati Poissonovim slučajnim procesom s brzinom odvijanja λ . Poissonov SP javlja se u velikom broju primjena i ima važnu ulogu u podvorbenim sustavima. Zakonitosti ovog procesa koriste se pri izvodu funkcije vjerojatnosti za $M/M/1$ sustav posluživanja. A. K. Erlang je u svojim značajanim radovima pokazao da se pozivi na telefonsku centralu raspodjeljuju nasumično i slijede Poissonovu razdiobu. U komunikacijskim mrežama, dolasci paketa podataka i pojava poziva matematički se modeliraju kao točkasti procesi kao što je Poissonov proces [7]. Poissonova razdioba nastaje u vezi s Poissonovim procesom. Primjenjuje se na razne pojave koje imaju diskretna svojstva (tj. koje se mogu dogoditi 0, 1, 2, 3, ... puta tijekom određenog vremenskog razdoblja ili na određenom području) kad god je vjerojatnost pojave konstantna u vremenu ili prostoru. Još jedan primjer ove razdiobe je broj poziva koji pristižu u centralu u nekom vremenskom intervalu t . p_x daje vjerojatnost da unutar vremena t u centralu dođe točno x poziva. λ predstavlja očekivani broj realizacija određenog događaja u nekom promatranom vremenu. Zbog upotrebe Poissonova slučajnog procesa u rješavanju podvorbenih sustava potrebno je poznavati njegova svojstva [6]:

- Neka je $\{N(t), t \geq 0\}$ Poissonov SP s brzinom odvijanja λ i neka su

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n < \dots$$

susjedni trenutci u kojima se pojavljuju događaji. Ako međudolazna vremena $\{\tau_n\}$ definiraju na sljedeći način:

$$\tau_1 = t_1 - 0, \tau_2 = t_2 - t_1, \dots, \tau_k = t_k - t_{k-1}, \dots$$

Tada ovaj poučak izriče da „Međudolazna vremena τ_n su međusobno neovisne identično raspodijeljene eksponencijalne slučajne varijable s prosječnom vrijednošću $1/\lambda$ “.

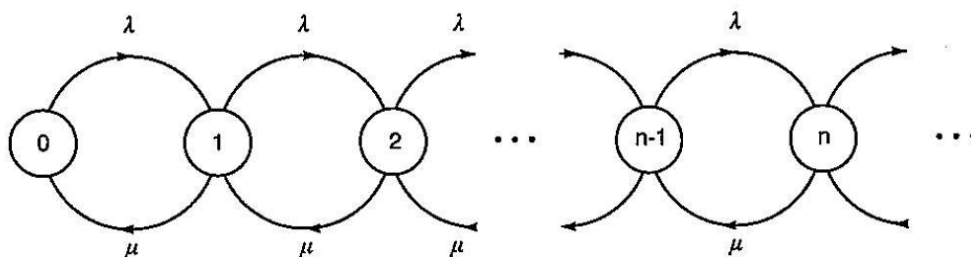
- Neka je $\{N(t); t \geq 0\}$ Poissonov SP i neka se u razdoblju $(0, t)$ pojavi samo jedan događaj. Ako se promatra SV $Y =$ „veličina (duljina) razdoblja do trenutka pojave (jednog) događaja“, Tada SV Y ima kontinuiranu jednoliku razdiobu unutar razdoblja $\tau_1 = (0, t]$.

3.2. M/M/1

Najjednostavniji poissonovski PS je $M/M/1/\infty/\infty/FCFS$ s eksponencijalnom funkcijom razdiobe međudolaznih vremena i trajanja posluživanja. Kod ovog modela nema gubitaka jer je moguć rep bez ograničenja („beskonačni rep“), a to znači da je obavljeni promet jednak pnuđenom: $a' = a = \rho = \rho$ [6]. Temeljna pretpostavka promatranog PS je međusobna neovisnost procesa posluživanja i procesa čekanja [6]. Simboli ovog PS ili modela predstavljaju sljedeće:

- $A(t) = 1 - e^{-\lambda t}$: Funkcija razdiobe međudolaznih vremena je eksponencijalna.
- $B(t) = 1 - e^{-\mu t}$: Funkcija razdiobe trajanja posluživanja je eksponencijalna.
- $c = 1$: Poslužiteljsko mjesto ima jednog poslužitelja.
- $K_q = \infty$: U sustavu ima mjesta za beskonačno korisnika. Tj. kapacitet PS je neograničen. Ovo je primjer PS-a bez gubitaka, jer svaki korisnik koji dolazi pred PS ima svoje mjesto u spremniku tj. u redu.
- $K_i = \infty$: Izvorište nema ograničenja.
- $FCFS$: Podvorbena stega je takva da je pravilo izlaska iz repa poslužitelja prvi došao prvi poslužen (*First come first served*).

Stanje ovog sustava može se opisati s pomoću slučajnog procesa rađanja i umiranja (SP RIU). Dolazak korisnika u sustav je „rođenje“, a odlazak nakon posluživanja je „umiranje“. Dijagram stanja i prijelaza služi za dobivanje vjerojatnosti broja korisnika u sustavu i prikazan je na slici 6. Koristi se za predviđanje vjerojatnosti da se sustav nađe u nekom od stanja 1, 2, 3 itd. Te vjerojatnosti predstavljaju broj korisnika u sustavu (vjerojatnost da je 1, 2, 3... korisnika u sustavu).



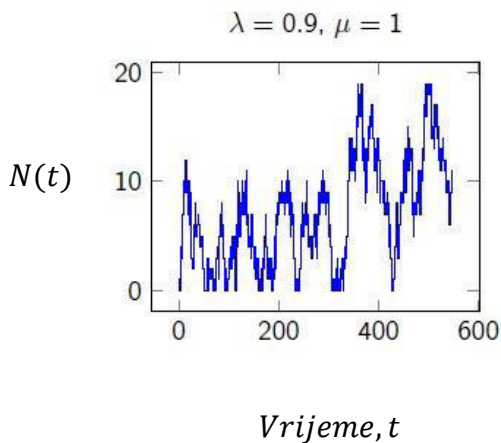
Slika 5. Dijagram prijelaza među stanjima za $M/M/1/\infty/\infty/FCFS$, [6]

Za ovaj model vjerojatnost broja korisnika u sustavu je geometrijska razdioba (FGV) i glasi [6]:

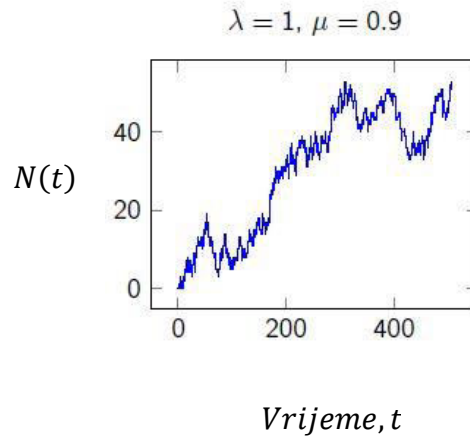
$$Q_n = P[n_q = n] = a^n (1 - a) \quad (35)$$

Taj izraz za funkciju gustoće vjerojatnosti geometrijske SV, tj. n_q ima geometrijsku razdiobu s $\rho = 1 - a$ i $q = a$. Q_n je funkcija gustoće vjerojatnosti stacionarnog stanja PS $M/M/1/\infty/\infty/FCFS$ [6]. Iz te vjerojatnosti moguće je kasnije izračunati ostala prometa mjerila.

Na grafikonima 1, 2 i 3 iz izvora [15] i [16] analizirana je stabilnost $M/M/1$ modela. Na grafikonu 1 i 2 prikazan je broj korisnika u sustavu $N(t)$ u vremenu ovisno o intenzitetu dolazaka, λ i posluživanja, μ . Na grafikonu 1 dan je prikaz slučaja kada je intenzitet dolazaka manji od intenzita (ili brzine) posluživanja, $\lambda < \mu$. Na grafikonu 2 je intenzitet ili brzina dolazaka veći ili jednak brzini posluživanja, $\lambda \geq \mu$. Može se vidjeti da je broj korisnika u sustavu na lijevom grafikonu ograničen, dok na desnom grafikonu broj korisnika ide u beskonačnost. Zato se za prvi slučaj (grafikon 1) kaže da ima stabilan red, a za drugi (grafikon 2) nestabilan red [15].

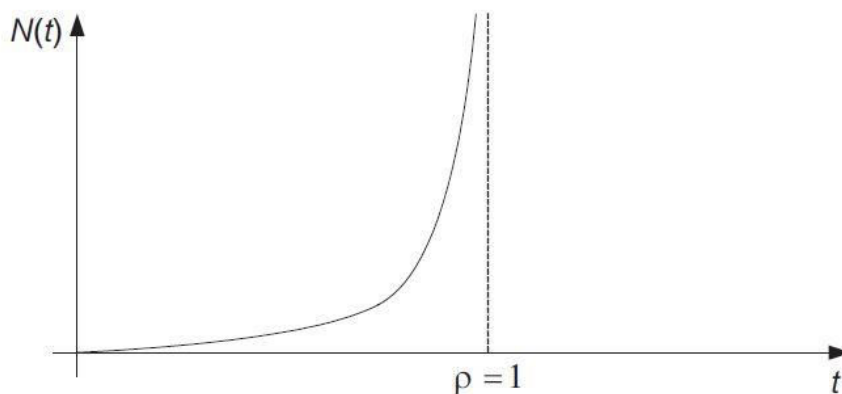


Grafikon 1. Stabilan red [15]



Grafikon 2. Nestabilan red [15]

Na grafikonu 3 prikazan je broj korisnika $N(t)$ u vremenu ovisno o prometnom opterećenju ρ . Može se vidjeti kako u slučaju kada je $\lambda > \mu$, prometno opterećenje, ρ je veće ili jednako jedan $\rho \geq 1$ i tada $N(t)$ teži u beskonačnost.



Grafikon 3. $M/M/1$ model za $\rho \rightarrow 1$ [16]

3.3. Izračun mjerila izvedbe

U rješavanju poissonovskih podvorbenih modela prvi korak je izračunavanje razdiobe stanja sustava, drugi izračunavanje onih mjerila izvedbe koja se izračunavaju s pomoću ove razdiobe (L_w, L_q, T_w, T_q), a treći izračunavanje razdioba vremena čekanja i boravka u sustavu te njihovih prosječnih vrijednosti. Mjerila izvedbe su izlazne veličine koje opisuju kvalitetu, zato ih se može nazvati i mjerila dobrote sustava [6].

Prosječan broj korisnika u sustavu, L_q , za model $M/M/1$ prema [6] je:

$$L_q = \sum_{n=0}^{\infty} n Q_n = \sum_{n=0}^{\infty} n (1-a) a^n = (1-a) \sum_{n=0}^{\infty} n a^n = (1-a) \cdot \frac{a}{(1-a)^2} = \frac{a}{1-a} \quad (36)$$

Prosječni broj korisnika u repu, L_w , jednak je razlici prosječnog broja korisnika u sustavu i ponuđenog prometa, a za ovaj model vrijedi izraz, [6]:

$$L_w = L_q - a = \frac{a^2}{1-a} \quad (37)$$

Oznake u navedene u izrazima za L_w, L_q imaju značenje koje je uvedeno u potpoglavljima 2.3. i 3.2.

Iz funkcije razdiobe vjerojatnosti vremena boravka u sustavu, $P[\tau_q \leq t]$, neposrednim izračunavanjem ili pomoću Laplaceove transformacije za T_q se dobije, [6]:

$$T_q = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (38)$$

Oznake u navedene u ovom izrazu imaju značenje koje je uvedeno u potpoglavljju 2.3. μ predstavlja intenzitet posluživanja, a λ intenzitet dolazaka.

Za izračunavanje vremena čekanja T_w , polazi se od razlike ukupnog vremena koje korisnik provede u sustavu i kod poslužitelja. S obzirom da je T_q (iz izraza koji vrijede uvijek) i T_s poznato, može se izračunati, [6]:

$$T_w = T_q - T_s = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{a}{\mu - \lambda} \quad (39)$$

Što se prema [6] može pisati i kao izraz (40), s tim da je prometno opterećenje, ρ već opisano u potpoglavljju 2.3.:

$$T_w = \frac{\rho \cdot T_s}{1 - \rho} \quad (40)$$

U ovom modelu nema gubitaka jer je moguć rep bez ograničenja („beskonačni rep“), a to znači da je obavljeni promet jednak ponuđenom: $a' = a = \rho = \rho'$ [6].

4. Ne-poissonovski prometni modeli

Poissonovski modeli su značajni za opisivanje prometa u mreži s komutacijom kanala. S druge strane koriste se i ne-poissonovski PS koji su značajni za opisivanje dolazaka paketa u Internet mreži (tj. mreži komutacijom paketa). Temeljni ne-poissonovski modeli su: M/G/1 i G/M/1. Njihova zajednička značajka je da proces posluživanja ili dolaska više nije Poissonov što znači da se u rješavanju tih modela ne može rabiti svojstvo zaboravljivosti eksponencijalne razdiobe. Trenutci prijelaza među stanjima ne čine Markovljev proces, jer ne ovise samo o sadašnjem nego i o prethodnim stanjima [6]. Dosadašnja istraživanja vezana uz analizu prometnog toka u komunikacijskim mrežama posebice u Internet mreži su pokazala da ne postoji jedinstveno stajalište o značajkama prometnog toka. Neki autori su pokazali da se proces dolazaka paketa i posluživanja može smatrati Poissonovim slučajnim procesima. Drugi su pak pokazali da međudolazna vremena između paketa i vremena posluživanja (veličina paketa) ne slijede eksponencijalnu razdiobu, već njihove razdiobe imaju svojstvo dugoročne ovisnosti. Za ove modele kao i kod Poissonovskih, da bi srednja duljina reda bila konačna, potrebno je da prometno opterećenje bude manje od jedan, $\rho < 1$, inače „poslovi“ stižu brže nego što napuštaju red čekanja. "Intenzitet prometa" kreće se između 0 i 1, i prosječni je dio vremena koje je poslužitelj zauzet. Ako je intenzitet dolaska, λ veći ili jednak intenzitetu posluživanja, μ čekanje u redu postaje beskonačno [6].

4.1. M/G/1

U teoriji podvorbenih sustava, M/G/1 je model čekanja gdje su dolasci Markovljevi, a vremena posluživanja imaju opću razdiobu i postoji jedan poslužitelj. Proces dolazaka je Poissonov SP s parametrom λ , a to znači da je broj dolazaka unutar promatranog razdoblja Poissonova SV i da je međudolazno vrijeme eksponencijalna SV. Proces posluživanja je neki opći SP s razdiobom bilo kojega oblika, što se izražava slovom G. Za opis te razdiobe dovoljno je poznavati matematičko očekivanje $E\{\tau_s\} = T_s = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f_s(t) dt$ i varijancu $Var\{\tau_s\} = \sigma_{\tau_s}^2$. Za dobivanje izlaznih veličina (prosječnih vrijednosti) za ovaj model koriste se Pollaczek-Hinčinove jednadžbe. U Pollaczek-Hinčinovim jednadžbama (42), (44), (45), se razdioba posluživanja predstavlja pomoću omjera σ_{τ_s} i T_s , tj. s pomoću koeficijenta varijacije, [6]:

$$V_{\tau_s} = \frac{\sigma_{\tau_s}}{T_s} \quad (41)$$

Koeficijent varijacije koristi se kao pokazatelj mjere „eksponencijalnosti“ [6]. Pollaczek-Hinčinove jednadžbe za prosječne vrijednosti navedene su u nastavku.

