Mogućnosti primjene modela drugog reda za modeliranje cestovne mreže

Kušić, Krešimir

Undergraduate thesis / Završni rad

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Transport and Traffic Sciences / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:119:374885

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-19**

Repository / Repozitorij:

Faculty of Transport and Traffic Sciences - Institutional Repository

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET PROMETNIH ZNANOSTI

Krešimir Kušić

MOGUĆNOSTI PRIMJENE MODELA DRUGOG REDA ZA MODELIRANJE CESTOVNE MREŽE

ZAVRŠNI RAD

Zagreb, 2015.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET PROMETNIH ZNANOSTI
ODBOR ZA ZAVRŠNI RAD

Zagreb, 3. lipnja 2015.

Zavod: **Zavod za inteligentne transportne sustave**
Predmet: **Automatsko upravljanje u prometu i transportu**

ZAVRŠNI ZADATAK br. 2134

Pristupnik: **Krešimir Kušić (0135227681)**
Studij: Inteligentni transportni sustavi i logistika
Smjer: Inteligentni transportni sustavi

Zadatak: **Mogućnosti primjene modela drugog reda za modeliranje cestovne mreže**

Opis zadatka:

Za provjeru novih rješenja iz domene ITS-a za upravljanje cestovnom mrežom se koriste simulacije. Takva provjera se uvijek radi prije implementacije novih rješenja u stvarni upravljački sustav. Radi dobre simulacijske provjere bitan je kvalitetan simulacijski model. Danas se stoga za modeliranje cestovnih mreža sve više koriste modeli drugog reda. U radu je potrebno napraviti pregled postojećih modela cestovnih mreža uz naglasak na modele drugog reda, opisati njihovu primjenu i razraditi postupak implementacije modela drugog reda u programskom paketu Matlab.

Zadatak uručen pristupniku: 24. ožujka 2015.

Mentor:

doc. dr. sc. Edouard Ivanjko

Predsjednik povjerenstva za završni ispit:

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet prometnih znanosti

ZAVRŠNI RAD

MOGUĆNOSTI PRIMJENE MODELA DRUGOG REDA ZA MODELIRANJE CESTOVNE MREŽE

APPLICATION POSSIBILITIES OF SECOND ORDER MODELS FOR ROAD TRANSPORT NETWORK MODELLING

Mentor: doc. dr. sc. Edouard Ivanjko
Student: Krešimir Kušić, 0135227681

Zagreb, rujan 2015.

Sažetak

Za provjeru novih rješenja upravljanja cestovnom mrežom koriste se simulacije. Takva provjera se uvijek radi prije implementacije novih rješenja u realni upravljački sustav. Odabir odgovarajućeg kvalitetnog simulacijskog modela je bitan radi dobre simulacijske provjere rješenja. Iz tog razloga sve češće se za modeliranje cestovnih mreža koriste modeli drugog reda. U radu je napravljen pregled postojećih modela cestovnih mreža uz naglasak na modele drugog reda. Detaljnije je opisan AW-Rascle model drugog reda i razrađen je postupak implementacije istog u programski paket Matlab.

KLJUČNE RIJEČI: modeli drugog reda za upravljanje prometnim tokom; upravljanje priljevnim tokovima na urbanim autocestama; valovi širenja prometnog zagušenja

Summary

Simulations are used for checking new solutions of roads network management. Such verification is always worked before the implementation of new solutions in the real control system. Choosing adequate high-quality simulation model is very important because of checking simulation solutions. For this reason, models of the second order are used more and more for modeling of road networks. The final work contains a review of models of road networks with an emphasis on models of the second order. The AW-Rascle second order model is described in detail and the implementation of the same is worked out in Matlab.