Za prosječan broj korisnika u sustavu, L_q , Pollaczek-Hinčin dobili su [6]:

$$\begin{aligned}
L_q = E\{n_q\} &= a + \frac{\lambda^2 \text{Var}\{\tau_s\} + a^2}{2(1-a)} = a + \frac{a^2}{2(1-a)} \cdot \left[1 + \left(\frac{\sigma_{\tau_s}}{T_s}\right)^2\right] = \\
&= a + \frac{(E\{n_a\})^2 + E\{n_{\tau_s}\}}{2(1-a)}
\end{aligned} \tag{42}$$

Prosječno vrijeme boravka u sustavu, T_q , može se dobiti iz izraza koji vrijede uvijek (tablica 3). S obzirom da je, T_s recipročna vrijednost intenziteta posluživanja, može se pisati, [6]:

$$\tau_q = \tau_w + \tau_s \rightarrow T_q = T_w + T_s = T_w + \frac{1}{\mu} \tag{43}$$

Kada se u Littleovu formulu za prosječno vrijeme boravka u sustavu, T_q , uvedenu u potpoglavlju 2.3.3. [6]:

$$T_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

uvrsti Pollaczek-Hinčinov izraz za L_q , onda je to isto Pollaczek-Hinčinova formula koja ovdje nije raspisana.

Prosječno vrijeme čekanja u repu, T_w , Pollaczek-Hinčin odredili su kao, [6]:

$$T_w = T_q - T_s = \frac{L_q}{\lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda^2 \cdot \text{Var}(\tau_s) + a^2}{2 \cdot \lambda \cdot (1-a)} = \frac{a \cdot T_s}{2 \cdot (1-a)} \cdot \left[1 + \left(\frac{\sigma_{\tau_s}}{T_s}\right)^2\right] \tag{44}$$

Prosječan broj korisnika u repu, L_w , je razlika prosječnog broja korisnika u sustavu L_q i prometnog ponuđenog prometa a . Prema Pollaczek-Hinčinu ovaj model izražava se kao [6]:

$$L_w = L_q - a = \frac{a^2}{2(1-a)} [1 + V_{\tau_s}^2] \tag{45}$$

4.2. G/M/1

Kod ovog modela međudolazna vremena su međusobno neovisne SV i sva imaju istu razdiobu s funkcijom $A(t)$. Trajanje posluživanja ima eksponencijalnu razdiobu što znači da slučajna varijabla $n_{s,i}$, koja predstavlja broj korisnika kod poslužitelja ovisi samo o duljini međudolaznog vremena i ne ovisi o količini posluživanja koju je dobio korisnik kojega je dolazeći korisnik zatekao kod poslužitelja. Na temelju postojanja stacionarnih i stalnih vjerojatnosti i Markovljevog lanca može se izračunati, Q_n rješenje skupa jednadžbi ima oblik, [6]:

$$Q_n = (1 - r_0) \cdot r_0^n; n \geq 0 \tag{46}$$

gdje je r_0 jedini korijen iznosa između nula i jedan jednadžbe: $z = A[\mu(1 - z)]$, gdje je [6]:

$$A(p) = \mathcal{L}\{a(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot a(t) dt \quad (47)$$

Laplaceov transformator funkcije gustoće vjerojatnosti međudolaznih vremena.

Izraz za Q_n je po obliku jednak istom izrazu za PS $M/M/1/\infty/\infty/FCFS$ s tim što je ponuđeni promet, a , zamijenjen korijenom r_0 . Stoga se po analogiji može ispisati izraze i za ostale značajke PS $G/M/1/\infty/\infty/FCFS$ zamijenivši u odgovarajućim izrazima za $M/M/1/\infty/\infty/FCFS$ ponuđeni promet, a , korijenom r_0 [6]. Međutim, radi kompleksnosti ovog izračuna, u praktičnom dijelu ovog rada (poglavlje 6) za računanje mjerila dobrote sustava korištena je Kingmanova formula (opisana u potpoglavlju 4.3. ispod).

4.3. G/G/1

U realnom svijetu često je potrebno rabiti složenije modele za koje je teško ili nemoguće dobiti eksplicitno rješenje. U takvim se slučajevima koriste druge metode, poput simulacija, numeričkih metoda itd. Jedan skup takvih metoda su nejednakosti i aproksimacije [6]. Za model $G/G/1/\infty/\infty/FCFS$ u stacionarnom stanju u Kingman (1962.), Marshall (1968.) i Marchal (1978.) dobili za T_w sljedeći izraz [6]:

$$\frac{\lambda^2 \cdot \sigma_s^2 + a(a - 2)}{2 \lambda (1 - a)} \leq T_w \leq \frac{\lambda (\sigma_a^2 + \sigma_s^2)}{2 (1 - a)} \quad (48)$$

gdje je:

$\sigma_a^2 \equiv$ varijanca međudolaznih vremena

$\sigma_s^2 \equiv$ varijanca trajanja posluživanja

$a \equiv$ ponuđeni promet

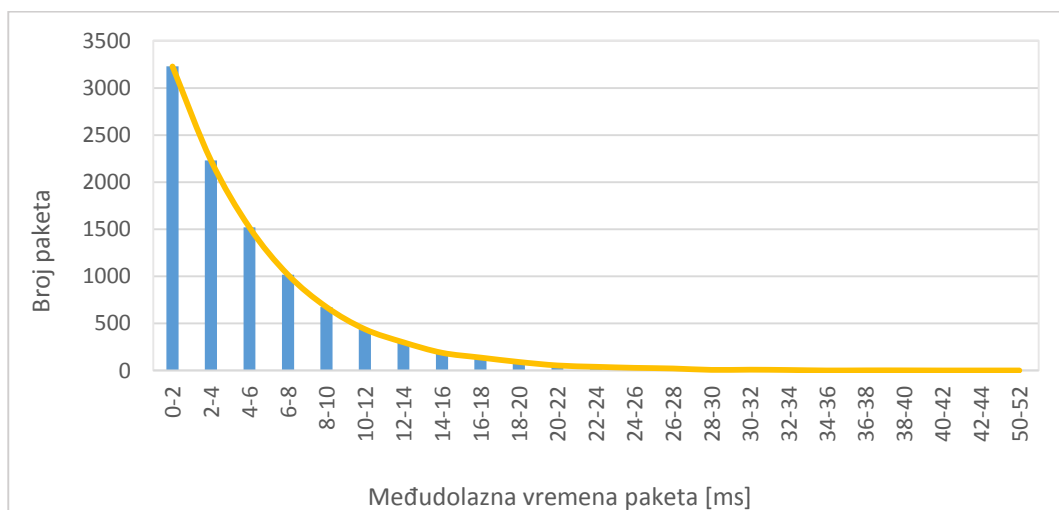
Ukoliko se za donju granicu čekanja dobivaju negativne vrijednosti, uzimaju se rezultati dobiveni za gornju granicu (ako je pozitivna). Ostale izlazne veličine za T_q , L_w i L_q , se mogu dobiti prema izrazima koje vrijede uvijek (tablica 3).

5. Određivanje mjera dobrote sustava primjenom Poissonovskih prometnih modela

U ovom poglavlju proučavani su jednoposlužiteljski poissonovski podvorbeni sustavi s beskonačnim izvorištem. Analizirana je simulacija za $M/M/1/\infty/\infty/FCFS$ model. Za potrebe praktičnog dijela ovog diplomskog rada koristio se generator slučajnih brojeva iz [17] kako bi se simuliralo 10 000 paketa⁴ čija se međudolazna vremena ravnaju po eksponencijalnoj razdiobi $A(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ i 10 000 paketa čija se vremena posluživanja, također, ravnaju po eksponencijalnoj razdiobi $B(t) = 1 - e^{-\mu t}$. Kako bi se dobilo stacionarno stanje, ponuđeni promet a , koji je za ovaj model jednak jakosti prometa i obavljenom prometu, postavljen je da bude manji od jedinice. U ovom modelu, kao što je već objašnjeno u poglavlju 3, vrijedi: da je prometno opterećenje jednako ponuđenom prometu $\rho = a$.

5.1. Simulacije za M/M/1 model

Na grafikonu 4 prikazana je funkcija gustoće vjerojatnosti međudolaznih vremena sa srednjom vrijednošću, $b \approx 5$ [ms]. Iz skupa ulaznih podataka dobije se da srednja vrijednost međudolaznih vremena iznosi točno 4,9668 [ms]. Vrijeme promatranja, tj. ukupno vrijeme trajanja simulacije koje jednako je sumi međudolaznih vremena, $\sum t_a$ iznosi 49673,4 [ms]. Iz toga se može odrediti prosječan intenzitet dolazaka, λ koji iznosi 0,20131 [paketa/ms]. Najveće međudolazno vrijeme između dva paketa iznosi 50,1 [ms].



Grafikon 4. Funkcija gustoće vjerojatnosti međudolaznih vremena (eksp. razdioba)

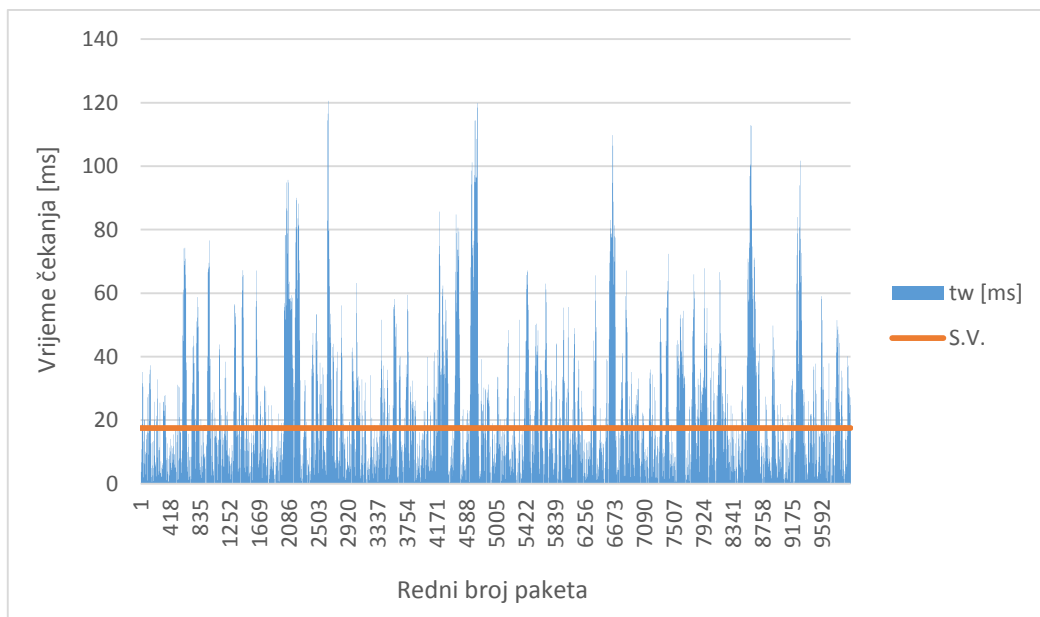
⁴ Bitno je napomenuti da mjerne jedinice za simulirana međudolazna vremena i vremena posluživanja mogu biti za bilo koju vrstu korisnika (paketi, bitovi, ljudi i sl.) te sukladno tome mogu biti opisane u satima, minutama, sekundama, milisekundama... Međutim, s obzirom da je područje istraživanja ovog rada paketno orijentirana mreža te će se korisnike zvati „paketi“ i bit će mjereni u milisekundama (ms).

Sa grafikona se može vidjeti da približno 3200 paketa ima međudolazna vremena u rasponu od 0-2 [ms]. Jedan paket ima najdulje međudolazno vrijeme od 50-52 [ms]. Približne vrijednosti mogu se vidjeti na grafikonu 4, a iz originalnog skupa podataka može se iščitati da točan broj paketa u vremenskom rasponu 0-2 [ms] iznosi 3228. S obzirom da su vremena posluživanja za jednaki broj paketa isto generirana po eksponencijalnoj razdiobi, nije prikazan njezin grafikon. Funkcija gustoće vjerojatnosti vremena posluživanja generirana je sa srednjom vrijednošću, $b \approx 4$ [ms]. Ova srednja vrijednost je manja od srednje vrijednosti međudolaznih vremena upravo iz razloga kako bi prometno opterećenje bilo manje od jedinice. Obje srednje vrijednosti su proizvoljno izabrane. Ukupno vrijeme posluživanja je 40556,8 [ms]. Iz čega se može izračunati prosječan intenzitet (ili brzina) posluživanja, μ koji iznosi 0,246568 [paketa/ms]. On se dobije tako da se podijeli ukupan broj paketa sa zbrojem ukupnog vremena posluživanja. Prosječno vrijeme boravka kod poslužitelja, T_s je 4,05568 [ms]. U tablici ispod prikazan je mali dio od ukupnog broja generiranih paketa (koji iznosi 10 000). Na temelju međudolaznih vremena, t_a i vremena posluživanja pojedinog paketa, t_s izračunate željene mjere (dobrote) sustava. U tablici 5 su prikazani još i izračunati trenutak dolaska i odlaska pojedinog korisnika tj. paketa iz sustava, vrijeme čekanja na posluživanje t_w te vrijeme boravka u sustavu, t_q za svaki pojedini paket. Sve izlazne veličine računale su se u programskom alatu MS Excel.

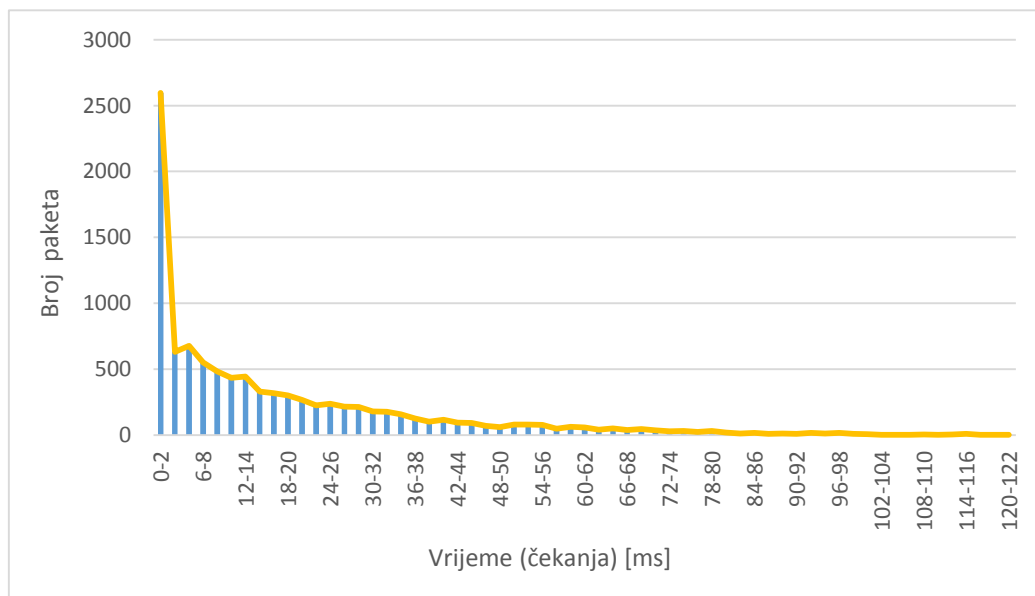
Tablica 5. Dio iz skupa vrijednosti za računanje vremena čekanja

t_a (exp) [ms]	t_s (exp) [ms]	t dolaska [ms]	t odlaska [ms]	t_w [ms]	t_q [ms]
3,3	2,1	3,3	5,4	0	2,1
5,4	2,8	8,7	11,5	0	2,8
4,1	0,3	12,8	13,1	0	0,3
3,4	1,9	16,2	18,1	0	1,9
4,9	5,9	21,1	27	0	5,9
8,9	0,2	30	30,2	0	0,2
2,1	1,8	32,1	33,9	0	1,8
20,2	7,6	52,3	59,9	0	7,6
3,9	8,6	56,2	68,5	3,7	12,3
1,4	1,3	57,6	69,8	10,9	12,2
8,7	0,7	66,3	70,5	3,5	4,2
0,7	0,6	67	71,1	3,5	4,1
1,4	1,3	68,4	72,4	2,7	4
1,4	4,3	69,8	76,7	2,6	6,9
0,2	1,7	70	78,4	6,7	8,4
3,8	2,6	73,8	81	4,6	7,2
1,5	0,5	75,3	81,5	5,7	6,2
1,4	7,4	76,7	88,9	4,8	12,2
3,3	15,5	80	104,4	8,9	24,4

Na grafikonu 5 prikazana su empirijska vremena čekanja, t_w za svaki pojedini paket. A na grafikonu 6 distribucija vremena čekanja, t_w za prvu simulaciju. Prema grafikonu 5 najdulje vrijeme čekanja iznosi 120,6 [ms]. Prosječno čekanje, T_w je 17,5294 [ms] i ta je vrijednost označena crvenom crtom na grafikonu. Skraćenica „S.V.“ na grafikonu predstavlja srednju vrijednost vremena čekanja na posluživanje. Na grafikonu 6 dan je pregledniji prikaz tako što su vremena čekanja podijeljena u razrede po dvije *milisekunde*. Vrijeme čekanja od 0-2 [ms] ima 2597 paketa, od 2-4 [ms] ima 630 paketa. Sa grafikona se vidi da dulja vremena čekanja ima mali broj paketa. 90-i percenat iznosi 46,72 što znači da 90% svih promatranih paketa čeka manje ili jednako 46,72 [ms],



Grafikon 5. Vremena čekanja paketa za t_a (eksp.) i t_s (eksp.)



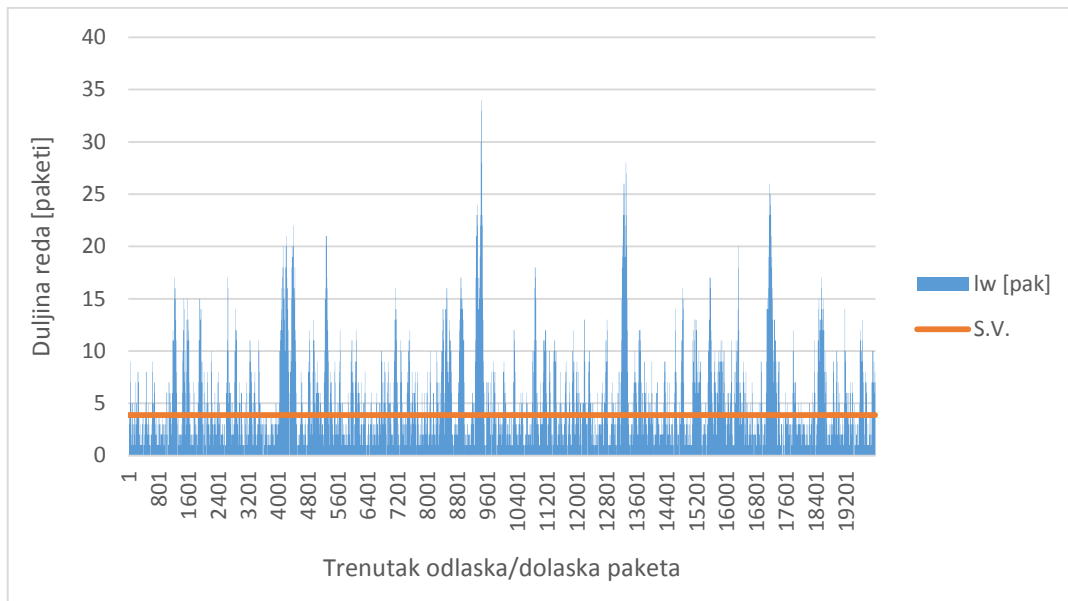
Grafikon 6. Distribucija vremena čekanja za t_a (eksp.) i t_s (eksp.)

Duljina reda za svaki pojedini paket izračunata je iz podataka od kojih je dio prikazan u tablici 6. Izračunat je i broj paketa u sustavu za svaki pojedini događaj (odlazak ili dolazak paketa), l_q , broj pojedinog paketa koji čeka u redu, l_w u trenutku događaja. Također je izračunato i vrijeme trajanja svakog reda, te vrijeme boravka svakog paketa u sustavu, t_q .

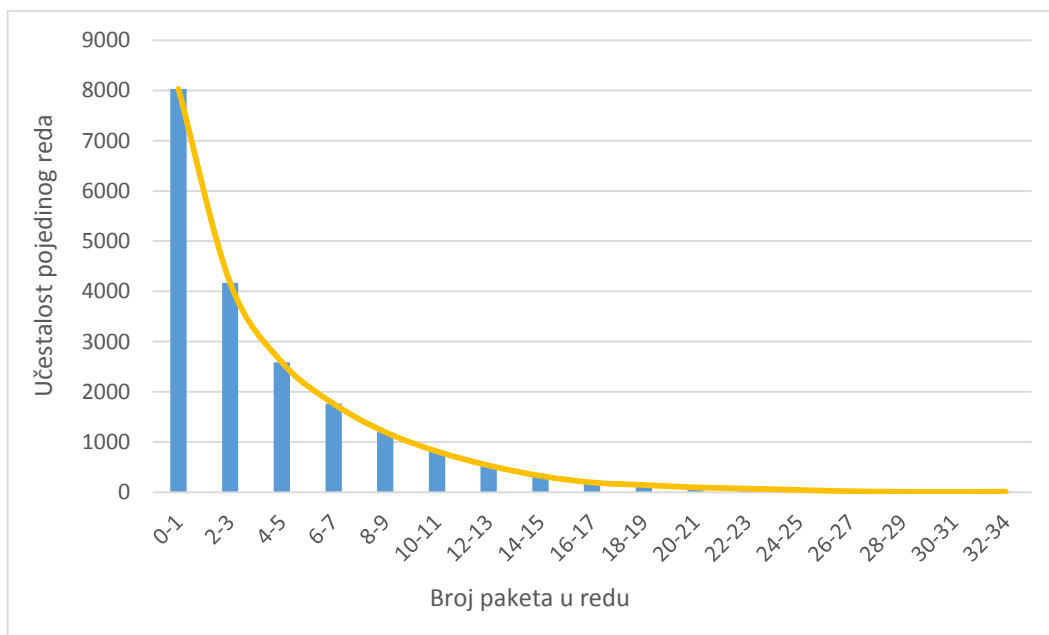
Tablica 6. Dio iz skupa podataka za računanje duljine reda

Događaj (odlazak/dolazak)	Pomoćna varijabla (1=dolazak; 0=odlazak)	Broj korisnika u sustavu (l_q)	l_w [pak] u trenutku događaja	Koliko dugo je trajao neki red	Koliko je dugo paket boravio u sustavu
3,3	1	1	0	0	2,1
5,4	0	0	0	0	0
8,7	1	1	0	0	2,8
11,5	0	0	0	0	0
12,8	1	1	0	0	0,3
13,1	0	0	0	0	0
16,2	1	1	0	0	1,9
18,1	0	0	0	0	0
21,1	1	1	0	0	5,9
27	0	0	0	0	0
30	1	1	0	0	0,2
30,2	0	0	0	0	0
32,1	1	1	0	0	1,8
33,9	0	0	0	0	0
52,3	1	1	0	0	3,9
56,2	1	2	1	1,4	2,8
57,6	1	3	2	4,6	6,9
59,9	0	2	1	6,4	12,8
66,3	1	3	2	1,4	2,1
67	1	4	3	4,2	5,6
68,4	1	5	4	0,4	0,5
68,5	0	4	3	3,9	5,2

Grafikon 7 se, također, odnosi na prvu simulaciju i prikazuje broj pojedinačnih paketa koji čekaju u redu, l_w . Najveći broj paketa koji čeka u redu je 34. Srednja vrijednost broja korisnika u redu, L_w je 3,86805 što prikazuje crvena crta na grafikonu. Grafikon 8 prikazuje distribuciju broja paketa koji čekaju u redu na posluživanje, dakle duljinu reda ili repa. Najučestaliji broj paketa koji čeka u redu je između 0-1 i tu duljinu reda ima 8031 paketa. Red od 2-3 paketa javlja se 4167 puta, od 4-5 paketa u redu za 2587 puta. Sa grafikona 8 je vidljivo da su veće duljine reda manje učestale. Tako primjerice, duljina reda od 28-29 paketa pojavljuje se 8 puta, od 30-31 samo 5 puta, te od 32-34 pojavljuje se 10 puta.



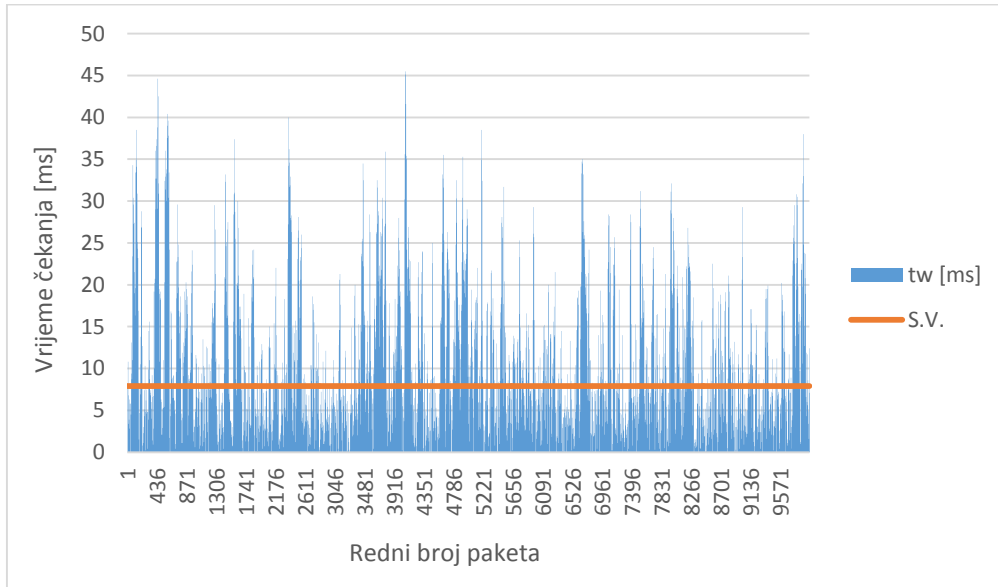
Grafikon 7. Duljina reda za t_a (eksp.) i t_s (eksp.)



Grafikon 8. Distribucija duljine reda za t_a (eksp.) i t_s (eksp.)

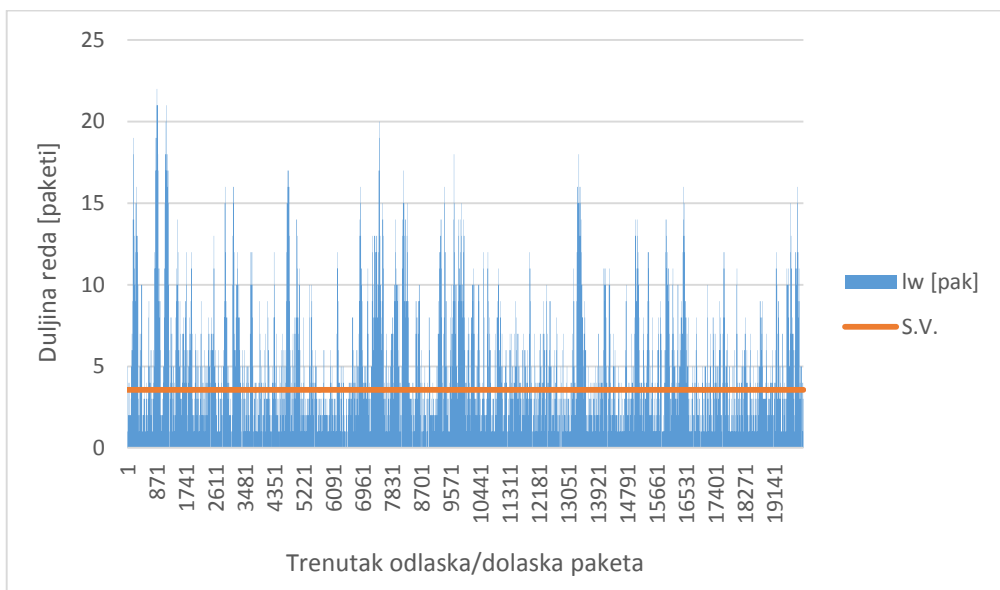
U drugoj provedenoj simulaciji obje korištene razdiobe su i dalje eksponencijalne. Promijenjene su ulazne vrijednosti za međudolazna vremena i vremena posluživanja, ali je zadržano približno isto prometno opterećenje kako bi se različite simulacije mogle uspoređivati. Prometno opterećenje, ρ iznosi 0,822596 [erlanga]. Za t_a srednja vrijednost iznosi, $b = 2,5$, a za t_s iznosi, $b = 2$. Vrijeme trajanja simulacije (ili vrijeme promatranja) je 24855,2 [ms]. Prosječan intenzitet dolazaka, λ iznosi 0,40233 [paketa/ms]. Najdulje međudolazno vrijeme između dva paketa je 20,8 [ms]. Prosječno vrijeme boravka u sustavu,

T_q iznosi 9,93628 [ms]. To vrijeme sastavljeno je od prosječnog čekanja, $T_w = 7,8917$ [ms] i prosječnog vremena provedenog kod poslužitelja, $T_s = 2,04458$ [ms]. Na grafikonu 9 prikazano je vrijeme čekanja za svaki paket. Najdulje vrijeme čekanja iznosi 45,5 [ms]. Nisu prikazani grafikoni distribucije vremena čekanja i duljine reda koji imaju iste oblike kao grafikoni 6 i 7.



Grafikon 9. Vremena čekanja za drugu simulaciju

Grafikon 10 prikazuje duljinu reda odnosno broj paketa koji čekaju u redu na posluživanje. Najveći broj paketa koji je čekao iznosi 22, a prosječan broj paketa u redu je 3,55265.