KEYWORDS: second order models for road transport network modelling; ramp metering; shock wave

Sadržaj

1. Uvod 1

2. Primjena modela cestovnih mreža 2

3. Vrste modela za modeliranje cestovnih mreža 5

3.1. Makroskopski modeli 5

3.2. Mikroskopski modeli 7

3.3. Mezoskopski modeli 8

3.4. Podjela modela prema načinu izračuna 8

3.4.1. Modeli prvog reda 8

3.4.1.1 CTM Model 9

3.4.1.2 LWR Model 10

3.4.2. Modeli drugog reda 12

4. Podjela modela drugog reda 13

4.1. Payne-ov model 13

4.2. Payne-Papageorgiou model 14

4.3. AW-Rascle model 16

4.4. Greenberg-Klar-Rascle model prometnica s više prometnih traka 23

4.5. Hiperbolički fazno prijelazni model 24

5. Prednosti modela drugog reda 26

6. Mogućnosti implementacije u programskom paketu Matlab 28

6.1. Postupak ručnog izračuna 29

6.2. Koncept implementacije u Matlabu 34

7. Zaključak 41

Literatura 42

Popis kratica 44

Popis slika 45

Popis tablica 46

Popis grafikona 47

Prilog 48

1. Uvod

Projektiranje urbanih cestovnih prometnih mreža, uz sve strože ekološke, sigurnosne i eksploatacijske standarde predstavlja veliki izazov za prometne stručnjake u traženju odgovarajućih optimalnih rješenja. Iz tog razloga znanstvena i stručna zajednica sve više pridaje pozornost razvoju prometnih modela. Danas postoje razni prometni modeli kojima se pokušavaju odrediti odnosno izračunati određena stanja prometa u odnosu na postavljene prometne zahtjeve. U ovom završnom radu su spomenuti osnovni prometni modeli s osvrtom na modele drugog reda. Svrha ovog završnog rada je dati uvid u analizu postojećih prometnih modela i ukazati na njihove prednosti i nedostatke, te upoznati čitatelja s primjenom prometnih modela kod modeliranja prometnih tokova. Cilj ovog završnog rada je analiza prometnog toka na određenoj dionici prometnice jednim od analiziranih modela drugog reda. Naslov završnog rada je: Mogućnosti primjene modela drugog reda za modeliranje cestovne mreže.

Rad je podijeljen u sedam poglavlja. U drugom poglavlju je opisana primjena modela cestovnih mreža u simulacijskim procesima. Treće poglavlje obrađuje vrste modela za modeliranje cestovne mreže. Prikazuje se osnovna podjela modela, te načini izračuna modela prvog i drugog reda. U četvrtom poglavlju napravljena je dublja podjela postojećih modela drugog reda te njihova analiza s osvrtom na detaljniju analizu AW-Rascle modela. Peto poglavlje ističe prednosti modela drugog reda u upravljanju prometnim tokovima u odnosu na modele prvog reda. U šestom poglavlju je razrađen algoritam ručnog računanja nekoliko stanja prometnog toka pomoću AW-Rascle modela. Isti je postupak implementiran u programski paket Matlab. Sedmo poglavlje odnosi se na zaključak i spoznaje do kojih se došlo u završnom radu.

2. Primjena modela cestovnih mreža

Simulacije u računalnim programima postale su važan dio matematičkog modeliranja realnih sustava iz područja tehničkih znanosti. Tradicionalni pristup modeliranju sustava podrazumijeva dobivanje matematičkog modela, na temelju kojeg se nastoji dobiti analitičko rješenje problema. Rješenje omogućuje predviđanje ponašanja sustava s obzirom na zadane početne uvjete i parametre sustava. Istraživanja realnog sustava mogu se provesti analitičkim putem. Apstraktni sustav predstavljen je odgovarajućim matematičkim modelom. Hoće li se realan sustav ponašati kako predviđa analiza apstraktnog modela, ovisi o valjanostima pretpostavki pri izradi matematičkog modela. Ako model nije adekvatan, analiza može dovesti do krivih zaključaka.

U slučajevima kada je moguće odrediti matematički model realnog sustava, analitički i numerički postupci predstavljaju brz i efikasan način da se odrede svojstva sustava i predvidi njegovo ponašanje. Različiti realni sustavi mogu se predstaviti istim apstraktnim sustavom. Kao primjer mogu se uzeti dva sustava različite fizičke prirode. Prvi električni krug R, L, C, a drugi mehanički sustav mase i opruge s prigušenjem. Električni krug služi ovdje kao matematički model izravne analogije za mehanički sustav i obratno. Takvi sustavi su međusobno analogni. Analogni modeli mogu dobro poslužiti u simuliranju velikih mehaničkih sustava. Ako se promatra prometni tok vozila analogan matematički model je temeljen na protjecanju fluida.

Točno ili približno ponavljanje procesa u sustavu na modelu naziva se simulacija, a postupak same izrade apstraktnog modela naziva se modeliranjem. Na osnovi ponašanja modela mogu se dobiti razni korisni zaključci o funkcioniranju realnog sustava. Proces zvan modeliranje predstavlja postavljanje modela teorijskim putem uz primjenu osnovnih prirodnih fizikalnih zakona očuvanja mase, energije i impulsa [1].

U prometnom inženjerstvu modeli su potrebni za predviđanje, odnosno praćenje i ponašanje prometa te imaju značajnu ulogu u prometnom planiranju i projektiranju cestovne mreže [2]. Analiza i kontrola projektiranja cestovne mreže zasniva se na modelima i njihovim simulacijama pomoću simulacijskih alata prije implementacije u realno okruženje. Temeljna zadaća izrade prometne analize je da odgovori na pitanje hoće li i u kolikoj mjeri određeni planirani zahvat u prostoru utjecati na kvalitetu prometnog toka u neposrednom okruženju. Pod zahvate u prostoru spada gradnja nove ili prenamjena postojeće cestovne infrastrukture, izgradnja novih dionica i raskrižja, te primjena novih načina upravljanja i regulacije prometnim tokovima. Uz pomoć kvalitetne prometne analize može se ustanoviti da li je prometna mreža u mogućnosti prihvatiti planiranu prometnu potražnju te ako je potrebno, predložiti mjere kojima se može postići zadovoljavajuća kvaliteta prometnog toka [3]. Glavni cilj takvog modeliranja je reproducirati određena stanja: sinkronizaciju prometnog toka, smanjiti veće zastoje, ujednačavanje brzine vozila u prometnom toku [4].

Simulacijski modeli primjenjuju se za planiranje, vrednovanje, projektiranje, predloženih rješenja, za kvalitativno ispitivanje analitičkih modela i u raznim znanstvenim istraživanjima. Korištenje simulacijskih modela na istraživačkom i stručnom području omogućuje provjeravanje i vrednovanje novih načina vođenja prometa te usporedbu različitih projektnih rješenja prije nego što se mane novih rješenja odraze na terenu. Simulacijski modeli su stohastičke prirode, tj. za opisivanje toka prometa koriste se slučajno odabranim varijablama odnosno razdiobama vjerojatnosti za razliku od empirijskih i analitičkih modela koji su deterministički. Simulacijski modeli koriste se algoritmima s pomoću kojih definiraju prometni tok u prostoru i vremenu modelirajući kretanje svakog vozila i njihovu međusobnu interakciju. Pokazatelji potrebni za vrednovanje pojedinog rješenja dobivaju se iz simuliranog toka. Uporabom slučajnih varijabli pri opisivanju određenih elemenata prometnog toka teži se što realnije prikazati stvarne procese (npr. vrijeme dolaska vozila na raskrižje, brzina pojedinog vozila, karakteristike vozača, itd.) [3].

Kod stohastičkih modela isti ulazni podaci ne daju isti izlazni rezultat zbog generiranja slučajnih varijabli koje se primjenjuju u modelu na temelju definiranih

razdioba vjerojatnosti. Zbog toga se radi određen broj ponavljanja simulacija s istim ulaznim podacima, a konačni se rezultat dobije kao srednja vrijednost rezultata određenog broja simulacija. Uporabom jednadžbe toka vozila, uz primjenu jednadžbi jednoliko ubrzanog kretanja, može se za svako vozilo odrediti položaj, brzina i ubrzanje u svakom vremenskom trenutku, čime se definira putanja vozila. Putanja vodećeg vozila ovisi o graničnim vrijednostima parametara (brzine, ubrzanja i usporenja) te o njoj ovise putanje ostalih vozila koja ga prate. Proračunati podaci za svaki vremenski korak omogućavaju simulaciju kretanja vozila duž prometnice. Kod dinamičkog prikaza prometnih tokova (animacija na ekranu) omogućava se bolja procjena događanja na određenoj prometnoj mreži. Zbog toga je moguće unaprijed učinkovito razraditi rješenja koja će osigurati povoljne uvjete za predviđeni rast prometa. Rezultati navedenih simulacijskih postupaka (mjere učinkovitosti) za pojedine prometne dionice prikazuju se u grafičkom ili tabličnom obliku s odgovarajućim statističkim parametrima (srednja vrijednost, standardna devijacija, varijanca, i dr.) [3].