Grafikon 10. Duljina reda za drugu simulaciju

5.2. Usporedni rezultati

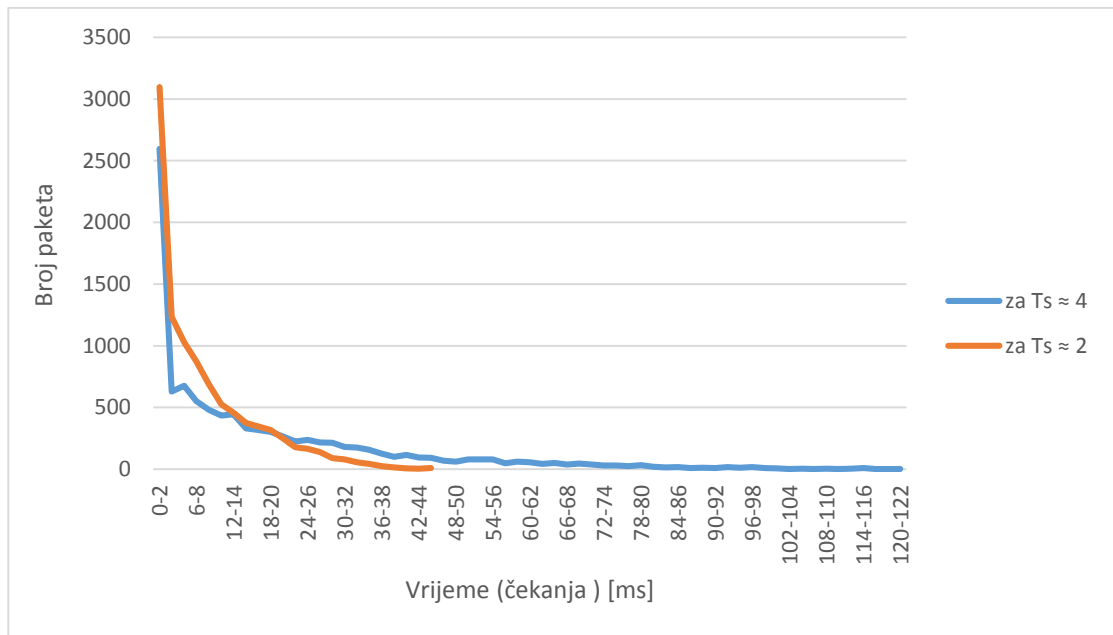
U tablicama 7 i 8 prikazani su usporedni rezultati izlaznih veličina koji su dobiveni empirijski i oni dobiveni korištenjem modela $M/M/1$. Odnosno izračunate su vrijednosti za prosječno čekanje, T_w prosječno vrijeme provedeno u sustavu, T_q prosječan broj paketa koji čekaju u redu (duljina reda), L_w i prosječan broj korisnika u sustavu, L_q . Te vrijednosti opisuju koliko je neki sustav „dobar“ u smislu poštivanja unaprijed definiranih mjerila. Stoga se nazivaju i mjerila dobrote sustava. Nazivaju se još i prometna mjerila ili mjerila izvedbe. Sve formule i veličine koju su korištene za ovaj model navedene su u poglavljima 2 i 3.

Kao što je već opisano u tekstu iznad, srednje vrijednosti međudolaznih vremena i vremena posluživanja proizvoljno su odabrane i u tablici su označene slovom b . Prometno opterećenje ρ je zadržano u istom omjeru kako bi se mogli uspoređivati navedeni rezultati. Ova simulacija pokazuje kako T_s utječe na čekanje. Za isti promet, ali kraće vrijeme posluživanja može se vidjeti kako je i prosječno vrijeme čekanja, T_w kraće. Iz tablice 7 vidi se da je za $T_s \approx 4$, prosječno čekanje je, $T_w \approx 18$, a za drugu simulaciju u kojoj je, $T_s \approx 2$, prosječno čekanje je, $T_w \approx 8$. Broj korisnika koji čekaju u redu, L_w je ostao približno isti s tim da je ipak nešto manji za drugu simulaciju. Vidljivo je da su empirijske vrijednosti i one dobivene putem modela gotovo iste što i potvrđuje ispravnost korištenog modela.

Tablica 7. Usporedba vrijednosti dobivenih empirijski i modelom $M/M/1$

	1. simulacija			2. simulacija			Mjerne jedinice
	Empirijski	$M/M/1$	σ	Empirijski	$M/M/1$	σ	
T_w	17,52944	18,042406	20,63873	7,8917	9,480445	8,396182	Tw - ms
T_q	21,58512	22,098086	21,08443	9,93628	11,52502	8,592262	Tq - ms
L_w	3,86805	3,6322069	4,569954	3,55265	3,81427	3,824804	Lw - paketa
L_q	4,7739	4,448676	4,658012	4,4627	4,636867	3,917921	Lq - paketa
T_s	4,05568		4,12615	2,04458		2,046117	Ts - ms
a	0,816469177			0,822596479			a - erl
ρ	82%			82%			
b	za ta b = 5, za ts b = 4			za ta b = 2,5, za ts b = 2			

Na grafikonu 11 vrijednosti vremena čekanja se bolje vide tako što je prikazana distribucija vremena čekanja za prvu simulaciju gdje je $T_s \approx 4$ [ms] i distribucija za drugu simulaciju, za koju je $T_s \approx 2$ [ms]. Za prvu simulaciju vrijeme čekanja od 0-2 [ms] ima 2597 paketa, dok za drugu 3096. Od 2-4 za prvu simulaciju ima 630 paketa dok za drugu simulaciju 1235. Zadnje dvije vrijednosti za 2 simulaciju su 42-44 koje ima 4 paketa dok za 1. simulaciju ima 95 pak, te 44-46 gdje za prvu simulaciju ima 8 pak dok za drugu 91 paket. Vrijeme od 46 – 122 nema niti jedan paket iz druge simulacije. Dok ih iz prve simulacije ima još 1034 paketa.



Grafikon 11. Usporedba distribucija vremena čekanja za 1. i 2. simulaciju

Provedene su još 3 simulacije gdje je srednja vrijednost međudolaznih vremena isto odabrana, $b = 5$ i srednja vrijednost za razdiobu vremena posluživanja $b = 4$, kako bi se potvrdila dosljednost modela. Ove vrijednosti su iste kao i u prvoj simulaciji. Prema tablici 8 vidljivo je da model vraća gotovo identične vrijednosti kao i empirijski izračun. Vrijednosti za standardno odstupanje podudaraju se sa mogućnošću razlike u vrijednostima izlaznih veličina vidljivih u tablicama. 90-i percentil vremena čekanja za sve modele gdje je $T_s \approx 4$ [ms] je 40, a u simulaciji gdje je $T_s \approx 2$ [ms] iznosi 20,4 [ms].

Tablica 8. Tri simulacije za M/M/1 model sa srednjim vrijednostima iz prve simulacija

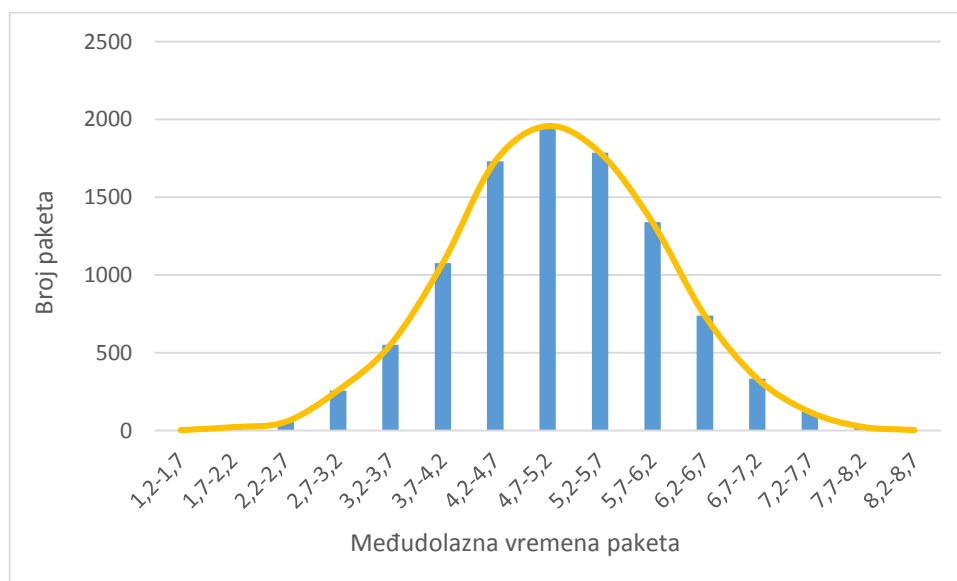
	<i>Empirijski</i>	<i>M/M/1</i>	σ	<i>Empirijski</i>	<i>M/M/1</i>	σ	<i>Empirijski</i>	<i>M/M/1</i>	σ
<i>Tw</i>	16,39979	16,61993	18,1956	16,14996	16,29052	18,4994	14,69365	14,34072	17,6028
<i>Tq</i>	20,41147	20,63161	18,5913	20,11446	20,25502	18,907	18,61092	18,25799	18,0325
<i>Lw</i>	3,7455	3,337329	4,18887	3,7175	3,304828	4,30415	3,3385	2,875448	3,97046
<i>Lq</i>	4,6527	4,142885	4,28089	4,6212	4,109099	4,39644	4,2338	3,660897	4,06907
<i>Ts</i>	4,01168		4,01613	3,9645		3,98776	3,91727		3,85467
<i>a</i>	0,805556615			0,80427078			0,785449041		
ρ	81%			80%			79%		
<i>b</i>	za ta b = 5, za ts b = 4								

6. Određivanje mjera dobrote sustava primjenom Ne-poissonovskih prometnih modela

U ovom poglavlju uspoređuju se mjere izvedbe za modele kod kojih barem jedna razdioba nije eksponencijalna. Takvi modeli nazivaju se ne ne-poissonovski podvorbjeni modeli. Kao i u prethodnom poglavlju simulirane su razdiobe međudolaznih vremena i vremena posluživanja za 10 000 paketa. Osim eksponencijalne, korištene su normalna i Pareto razdioba. Izlazne vrijednosti računate su iz empirijskih podataka i pomoću modela, opisanih u poglavlju 4. Na kraju ovog poglavlja dana je usporedba tih vrijednosti.

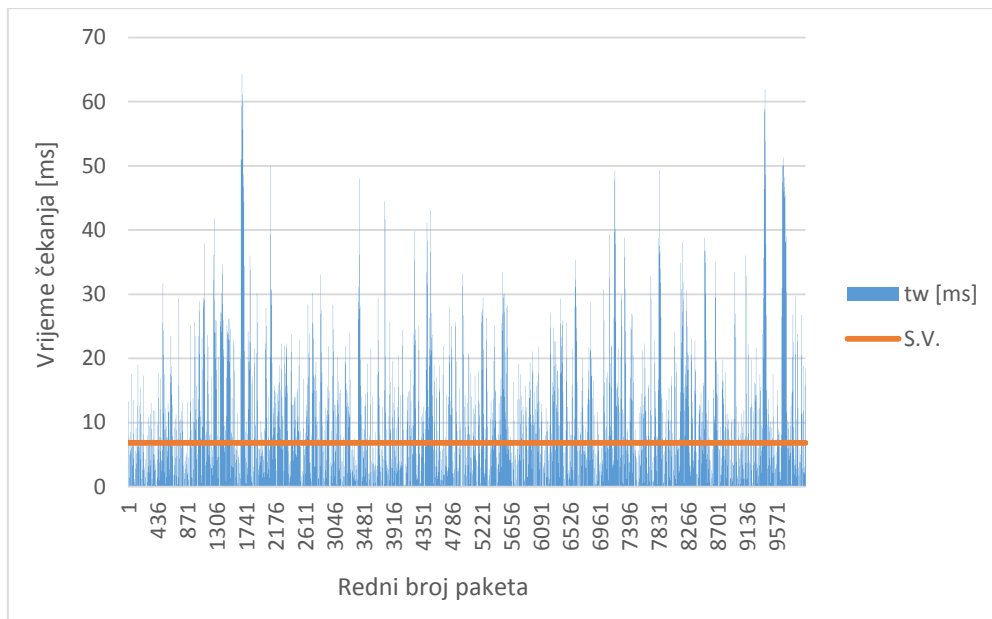
6.1. G/M/1 model s normalnom razdiobom međudolaznih vremena

Prva simulacija za ne-poissonovske modele provedena je za model $G/M/1$ gdje je za razdiobu međudolaznih vremena uzeta normalna ili Gaussova razdioba. Srednja vrijednost ove razdiobe uzeta je s parametrima $\mu = 5, \sigma = 1$, gdje je μ očekivanje, a σ predstavlja standardno odstupanje. Srednja vrijednost eksponencijalne razdiobe, b iznosi 5. Slovo M predstavlja eksponencijalnu razdiobu. Na grafikonu 12 prikazana je funkcija gustoće vjerojatnosti međudolaznih vremena. Na temelju zbroja ukupnog broja međudolaznih vremena podijeljenih sa 10 000 može se odrediti točna srednja vrijednost međudolaznih vremena, ona iznosi 4,9880 [ms]. Ukupno vrijeme trajanja simulacije iznosi 40235,5 [ms], a prosječan intenzitet dolazaka, λ iznosi 0,20048 [paketa/ms]. Najmanje međudolazno vrijeme između dva paketa iznosi 1,2, a najveće 8,3 [ms].

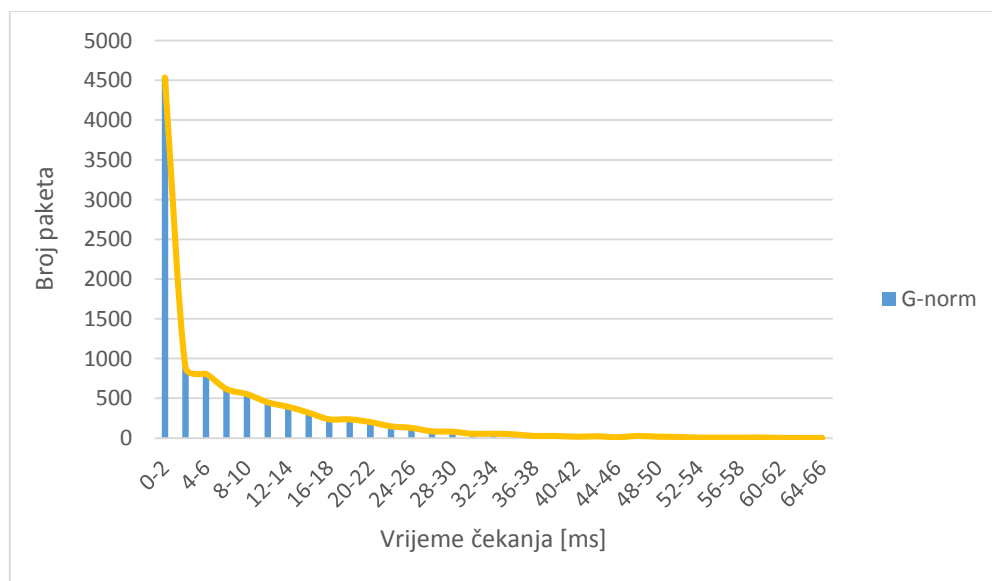


Grafikon 12. Funkcija gustoće vjerojatnosti međudolaznih vremena (normalna razdioba)

Prosječno vrijeme čekanja, T_w je 6,8207 [ms]. Najdulje vrijeme čekanja iznosi 64,3 [ms]. Standardno odstupanje vremena čekanja, σ je 9,3958. 90-i percentil iznosi 19,6 što ukazuje da 90% svih promatranih paketa čeka manje ili jednako 19,6 [ms]. Najviše paketa, njih 4534 ima vremena čekanja od 0 do 2 [ms], a to se može vidjeti na grafikonu 13 koji prikazuje distribuciju vremena čekanja. Vrijeme čekanja između 2 i 4 [ms] ima 894 paketa. Samo 3 paketa čekaju između 60 i 66 [ms].