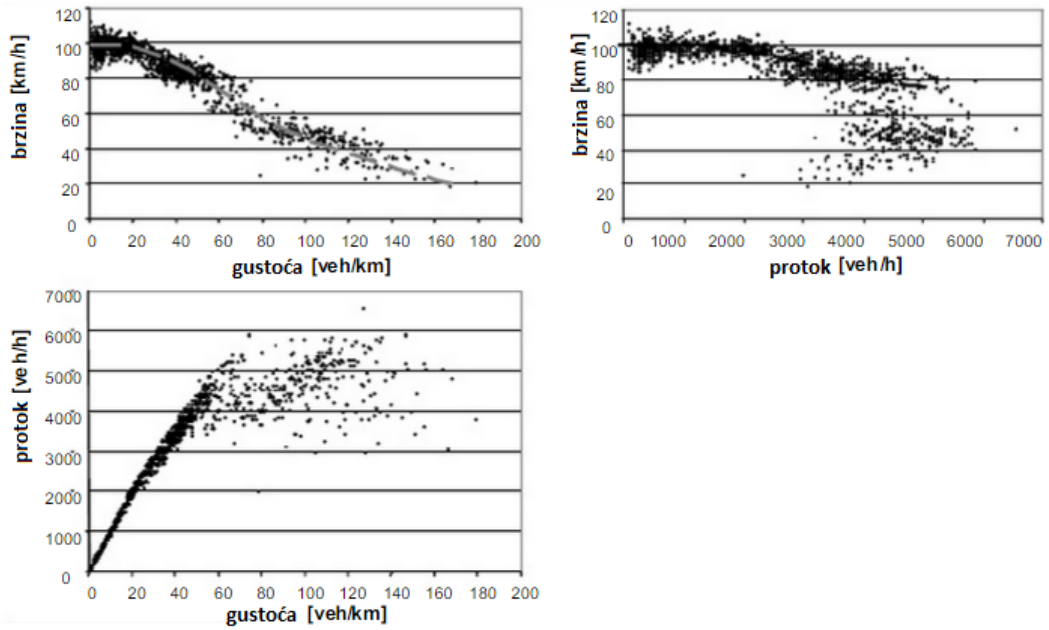
Ovakve simulacije primjenjuju se u projektiranju i upravljanju prometnim tokovima na autocestama i brzim cestama uz primjenu sustava upravljanja priljevnim tokovima urbanih autocesta (engl. *ramp metering control*). Pomoću njih je moguće još točnije kontrolirati gustoću i brzinu prometnog toka te ih održavati u željenim granicama. To omogućuje približavanje laboratorijskim uvjetima u kojima su rađene simulacije. Implementacija takvog rješenja u realno okruženje uz zadržavanje parametara toka u granicama simuliranog procesa, također bi trebalo dati zadovoljavajuće rezultate uz minimalna odstupanja. Vrlo važna stvar u simulacijama s upravljanjem priljevnim tokovima je da simulacija bude točna i da ima sposobnosti modeliranja procesa spajanja glavnog toka i sporednih priljevnih tokova vozila [5].

3. Vrste modela za modeliranje cestovnih mreža

Opisujući kako pojedini model promatra prometni tok ili kretanje vozila prometni modeli mogu se podijeliti u tri grupe: makroskopski, mikroskopski i mezoskopski. Dublja podjela prometnih modela može se sagledati kroz prizmu matematičkog opisa modela, preciznije broju diferencijalnih jednadžbi koje opisuju model i njihovom tipu. U takvoj dubljoj podjeli modele dijelimo na modele prvog reda, drugog reda i viših redova. U nastavku ovog poglavlja biti će detaljnije opisani modeli prema osnovnoj podjeli, a zatim prema matematičkoj podjeli u ovisnosti o tipu jednadžbi koje ih opisuju.