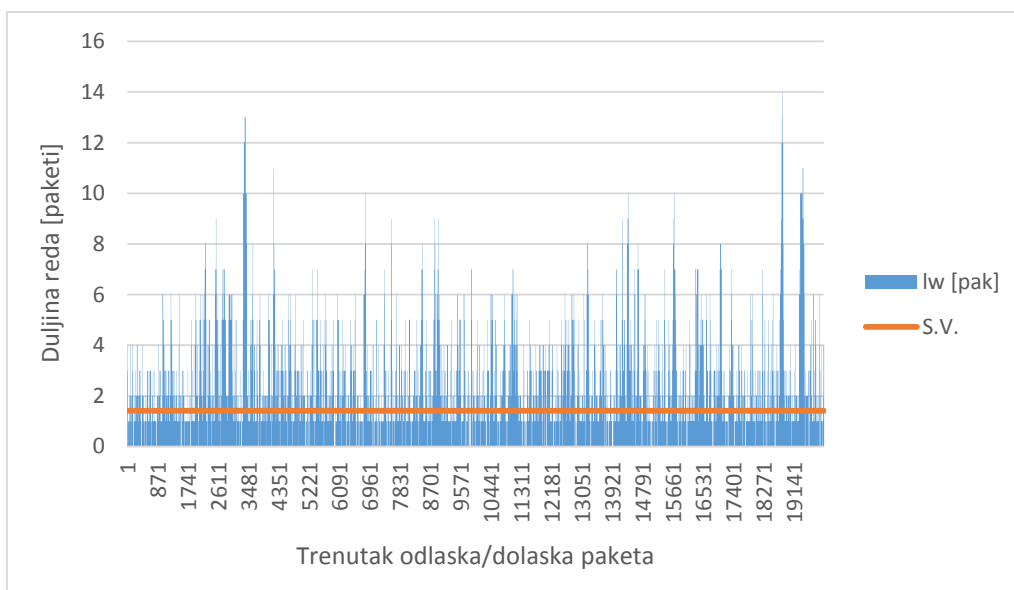


Grafikon 13. Vremena čekanja paketa za t_a (norm.) i t_s (eksp.)

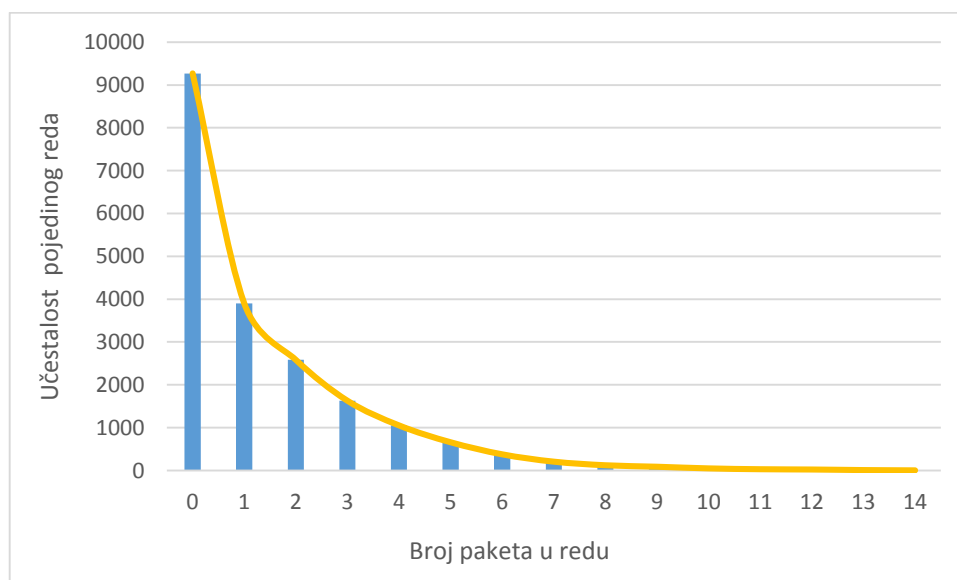


Grafikon 14. Distribucija vremena čekanja za t_a (norm.) i t_s (eksp.)

Prosječan broj paketa u redu, L_w iznosi 1,4097. Standardno odstupanje, σ je 1,93867. Najmanji broj paketa u redu je 0, što znači da nema čekanja i da je poslužitelj u trenutku dolaska i – *tog* paketa bio slobodan. Najveći broj paketa u redu iznosi 14 te s obzirom da se u ovom radu proćuavaju jednoposlužiteljski podvorbeni sustavi, može se zaključiti da je u tom trenutku bilo 15 paketa u sustavu, L_q (14 koji čekaju u redu i 1 kod poslužitelja). Te se takav red pojavio 3 puta. 90-i percentil duljine reda iznosi 4 i znači da u 90% slučajeva je broj paketa koju čekaju je bio manji ili jednak 4 [paketa]. Sa grafikona distribucije duljine reda, odnosno broja paketa koji čekaju može se vidjeti je za oko 9000 paketa red prazan u trenutku odlaska ka poslužitelju, odnosno dolaska novog paketa. U 3901 slučaj u redu je bio samo jedan paket.



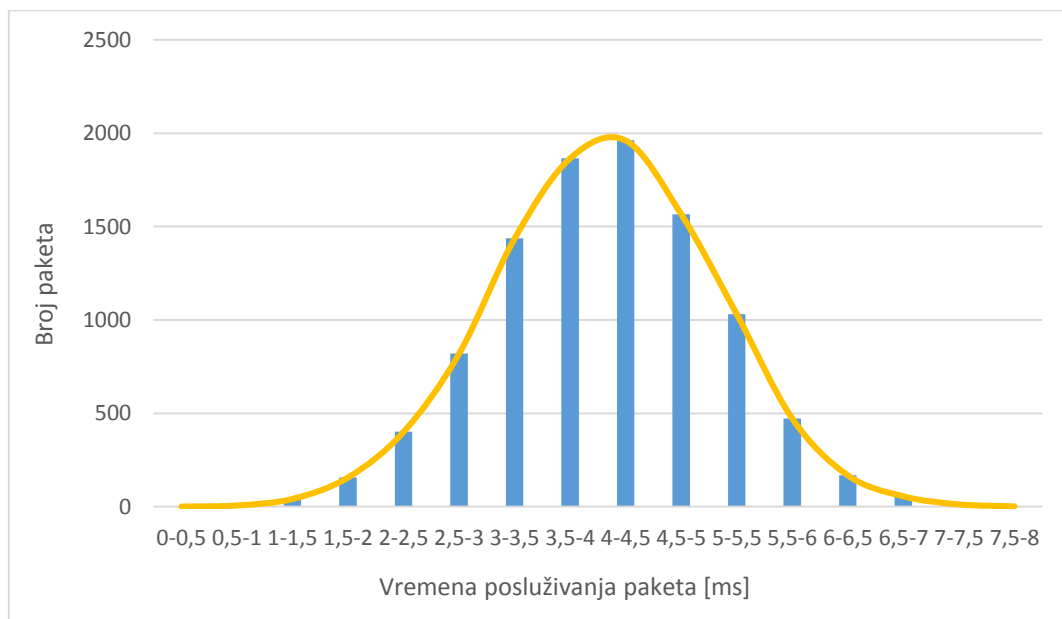
Grafikon 15. Duljina reda za t_a (norm.) i t_s (eksp.)



Grafikon 16. Distribucija duljine reda za t_a (norm.) i t_s (eksp.)

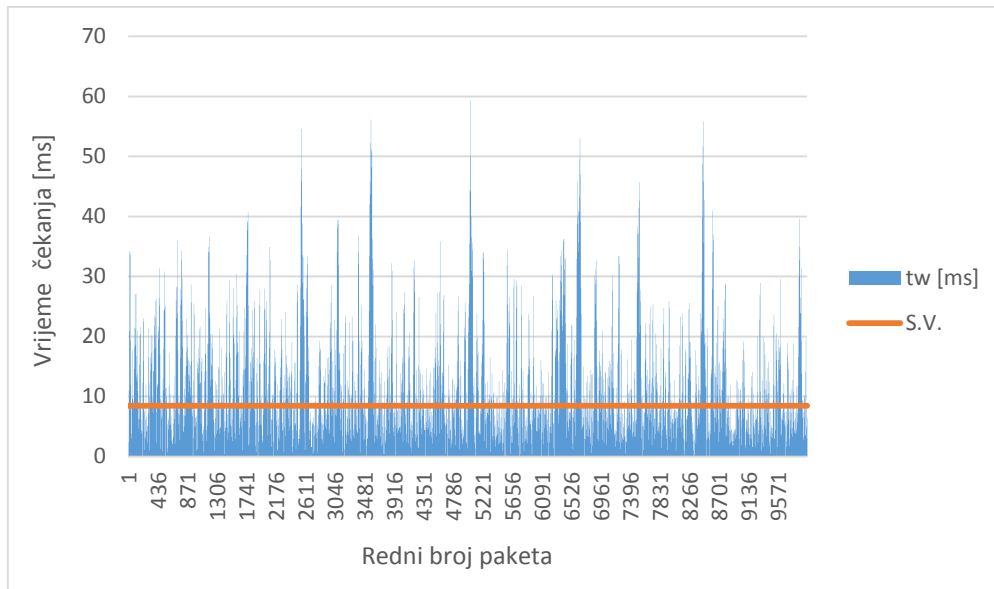
6.2. M/G/1 model s normalnom razdiobom vremena posluživanja

U ovoj simulaciji opisan je $M/G/1$ podvorbeni model gdje se vremena posluživanja ravnaju po normalnoj razdiobi. To znači da, u ovom slučaju, G predstavlja upravo tu razdiobu. Generirano je 10 000 paketa čija se međudolazna vremena ravnaju po eksponencijalnoj razdiobi sa srednjom vrijednošću, $b = 5$ i 10 000 paketa čija se vremena trajanja posluživanja ravnaju po normalnoj razdiobi sa parametrima srednje vrijednosti, $\mu = 4, \sigma = 1$. Prosječno vrijeme posluživanja i prosječeno međudolazno vrijeme su odabrani tako da bi se rezultati ovih modela mogli upoređivati s poissonovskim modelima. 1961 paketa ima vrijeme posluživanja između između 4 i 4,5 [ms]. 1866 paketa ima vrijeme posluživanja od 3 do 3,5 [ms], a 1566 između 4,5 i 5 [ms]. Na grafikonu 17 prikazana je funkcija distribucije vremena posluživanje za generirane pakete. Ukupno vrijeme trajanja simulacije jednako je, $\sum t_a = 49541,5$ [ms]. Prosječan intenzitet dolazaka, λ iznosi 0,20185 [paketa/ms]. Srednja vrijednost međudolaznih vremena iznosi 4,95415 [ms]. Najveće međudolazno vrijeme između dva paketa 42,8 [ms]. Prosječno vrijeme posluživanja, T_s je 4,0115 [ms] i prosječan intenzitet posluživanja, μ je prema tome jednak 0,249283 [paketa/ms].

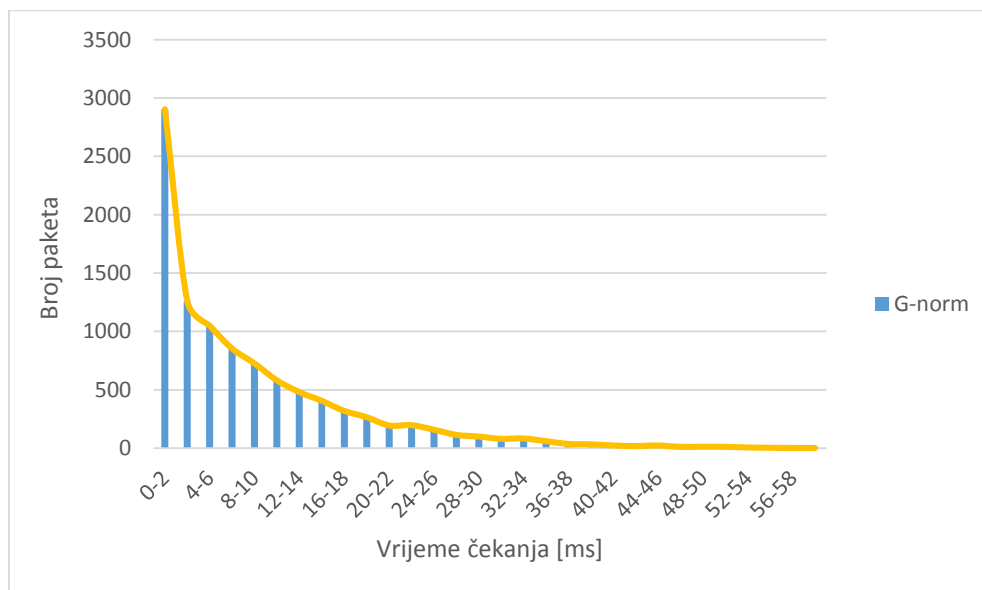


Grafikon 17. Funkcija gustoće vjerojatnosti trajanja posluživanja (normalna razdioba)

Prosječno vrijeme čekanja, T_w , je 8,46056 [ms]. Najdulje vrijeme čekanja je 59,3 [ms]. Standardno odstupanje vremena čekanja je 9,3440. 90-i percentil iznosi 21,7 što ukazuje da 90% svih promatranih paketa čeka manje ili jednako 21,7 [ms]. Najviše paketa, njih 2904 ima vremena čekanja od 0 do 2 [ms], to se može jasnije vidjeti na grafikonu 19 koji prikazuje distribuciju vremena čekanja na posluživanje. 1257 paketa ima vrijeme čekanja između 2 i 4 [ms]. Samo 1 paket čeka između 58-60 [ms].

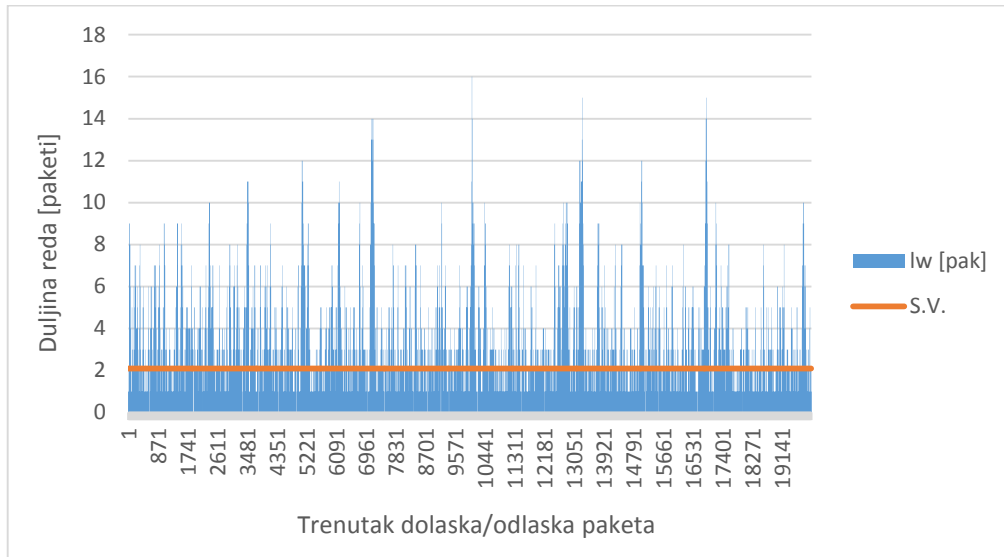


Grafikon 18. Vrijeme čekanja za t_a (eksp.) i t_s (norm.)