3.1. Makroskopski modeli

Makroskopski model izračunava sveukupne karakteristike prometnog toka (brzine, protok, gustoću) i njihove međusobne odnose prema jednadžbi prometnog toka. Opisuje dinamiku prometnih tokova kao kontinuiranu materiju u smislu protoka, gustoće i prosječne brzine bez razlikovanja pojedinih vozila. Ne ulazeći u detaljniju analizu može se reći da vremenski neprekinuta funkcija (glatka krivulja) gustoće $k(x,t)$ i protoka $q(x,t)$ izvodi se aproksimacijom kumulativnih točaka s obzirom na prostor ili vrijeme, te se u obzir uzimaju i stohastička razmatranja. Tako prikupljeni kumulativni podaci prikazani su na slici 1. Takav dijagram predstavlja lokalno stanje prometa na mjestima gdje su postavljeni detektori. Tako dobivene kontinuirane varijable su lokalne i trenutne, a predstavljaju temelj makroskopskih modela [6].



Slika 1. Primjer empirijski zasnovanih dijagrama, [6]

Pomoću jednadžbi prometnog toka opisuju se smetnje u odvijanju prometa (poremećaji) koji se šire sustavom prometnica u obliku šok valova. Makroskopski modeli su prvenstveno razvijeni za simulacije prometa većih cestovnih mreža. Imaju sposobnost predvidjeti prostorni opseg te opseg zagušenja određene cjeline prouzročeno povećanom prometnom potražnjom ili incidentnom situacijom na prometnici. Predviđanje zagušenja i incidentnih situacija u prostornom i vremenskom kontekstu je najpoželjnija osobina simulacija temeljenih na ovom modelu uz primjenu sustava upravljanja priljevnim tokovima. To je i razlog što se često koristi kod prvih simulacija prometa gdje se priljevni tokovi urbanih autocesta upravljaju pomoću različitih strategija (engl. *ramp metering*).

Nedostatak ovog modela je u tome što slabo opisuje interakciju između ulaznog tj. upravljanog priljevnog toka i glavnog toka. Simulacije temeljene na makroskopskim karakteristikama koriste matematičke modele prometnih tokova temeljene na teoriji kontinuiteta gdje spada i hidrodinamička teorija. S obzirom na sličnost između protjecanja fluida i prometnih tokova došlo se na ideju da se uz određene uvjete, te poznate zakonitosti kojima se opisuje kretanje fluida iskoriste u opisivanju zakonitosti protjecanja prometnih tokova [7]. Glavni cilj ove vrste

modeliranja je opisati vremenski razmak $(x - t)$ razvoja karakterističnih prometnih parametara koji su važni za makroskopski tok kao što su: kapacitet $q(x,t)$, brzina $u(x,t)$, i gustoća $k(x,t)$.

Svi navedeni parametri su poznati u svakom vremenskom trenutku *t* i svakoj točki *x*. Danas postoji nekoliko parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koje opisuju tu teoriju, a jedna od najčešće korištenih je jednadžba očuvanja broja vozila (prema jednadžbi očuvanja energije u fizici) ili jednadžba kontinuiteta (1.1) [5]:

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial k(x,t)}{\partial t} = 0. \tag{1.1}$$

3.2. Mikroskopski modeli

Modeli prometnog toka koji opisuju protok prometa na razini pojedinačnih vozila nazivaju se mikroskopski modeli. Mikroskopski model neprekidno izračunava parametre kao što su položaj, brzina, maksimalna akceleracija svakog pojedinog vozila tijekom cijele simulacije. Dakle, ne promatra se cjelokupni prometni tok nego svako pojedino vozilo u prometnoj mreži. Mikrosimulacija pokazuje tako relativno male promjene u fizičkom okruženju kao što je ulijevanje kontroliranog priljevnog toka vozila u glavni prometni tok.