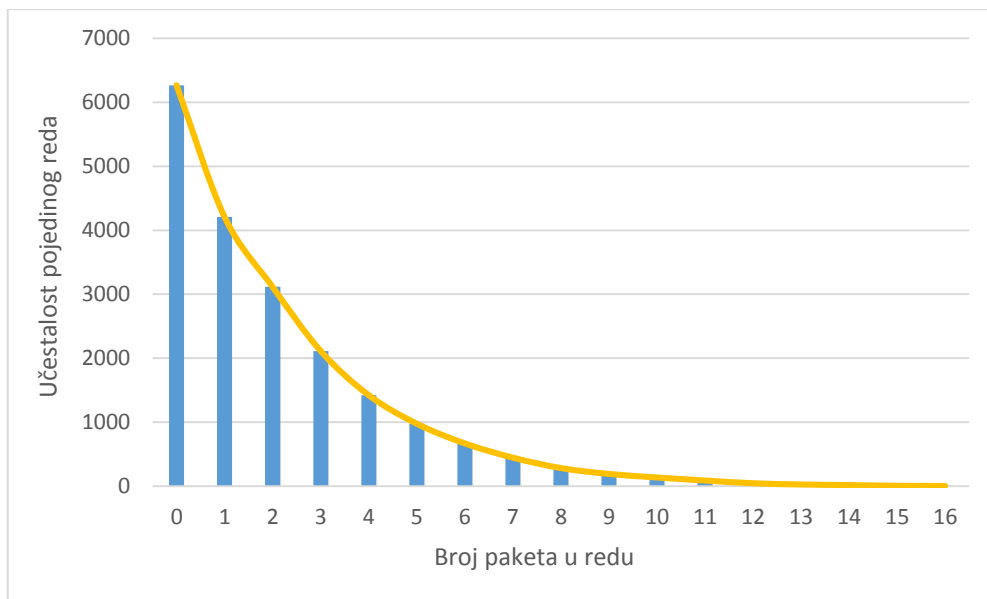


Grafikon 19. Distribucija vremena čekanja t_a (eksp.) i t_s (norm.)

Prosječan broj paketa u redu, L_w iznosi 2,0948. Standardno odstupanje, σ je 2,3799. Prema distribuciji duljine reda određene su sljedeće vrijednosti: red je bio prazan 6268 puta, duljina reda od 1 paketa pojavila se 4209 puta. Duljina reda od 15 paketa pojavila se 5 puta i red je bio najdulji kada je bilo 16 paketa na čekanju te se on pojavio samo jednom.



Grafikon 20. Duljina reda za t_a (eksp.) i t_s (norm.)

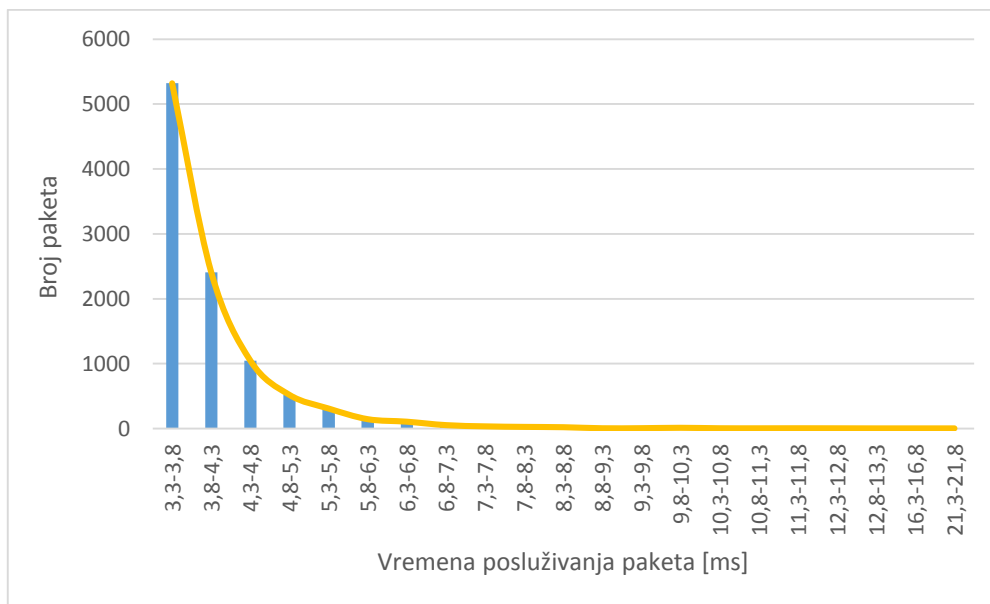


Grafikon 21. Distribucija duljine reda za t_a (eksp.) i t_s (norm.)

6.3. M/G/1 model s Pareto razdiobom vremena posluživanja

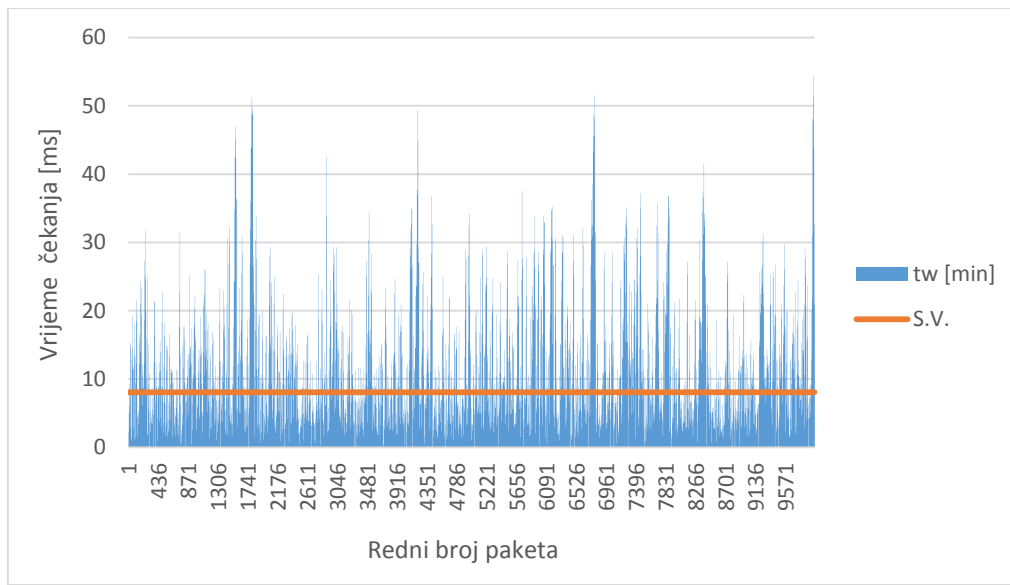
Ova simulacija napravljena je sa svim pretpostavkama kao i simulacija opisana u potpoglavlju 6.2, osim što su se za simuliranje vremena trajanja posluživanja koristila Pareto razdioba. Tako da u ovom modelu, $M/G/1$, oznaka G znači Pareto razdiobu. Uzeta je srednja vrijednost s parametrima $a = 5,7$ i $b = 3,3$. Pareto razdioba je slična eksponencijalnoj, osim što je veća vjerojatnost pojave duljih (većih) paketa. Ovu razdiobu prikazuje grafikon 22. Vremena posluživanja su grupirana u razrede veličine $0,5$ [ms]. 5321 paketa ima vrijeme posluživanja između između $3,3$ i $3,8$ [ms]. Već idući raspon vremena posluživanja od $3,8 - 4,3$ [ms] ima gotovo upola manje paketa, točnije 2407 paketa. Od $4,3-4,8$ [ms] ima 1045 paketa. Pa tako raspon vremena od $12,8-21,8$ ima samo 3 paketa.

Ukupno vrijeme trajanja simulacije jednako je iznosi $50295,8,5$ [ms], prosječan intenzitet dolazaka, λ je $0,19882$ [paketa/ms]. Srednja vrijednost međudolaznih vremena iznosi $5,02958$ [ms]. Najveće međudolazno vrijeme između dva paketa 50 [ms]. Prosječno vrijeme posluživanja, T_s je $4,0115$ [ms] i prosječan intenzitet posluživanja, μ je prema tome jednak $0,24903$ [paketa/ms].

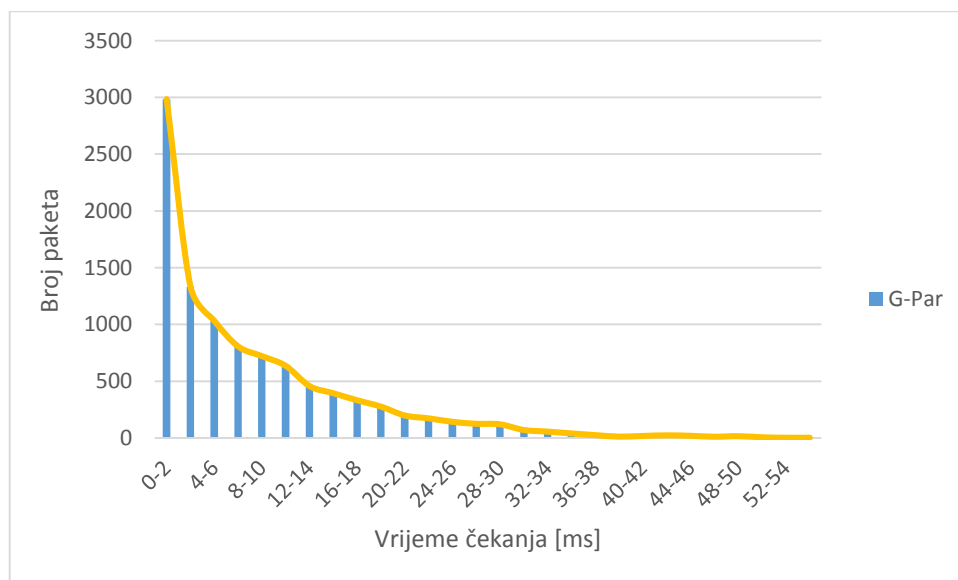


Grafikon 22. Funkcija gustoće vjerojatnosti vremena posluživanja (Pareto razdioba)

Prosječno vrijeme čekanja, T_w je 8,04917 [ms]. Najdulje vrijeme čekanja je 54,4[ms]. Standardno odstupanje vremena čekanja je 8,81806. 90-i percentil iznosi 20,3 što pokazuje da 90% svih promatranih paketa čeka manje ili jednako 20,3 [ms]. Najviše paketa, njih 2984 ima vremena čekanja od 0 do 2 [ms], to se može jasnije vidjeti na grafikonu 24 distribucije vremena čekanja. 1331 paketa ima vrijeme čekanja između 2 i 4 [ms]. Samo 1 paket čeka između 54-56 [ms].

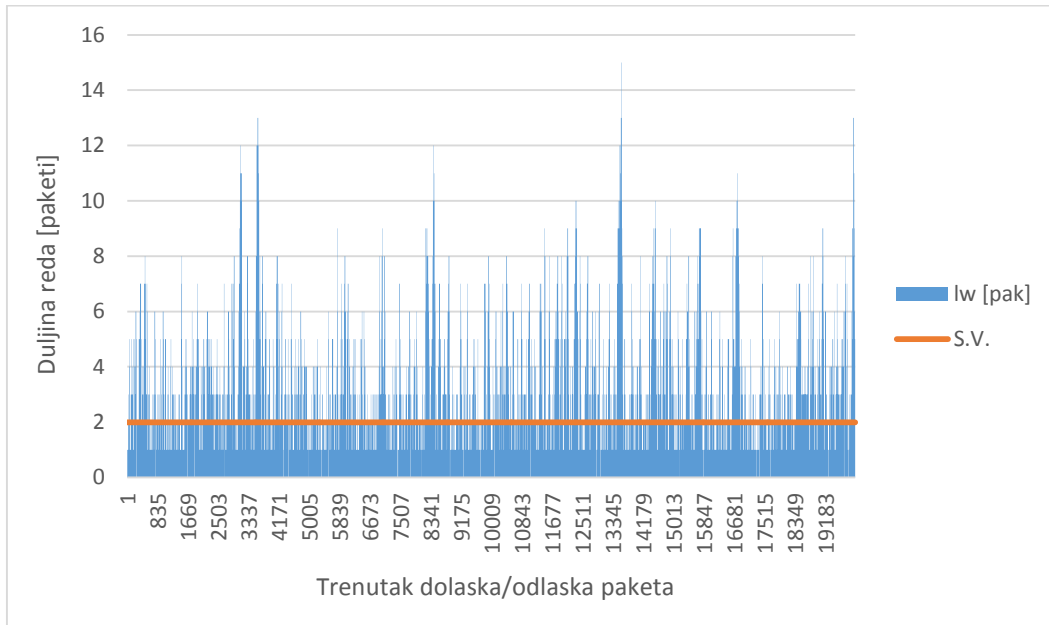


Grafikon 23. Vremena čekanja paketa za t_a (eksp.) i t_s (Par.)

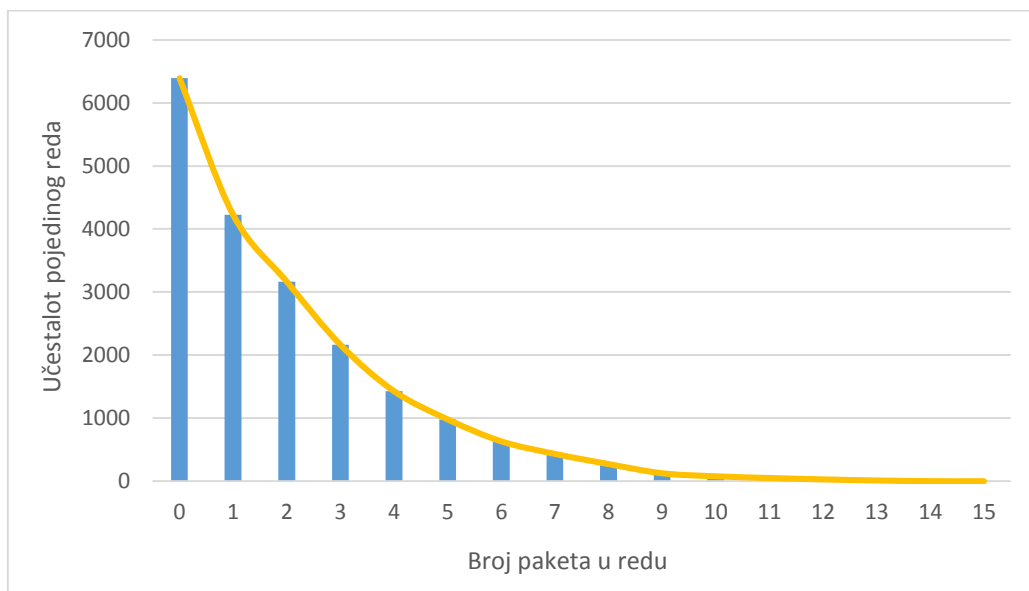


Grafikon 24. Distribucija vremena čekanja paketa za t_a (eksp.) i t_s (Par.)

Prosječan broj paketa u redu, L_w iznosi 1,9884. Standardno odstupanje, σ je 2,21168. Najveći broj paketa koji čeka u redu iznosi 15 kada je jedan korisnik došao u sustav te je njegovo vrijeme čekanja, t_w bilo 18 [ms], u sustavu je proveo t_q 19,2 [ms]. Prema distribuciji duljine reda vidljive na grafikonu 26 određene su sljedeće vrijednosti: 6392 puta nije bilo čekanja, odnosno red je bio 0. Duljina reda od 1 paketa pojavila se 4224 puta.



Grafikon 25. Duljina reda za t_a (eksp.) i t_s (Par.)

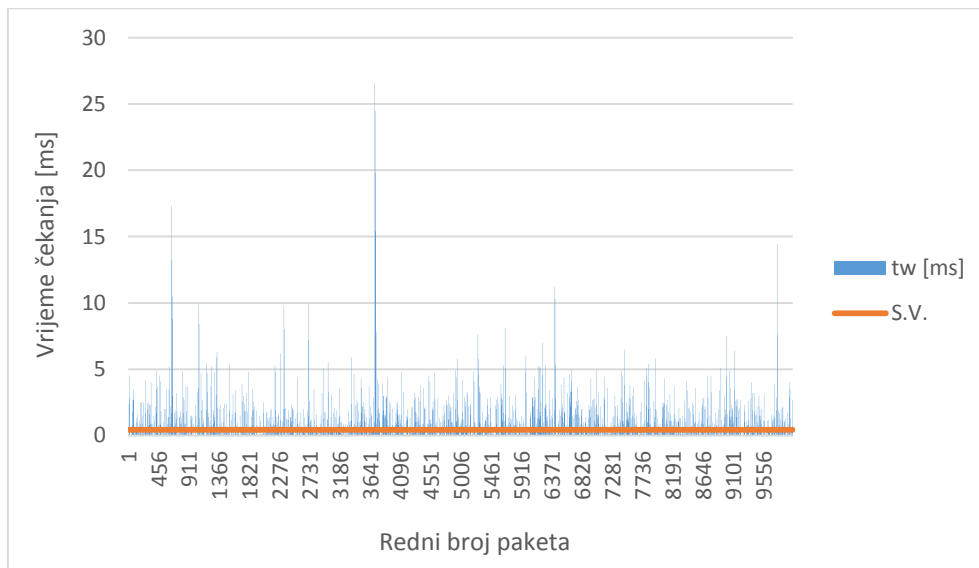


Grafikon 26. Distribucija duljine reda za t_a (eksp.) i t_s (Par.)

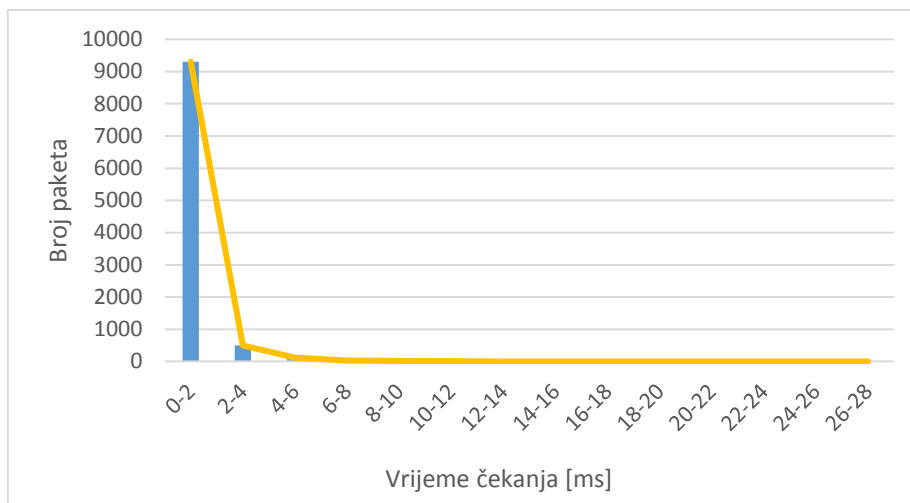
6.4. G/G/1 model s normalnom razdiobom međudolaznih vremena i Pareto razdiobom vremena posluživanja

U ovoj simulaciji međudolazna vremena za 10 000 paketa ravnaју se po normalnoj razdiobi s parametrima $\mu = 5, \sigma = 1$, a za vremena trajanja posluživanja simulirana su po Pareto razdiobi za 10 000 paketa sa srednjom vrijednošću 5,7 i $b = 3,3$. Ukupno vrijeme trajanja simulacije jednako je iznosi 49975,4 [ms], prosječan intenzitet dolazaka u, λ je 0,20009 [paketa/ms]. Srednja vrijednost međudolaznih vremena iznosi 4,99754[ms]. Najveće međudolazno vrijeme između dva paketa 9,2 [ms]. Prosječno vrijeme posluživanja, T_s je 4,0056 [ms] i prosječan intenzitet posluživanja, μ je jednak 0,24964 [paketa/ms].

Prosječno vrijeme čekanja, T_w je 0,44091[ms]. Najdulje vrijeme čekanja je 26,6 [ms]. Standardno odstupanje vremena čekanja je 1,3789. 90-i percentil iznosi 1,4, dakle 90% svih promatranih paketa čeka manje ili jednako 1,4 [ms]. Najviše paketa, njih 9301 ima vremena čekanja od 0 do 2 [ms], to se može jasnije vidjeti na grafikonu distribucije vremena čekanja 28. Vrijeme čekanja između 2 i 4 [ms] ima 500 paketa. Vrijeme čekanja između 4 i 6 [ms] ima 119 paketa. Samo 1 paket čeka između 26-28 [ms].

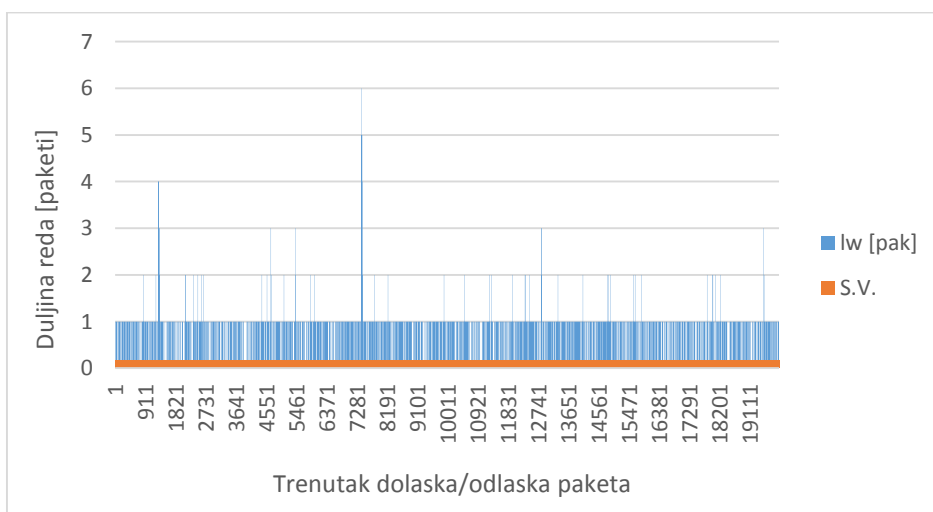


Grafikon 27. Vremena čekanja paketa za t_a (norm.) i t_s (Par.)



Grafikon 28. Distribucija vremena čekanja za t_a (norm.) i t_s (Par.)

Prosječan broj paketa u redu, L_w iznosi 0,16465. Standardno odstupanje, σ je 0,42276 . Najveći broj paketa koji čeka u redu je 6. Prema distribuciji duljine reda određene su sljedeće vrijednosti: 16964 puta je red bio prazan (nije bilo čekanja), 2878 puta duljinu reda je bila 1. Samo jednom stvorila se duljina reda od 6 paketa.



Grafikon 29. Duljina reda za t_a (norm.) i t_s (Par.)



Grafikon 30. Distribucija duljine reda za t_a (norm.) i t_s (Par.)

6.5. Usporedni rezultati modela

U ovom potpoglavlju dana je usporedba ne-poissonovskih modela te usporedba ne-poissonovskih modela s poissonovskim. Za određivanje mjerila izvedbe ne-poissonovskih podvorbenih modela korištene su formule iz poglavlja 2. i 4. U tablici 9 prikazane su mjere izvedbe za svaki model. Uz napomenu da oznake modela u tablicama nisu standardizirane. Odnosno, u literaturi nije nađen ovakav način obilježavanja modela. On je korišten radi preglednosti tablice i lakšeg razlikovanja modela. Svako slovo u modelu koje nije M, zapravo predstavlja neku opću razdiobu koja se označava slovom, G. Za svaki model određene su empirijske vrijednosti prosječnog vremena čekanja T_w , prosječnog vremena provedenog u sustavu T_q , prosječan broj paketa koji čekaju, L_w te prosječan broj paketa u sustavu, L_q i u tablici 10 izračunata su njihova standardna odstupanja, σ .

Postupak računanja G/M/1 modela svodi se na određivanje Laplaceovog transformatora gustoće vjerojatnosti međudolaznih vremena (ako je moguće) i nakon toga nalaženja korijena, r_0 . Međutim, u ovom radu je radi kompleksnosti tog izračuna, za računanje N/M/1 modela korištena Kingmanova formula (48). To je inače, poznata formula za aproksimaciju prosječnog vremena čekanja za G/G/1 model te se može primijeniti za bilo koje razdiobe. Prema tome, korištena je i pri određivanju T_w za N/P/1 model. U izračunima za M/N/1 i M/P/1 korištene su Pollaczek-Hinčinove jednadžbe iz potpoglavlja 4.1. na temelju kojih se radio izračun glavnih mjerila izvedbe. U tablici 9 se vidi kako su vrijednosti navedenih modela veoma blizu vrijednostima koje su dobivene empirijski. Prosječno vrijeme posluživanja po modelu iznosi oko 4 [ms], promet je oko 0,8 [erlanga], što ukazuje da je iskoristivost poslužitelja oko 80%. Ove vrijednosti su poštivane i kod poissonovskih modela.

Iz tablice 9 se može uočiti kako simulacija za N/P/1 model daje najmanje vrijeme čekanja, najmanji broj paketa koji čekaju i najmanji broj paketa u sustavu. U poglavlju 5 se vidjelo kako kraća vremena posluživanja utječu na vrijeme čekanja za isto prometno opterećenje kod poissonovskih sustava).

Tablica 9. Usporedba ne-poissonovskih modela

	Empirijski	N/M/1	Empirijski	M/N/1	Empirijski	M/P/1	Empirijski	N/P/1	Mj. jed.
<i>T_w</i>	6,82069	8,954798	8,46056	9,062199	8,04917	8,324987	0,44091	0,948877	ms
<i>T_q</i>	10,84424	12,97835	12,47206	13,0737	12,0647	12,34052	4,446533	4,9545	ms
<i>L_w</i>	1,4097	1,795265	1,707772	1,829214	1,600366	1,655205	0,088225	0,189869	paketa
<i>L_q</i>	2,2358	2,601909	2,9973	2,638939	2,8883	2,453589	0,8105	0,991388	paketa
<i>T_s</i>	4,02355		4,0115		4,015533		4,005623		ms
<i>a</i>	0,806644333		0,809725		0,798383		0,801518		Erl
<i>ρ</i>	81%		81%		80%		80%		
<i>b</i>	ta -> Norm (μ=5, σ=1) ts -> Exp, (b=4)		ta -> Exp (b = 5) ts -> Norm (μ=4, σ=1)		ta -> Exp (b = 5) ts -> Par (a=5.7, b=3.3)		ta -> Norm (μ=5, σ=1) ts -> Par (a=5.7, b=3.3)		

Tablica 10. Standardna odstupanja za ne-poissonovske moele

Standardno odstupanje (σ) [empirijski]				
	N/M/1	M/N/1	M/P/1	N/P/1
<i>Z_a T_s</i>	4,03531	0,99641	0,87141	0,93400
<i>Z_a T_w</i>	9,39580	9,34402	8,81806	1,37899
<i>Z_a T_q</i>	10,16336	9,37665	8,86955	1,66037
<i>Z_a L_w</i>	1,93867	2,37986	2,21169	0,42278
<i>Z_a L_q</i>	2,09580	2,48197	2,31942	0,72394

Ako se ove vrijednosti mjerila izvedbe usporede s Poissonovskim može se uočiti da su sve vrijednosti skoro duplo manje kod ne-poissonovskih modela. Ako se gleda statistička mjera 90-i percentil, može se primijetiti da u 90% slučajeva u ove tri simulacije čekanje manje ili jednako približno 20 [ms], a kod poissonovskog preko 40 [ms].

Tablica 11. Percentil za T_w prema simulacijama

	Za $T_s \approx 4$				Za $T_s \approx 2$
Percentil za T_w /Poisson. - po simulaciji	46,72	43,01	43,3	40,5	20,4
Percentil za T_w /Nepoisson. - po simulaciji	19,6	21,7	20,3	1,4	-

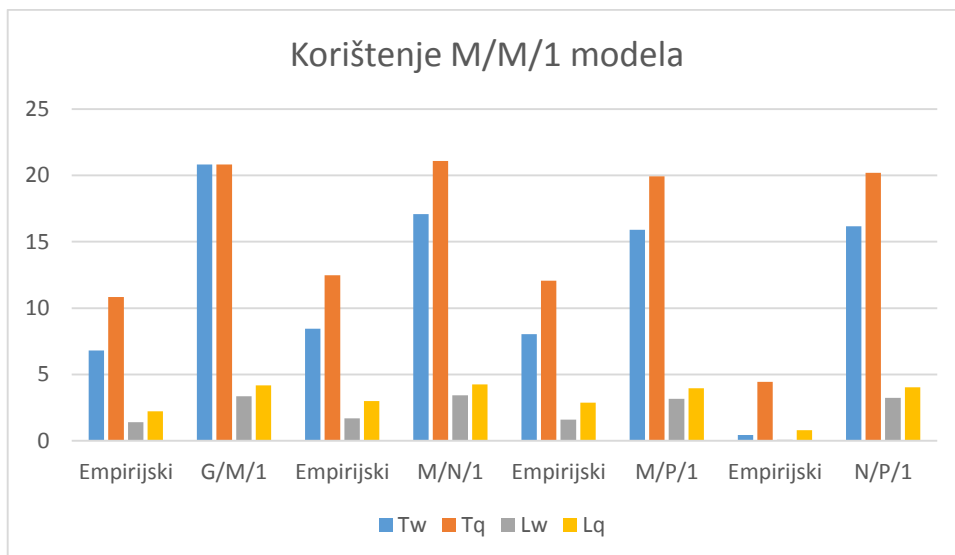
7. Određivanje veličine pogreške zanemarivanjem značajki prometnog toka

U ovom poglavlju analizirana je veličina pogreške pri određivanju mjera dobrote sustava zanemarivanjem značajki prometnog toka. Za sustave koji nisu poissonovski korišten je poissonovski model za računanje mjerila izvedbe. U tablici 12 dana je usporedba stvarnih vrijednosti i onih dobivenih korištenjem $M/M/1$ modela za skup podataka koji je uzet iz provedenih simulacija koje su opisane u poglavlju 6. Vidljivo je da su odstupanja puno veća nego ona iz prethodnog poglavlja 6 u kojima se koristio pripadajući ne-poissonovski model. Izrazi za T_w i L_w koji su navedeni u 3. poglavlju pretpostavljaju da se vrijeme posluživanja i međudolazna vremena opisuju eksponencijalnom razdiobom. U prikazanoj tablici vidljivo je da su odstupanja za T_w i ostala mjerila znatna ako se vrijeme posluživanja ili međudolazna vremena zapravo opisuje nekom drugom razdiobom (normalnom ili Pareto). U tablici 12 korištene su oznake za nepoissonovske modele: $N/M/1$, $M/N/1$, $M/P/1$, $N/P/1$. U oznakama su naznačene razdiobe (uvedene u poglavlju 2.4.) međudolaznih vremena i vremena posluživanja. Za navedene ne-poissonovske sustave pri izračunu mjera izvedbe, navedenih u tablici 9, korištene su formule za $M/M/1$ model.