Zbog toga što promatra svako vozilo individualno zahtijeva mnogo više računanja i duže vrijeme modeliranja za veće prometne mreže autocesta. Zbog takvih karakteristika ova vrsta modela daje vrlo precizne podatke o stanju prometa na čvorovima autocesta. Na primjer, ako promatra dva ulazna čvora na sustavu upravljanja priljevnim tokom i dva izvan sustava. Dok u slučaju više čvorova ova metoda može biti nepraktična. Mikroskopske simulacije kao što je već spomenuto ne temelje se na modelima zasnovanim na teoriji prometnog toka nego na interakciji između (međudjelovanju) vozila pojedinačno [5].

3.3. Mezoskopski modeli

Mezoskopski modeli kombiniraju karakteristike oba već opisana modela. Ovi modeli definiraju i prate stanja pojedinog vozila temeljena na mikroskopskim modelima, ali interakcije i aktivnosti između vozila zasnivaju se na skupu veza između njih. Takav skup promatra se kroz prizmu makroskopskog modela. Mezoskopski modeli imaju glavnu primjenu u simulacijama s vozilom kod kojeg se koristi sustav za trenutno informiranje putnika [5].

3.4. Podjela modela prema načinu izračuna

Dublja podjela modela može se kvalificirati na temelju broja jednadžbi odnosno načinom kojim model opisuje dinamiku sustava. Preciznije zbog složenosti problema koji opisuju modeli su opisani parcijalnim diferencijalnim jednadžbama. Svaka jednadžba definira ponašanje funkcije koja ovisi o dvije ili više nezavisnih varijabli. Zbog složenosti njihovog rješavanja, te složenosti određivanja početnih i rubnih uvjeta u dinamici prometnog toka ponekad je jako teško analitičkim putem dobiti jedinstveno rješenje. Zbog čega se u većini slučajeva koriste numeričke metode za analizu takvih sustava.

U ovom poglavlju bit će opisani temeljni modeli prvog i drugog reda s kratkim uvidom u funkcionalnost modela. I pregled najbitnijih formula koje opisuju stanja u prometnom toku. Od modela prvog reda opisat će se CTM i LWR model, od modela drugog reda ukratko će se opisati Payne-Papageorgiou model te neke njegove inačice. Više o modelima drugog reda biti će dano u sljedećem poglavlju.

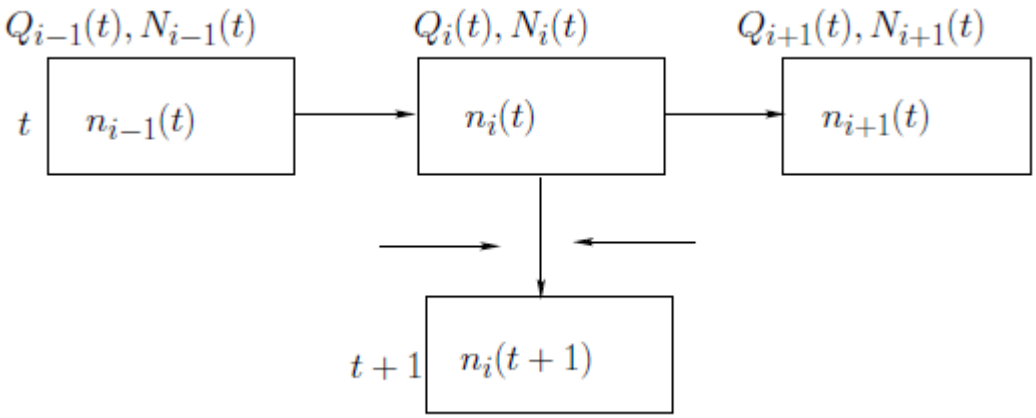
3.4.1. Modeli prvog reda

Modeli prvog reda su u suštini zasnovani na dinamici gustoće čije se stanje temelji na očuvanju broja vozila na određenoj dionici prometnice. Prema tome zahtijevaju korištenje sustava za upravljanje priljevnim tokovima pomoću kojeg se kontrolira prosječna gustoća na određenom isječku prometnice. Prirodno se nameće pitanje dali je moguće koristiti prometni tok umjesto gustoće kao varijable stanja u

kontroli dinamike prometa. Odgovor je da, ali samo ako se parametru gustoće pridruži parametar brzine no takav model više ne spada u modele prvog reda. Najčešće korišteni modeli prvog reda za upravljanje prometom su (*Cell Transmission Model* –**CTM**) i (*Lighthill-Whitham-Richards* – **LWR**) model [8].