Tablica 12. Odstupanja prilikom zanemarivanja značajki prometnog toka

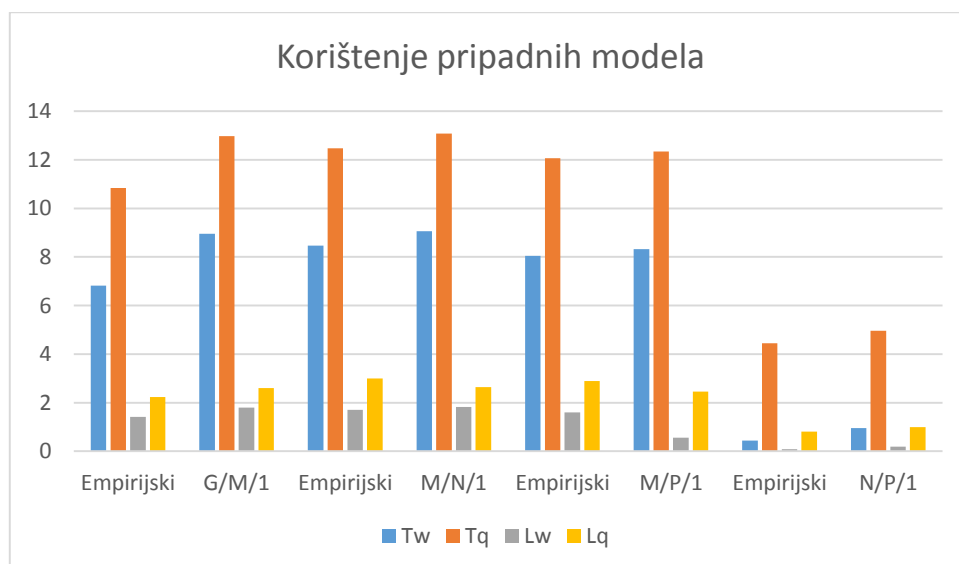
Sve kombinacije prema podacima iz navedenih modela računata su s modelom $M/M/1$									
	Empirijski	$N/M/1$	Empirijski	$M/N/1$	Empirijski	$M/P/1$	Empirijski	$N/P/1$	Mj. jed.
T_w	6,82069	20,80906	8,46056	17,07116	8,04917	15,90114	0,44091	16,17576	ms
T_q	10,84424	20,80906	12,47206	21,08266	12,0647	19,91667	4,446533	20,18139	ms
L_w	1,4097	3,365172	1,707772	3,445831	1,600366	3,161525	0,088225	3,236745	paketa
L_q	2,2358	4,171816	2,9973	4,255556	2,8883	3,959908	0,8105	4,038264	paketa
T_s	4,02355		4,0115		4,015533		4,005623		ms
a	0,8066443		0,809725		0,798383		0,801518		Erl
ρ	81%		81%		80%		80%		
b	ta -> Norm ($\mu=5$, $\sigma=1$) ts -> Exp, (b=4)		ta -> Exp (b = 5) ts -> Norm ($\mu=4$, $\sigma=1$)		ta -> Exp (b = 5) ts -> Par (a=5.7, b=3.3)		ta -> Norm ($\mu=5$, $\sigma=1$) ts -> Par (a=5.7, b=3.3)		

Grafikon 31 je izrađen prema tablici 12 i iz njega je vidljivo kako izračunata prometna mjerila T_w , T_q , L_w i L_q podosta odstupaju od stvarnih odnosno empirijskih vrijednosti ako se zanemare značajke prometnog toka i pri izračunu koristi $M/M/1$ (odnosno formule opisane u poglavlju 3).



Grafikon 31. Usporedba veličine odstupanja

Dok je grafikon 32 izrađen na temelju tablice 9 iz potpoglavlja 6.5. (znači da su korištene formule za ne-poissonovske modele iz poglavlja 4). Tu su poštivane razdiobe prometnog toka te je vidljivo da se sve izlazne veličine podudaraju sa stvarnim vrijednostima koje su određene neovisno o modelu. To dokazuje mogućnost i ispravnost korištenja pripadnih ne-poissonovskih modela i nemogućnost korištenja poissonovskog $M/M/1$ modela, jer ne daje točne vrijednosti



Grafikon 32. Usporedni prikaz vrijednosti dobivenih empirijski i pomoću modela za ne-poissonovske prometne modele

8. ZAKLJUČAK

Prometni modeli koriste se radi postizanja zahtijevane razine kvalitete usluge u višeuslužnim mrežama. Različite aplikacije (npr. govorne, video, podatkovne) imaju različite (QoS) zahtjeve mrežnih performansi. Oni uključuju primjerice potrebnu širinu pojasa, dozvoljeni gubitak paketa, prihvatljivo kašnjenje i varijacije kašnjenja. Odgovarajućim modeliranjem moguće je unaprijed predvidjeti mjerila dobrote tj. izvedbe sustava poput npr. duljine reda (repa), vremena trajanja reda i vremena boravka u sustavu. S obzirom da su ove pojave odnosno procesi slučajnog karaktera, nije moguće točno odrediti sve željene vrijednosti, ali je moguće dati njihove vjerojatnosti. Upravo iz tih razloga razvijeni su modeli kojima se omogućuje predviđanje ponašanja nekog sustava.

U radu su objašnjeni Poissonovski i ne-Poissonovski podvorbeni modeli koji se koriste za analizu ponašanja podvorenog sustava. Značajke procesa dolazaka i procesa posluživanja određuju koji će se model koristiti za analizu podvorbenog sustava. Dosljednost jednoposlužiteljskih Poissonovskih i ne-Poissonovskih modela u ovom radu se potvrdila empirijskim izračunom. Prilikom određivanja mjerila dobrote sustava usporedbom više modela pazilo se na dvije stvari. Prvi preduvjet je da prometno opterećenje bude manje od jedan kako bi sustav ostao u stabilnom stanju. Isto tako, prometno opterećenje u svim modelima moralo je biti približno jednako kako bi se mogle načiniti usporedbe. Zaključci koji se ukazuju nakon izvedenih simulacija su sljedeći: prosječno vrijeme čekanja se smanjuje ako se smanji prosječno vrijeme posluživanja uz zadržano isto prometno opterećenje, ali to ne mora utjecati na broj korisnika koji čekaju u redu. Poissonovski modeli imaju vrijednost 90-og percentila veću od ne-Poissonovskih, uz uvjet da imaju isto prosječno vrijeme posluživanja. Odstupanja prosječnog vremena čekanja i drugih izlaznih veličina su znatna ako se vrijeme posluživanja ili međudolazna vremena opisuju razdiobom koja nije odgovarajuća, odnosno ako se zanemare značajke prometnog toka.

POPIS KRATICA

FCFS	(<i>First Come First Served</i>), disciplina posluživanja: „prvi došao prvi poslužen“
FGV	(funkcija gustoće vjerojatnosti), $f(X)$, (eng. <i>Probability mass function</i> , PMF)
FRV	(funkcija razdiobe vjerojatnosti), $F(x)$, (eng. <i>Cumulative distribution function</i> , CDF)
MP	(Markovljev proces)
OSI	(<i>Open Systems Interconnection model</i>), referentni model za prikaz tk. i računalne mreže
PS	(podvorbeni sustav)
PS	(Poissonov proces)
P.S	(podvorbena stega)
SLA	(<i>Service Level Agreement</i>), ugovor o razini usluge
SP	(slučajni proces)
SP RIU	(slučajni proces rađanja i umiranja)
SV	(slučajna varijabla)
S.V.	(srednja vrijednost)
TPS	(teorija podvorbenih sustava)
VoIP	(<i>Voice over Internet Protocol</i>)

POPIS LITERATURE

- [1] Giambene G. *Queuing Theory and Telecommunications Networks and Applications*. US: Springer; 2005.
- [2] Mrvelj Š. *Ciljevi razine usluge (QoS, GoS, NP)*. [Prezentacija] Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti; 2017.
- [3] Mrvelj Š. *Analiza posluživanja u čvoru paketne mreže*. [Prezentacija] Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti; 2018.
- [4] Grgurević I. *Performanse računalnih mreža*. [Prezentacija] Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti; 2017.
- [5] Mrvelj Š. *Promet u Internet mreži*. [Prezentacija] Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti; 2009.
- [6] Begović M. *Podvorbeni sustavi*. Zagreb: Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti; 2006.
- [7] Modiano E. *Introduction to Queueing Theory*. [Prezentacija] Massachusetts Institute of Technology. Preuzeto sa: https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-263j-data-communication-networks-fall-2002/lecture-notes/Lectures5_6.pdf [Pristupljeno: kolovoz, 2019.]
- [8] Moltchanov DA. *Basic denitions and relations in queuing theory*. [Prezentacija] Tampere University of Applied Sciences, Finska. Preuzeto sa: <http://www.cs.tut.fi/~moltchan/ELT-53607/lecture05.pdf> [Pristupljeno: srpanj 2019.]
- [9] Mrvelj Š. *Prometni modeli za paketne mreže*. [Prezentacija] Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti; 2018.
- [10] Mrvelj Š. *Osnove teorije prometa*. [Prezentacija] Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti; 2016.
- [11] Kobayashi H, Mark LB, Turin W. *Probability, Random Processes, and Statistical Analysis*. New York: Cambridge University Press; 2012.
- [12] Bertsekas PD, Tsitsiklis NJ. *Introduction to Probability*: Athena Scientific, Belmont Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology; 2002.
- [13] Hrvatska enciklopedija leksikografskog zavoda Miroslava Krlež. Dostupno na: <http://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=63913> [Pristupljeno: kolovoz 2019.]
- [14] Striko KE, Fratrović T, Ivanković B. *Vjerojatnost i statistika s primjerima iz tehnologije prometa*. Zagreb: Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti; 2008.

[15] Vaton S, Amigo I, Castel H. *M/M/1 queue, Steady state probabilities*. [Prezentacija] Institut Mines-Télécom; 2019. Preuzeto sa: <https://www.edx.org/course/queuing-theory-from-markov-chains-to-multi-server-systems-2> [Pristupljeno: srpanj 2019.]

[16] Moltchanov DA. *M/M/-/- systems: part I*. [Prezentacija] Tampere University of Applied Sciences, Finska. Preuzeto sa: <http://www.cs.tut.fi/kurssit/ELT-53607/> [Pristupljeno: srpanj 2019.]

[17] Special Distribution Simulator. Dostupno na: <http://www.randomservices.org/random/apps/SpecialSimulation.html>, [Pristupljeno: srpanj 2019.]

POPIS SLIKA

Slika 1. Shematski prikaz jednoposlužiteljskog PS	5
Slika 2. Prikaz ulaznog procesa	7
Slika 3. Vrste prometa	10
Slika 4. Promjena broja korisnika u sustavu	18
Slika 5. Dijagram prijelaza među stanjima za $M/M/1/\infty/\infty/FCFS$, [6]	19

POPIS GRAFIKONA

Grafikon 1. Stabilan red [15]	20
Grafikon 2. Nestabilan red [15]	20
Grafikon 3. M/M/1 model za $\rho \rightarrow 1$ [16]	20
Grafikon 4. Funkcija gustoće vjerojatnosti međudolaznih vremena (eksp. razdioba).....	25
Grafikon 5. Vremena čekanja paketa za ta (eksp.) i ts (eksp.).....	27
Grafikon 6. Distribucija vremena čekanja za ta (eksp.) i ts (eksp.).....	27
Grafikon 7. Duljina reda za ta (eksp.) i ts (eksp.)	29
Grafikon 8. Distribucija duljine reda za ta (eksp.) i ts (eksp.)	29
Grafikon 9. Vremena čekanja za drugu simulaciju	30
Grafikon 10. Duljina reda za drugu simulaciju	30
Grafikon 11. Usporedba distribucija vremena čekanja za 1. i 2. simulaciju	32
Grafikon 12. Funkcija gustoće vjerojatnosti međudolaznih vremena (normalna razdioba) ...	33
Grafikon 13. Vremena čekanja paketa za ta (norm.) i ts (eksp.)	34
Grafikon 14. Distribucija vremena čekanja za ta (norm.) i ts (eksp.).....	34
Grafikon 15. Duljina reda za ta (norm.) i ts (eksp.).....	35
Grafikon 16. Distribucija duljine reda za ta (norm.) i ts (eksp.)	35
Grafikon 17. Funkcija gustoće vjerojatnosti trajanja posluživanja (normalna razdioba)	36
Grafikon 18. Vrijeme čekanja za ta (eksp.) i ts (norm.).....	37
Grafikon 19. Distribucija vremena čekanja ta (eksp.) i ts (norm.)	37
Grafikon 20. Duljina reda za ta (eksp.) i ts (norm.).....	38
Grafikon 21. Distribucija duljine reda za ta (eksp.) i ts (norm.).....	38
Grafikon 22. Funkcija gustoće vjerojatnosti vremena posluživanja (Pareto razdioba)	39
Grafikon 23. Vremena čekanja paketa za ta (eksp.) i ts (Par.).....	40
Grafikon 24. Distribucija vremena čekanja paketa za ta (eksp.) i ts (Par.).....	40
Grafikon 25. Duljina reda za ta (eksp.) i ts (Par.)	41
Grafikon 26. Distribucija duljine reda za ta (eksp.) i ts (Par.)	41
Grafikon 27. Vremena čekanja paketa za ta (norm.) i ts (Par.).....	42
Grafikon 28. Distribucija vremena čekanja za ta (norm.) i ts (Par.).....	43
Grafikon 29. Duljina reda za ta (norm.) i ts (Par.).....	43
Grafikon 30. Distribucija duljine reda za ta (norm.) i ts (Par.)	44
Grafikon 31. Usporedba veličine odstupanja	47
Grafikon 32. Usporedni prikaz vrijednosti dobivenih empirijski i pomoću modela za ne- poissonovske prometne modele	47

POPIS TABLICA

Tablica 1. Prihvatljive vrijednosti, prema QoS kriterijima za VoIP usluge.....	4
Tablica 2. Osjetljivost aplikacija na degradaciju vrijednosti QoS parametara	4
Tablica 3. Izrazi koji vrijede neovisno o modelu sustava posluživanja.....	11
Tablica 4. Usporedba Poissonovog i Bernoullijevog procesa	17
Tablica 5. Dio iz skupa vrijednosti za računanje vremena čekanja	26
Tablica 6. Dio iz skupa podataka za računanje duljine reda	28
Tablica 7. Usporedba vrijednosti dobivenih empirijski i modelom M/M/1.....	31
Tablica 8. Tri simulacije za M/M/1 model sa srednjim vrijednostima iz prve simulacija.....	32
Tablica 9. Usporedba ne-poissonovskih modela.....	45
Tablica 10. Standardna odstupanja za ne-poissonovske moele	45
Tablica 11. Percentil za T_w prema simulacijama	45
Tablica 12. Odstupanja prilikom zanemarivanja značajki prometnog toka	46



Sveučilište u Zagrebu
Fakultet prometnih znanosti
10000 Zagreb
Vukelićeva 4

IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI I SUGLASNOST

Izjavljujem i svojim potpisom potvrđujem kako je ovaj _____ diplomski rad

isključivo rezultat mog vlastitog rada koji se temelji na mojim istraživanjima i oslanja se na objavljenu literaturu što pokazuju korištene bilješke i bibliografija.

Izjavljujem kako nijedan dio rada nije napisan na nedozvoljen način, niti je prepisan iz necitiranog rada, te nijedan dio rada ne krši bilo čija autorska prava.

Izjavljujem također, kako nijedan dio rada nije iskorišten za bilo koji drugi rad u bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili obrazovnoj ustanovi.

Svojim potpisom potvrđujem i dajem suglasnost za javnu objavu _____ diplomskog rada

pod naslovom **ANALIZA UTJECAJA DISTRIBUCIJA INTENZITETA DOLAZAKA**

I VELIČINE PAKETA NA MJERE PERFORMANSI SUSTAVA

na internetskim stranicama i repozitoriju Fakulteta prometnih znanosti, Digitalnom akademskom repozitoriju (DAR) pri Nacionalnoj i sveučilišnoj knjižnici u Zagrebu.

U Zagrebu, _____ 12.9.2019.

Student/ica: _____
K. Hranović
(potpis)