3.4.1.1 CTM Model

U klasičnim metodama za objašnjenje makroskopskog ponašanja prometa koristi se hidrodinamička teorija, odnosno rješenje diferencijalne jednadžbe treba predvidjeti tijek razvoj prometa. Međutim u situacijama s iznenadnim varijacijama visoke gustoće (termin poznat kao usko grlo) hidrodinamički model nagovještava na šok val. Stoga su ove jednadžbe djelomično kontinuirane što ih čini težima za riješiti. CTM je razvijen kao diskretna analogija takvim diferencijalnim jednadžbama u obliku diferencijalne jednadžbe koja se dade lako riješiti i vodi brigu o visokim promjenama gustoće. Model simulira prometne uvjete tako da simulira sustav sa strategijom vremenskog skeniranja ćelija, gdje su trenutni uvjeti ažurirani u svakom vremenskom trenutku. Dionice ceste u razmatranju su podijeljene u homogene dijelove nazvane ćelije kao što je to prikazano na sljedećoj slici.



Slika 2. Diskretizacija prometnice u ćelije, [2]

Tok je povezan s trenutnim uvjetima u trenutku (t) kako to prikazuje sljedeća jednadžba:

$$Y_i(t) = min[n_i - 1(t), Q_i(t), N_i(t) - n_i(t)], \qquad (2.1)$$

gdje je:

$n_i - 1(t)$ – broj vozila u ćeliji $(i-1)$ u vremenu (t);

$Q_i(t)$ – kapacitet toka (i) za vremenski interval (t);

$N_i(t) - n_i(t)$ – količina praznog prostora u ćeliji (i) u trenutku (t).

Rubni uvjeti navedeni su pomoću ulaznih i izlaznih ćelija. Ulazni tokovi mogu se modelirati s parom ćelija. Jednadžba (2.1) može biti ekvivalentno zapisana kao:

$$Y_i(t) - y_i + 1(t) = -n_i(t) + n_i + 1(t+1), \qquad (2.2)$$

koja predstavlja jednakost koja glasi da je promjena protoka po prostoru jednaka promjeni u popunjenosti po vremenu [2].

3.4.1.2 LWR Model

To je model prvog reda što znači da postoji samo jedna parcijalna diferencijalna jednadžba koja opisuje razvoj stanja u prometu. Rješenje Riemann-ovog problema sastoji se od jednog vala povezanog s dva početna uvjeta. LWR model je od velikog interesa jer je jednostavan i može uspješno prikazati neke bitne značajke prometnog toka, kao što je formiranje i širenje poremećaja u prometu. Temeljen je kao jednostavan kinetički val. Koristi se u mnogim istraživanjima povezanim s dinamikom i upravljanjem prometa. Razlog je mogućnost modeliranja nekih bitnih značajki prometnog toka, kao što je formiranje i širenje vala, a može se kvalitetno prikazati s LWR modelom. U isto vrijeme dobro je poznato da taj model ima ograničenu sposobnost kod određenih složenijih prometnih pojava. Na primjer izvorni LWR model griješi kod generiranja padova kapaciteta, histereza, spontanog zagušenja, gužvi i prometnih oscilacija. Postojanje tih osobina potvrđeno je brojnim terenskim opažanjima.

Izvorni model ne uzima u obzir posebne karakteristike prometnog toka izazvane geometrijom ceste, nepropisnom vožnjom, na primjer nepropisna promjena prometnih traka. Štoviše model pretpostavlja uniformnu vozačku populaciju, dok u

stvarnosti nehomogenost vozača i vozila nije zanemariva [9]. Izvorna dinamička parcijalna diferencijalna jednadžba koja opisuje model glasi:

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t}, \tag{3.1}$$

ili u drugoj formi:

$$\begin{aligned} &\frac{\Delta(min\{v\rho, q_{max}, v(\rho j - \rho)\})}{\Delta x} \\ &= -\frac{\rho(x, t+\Delta t) - \rho(x,t)}{\Delta t}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ako je jednadžba diskretizirana uvođenjem koncepta ćelija može biti zapisana kao:

$$\begin{aligned} &\rho(\mathrm{i}, \mathrm{k}+1) - \rho(\mathrm{i}, \mathrm{k}) \\ &= \left(\frac{1}{\bar{\mathrm{v}}(\mathrm{i}, \mathrm{k})}\right)[\mathrm{Y}(\mathrm{i}, \mathrm{k}) - \mathrm{Y}(\mathrm{i}+1, \mathrm{k})]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Jednadžba 3.3 također je ekvivalentno predočena izrazom:

$$\rho(i, k+1) = \rho(i,k) + \frac{T}{L}[Y(i,k) - Y(i+1,k)], \tag{3.4}$$

gdje je:

i – broj ćelije i k indeks vremena;

$\rho(i,k)$ – gustoća u ćeliji *i* za vremenski period *k*;

$v(i,k)$ – srednja prostorna brzina u ćeliji *i* u vremenskom periodu *k* ;

$w(i,k)$ – povratna propagacija šok vala u ćeliji *i* u vremenskom periodu *k*;

$q_{\max}$ – maksimalni protok ćelije koji se može identificirati kao konstantan parametar – kapacitet;

ρ_J – gustoća zagušenja poznata kao konstantan parametar [8].

3.4.2. Modeli drugog reda

Većina modela drugog reda zasnivaju se na dinamici brzine zajedno s dinamikom gustoće, koja se koristi kao varijabla u modelima prvog reda. Postoji nekoliko modela drugog reda, ali većina ih služi za teorijsko izučavanje prometnog toka. Samo ih je nekoliko koji su razvijeni u svrhu kontrole prometa. Najpopularniji je Payne-Papageorgiou model.

Od tada je uz neke izmjene i poboljšanja u odnosu na ovaj model dobiveno nekoliko novih modela. Model je dodatno poboljšan uvođenjem efekta valova nastalih kada vozila mijenjaju prometni trak. Zbog graničnih točaka detekcijskih senzora na autocestama, kao što su induktivne petlje, procjena prometnog toka je jednostavna i vrlo točna, a procjena gustoće je vrlo teška. Zbog toga je tendencija na pogled dinamike protoka umjesto gustoće.

Modeli drugog reda potencijalno mogu biti korišteni za simulaciju sustava varijabilnog upravljanja ograničenjem brzine i koordiniranim upravljanjem priljevnim tokovima, te s aplikacijama koje su povezane sa obradom podataka sa prometnih senzora. Primjeri prometnih senzora su induktivne petlje, video nadzor, radari itd. Jedan od popularnijih modela drugog reda koji se koriste za simulacije i predviđanje stanja na prometnicama je Payne-Papageorgiou model kojeg je razradio H. J. Payne (1971). Model je temeljen na dinamici gustoće i brzine, a dodatno ga je unaprijedio George Papageorgiou (1983).

Postoji još nekoliko modela drugog reda koje treba spomenuti: AW-Rascle model, Payne–Whitham model, Greenberg-Klar-Rascle model prometnica s više prometnih traka, hiperbolički fazno prijelazni model, Siebel-Mauser uravnotežen kolni prometni model (BVT). Osim modela drugog reda postoje još i modeli višeg reda kao što je Helbing-ov model trećeg reda. Osim što sadržava standardne prometne veličine tj. jednadžbu gustoće i brzine model ima dodatnu jednadžbu varijance.

4. Podjela modela drugog reda

U nastavku su navedeni popularniji modeli drugog reda koji se danas koriste u teorijskoj i praktičnoj primjeni. Navedene su neke od najznačajnijih karakteristika za svaki pojedinačni model. U prethodnom poglavlju su spomenuti neki od najvažnijih modela drugog reda. Isti su u ovom poglavlju preciznije proučeni s naglaskom na AW-Rascle model. Odabrani model je temeljitije obrađen i detaljnije je opisano njegovo funkcioniranje, zbog njegove daljnje implementacije u završnom dijelu rada. Završni dio uključuje implementaciju modela u programski paket Matlab.

4.1. Payne-ov model

Payne-ov model je osnovni model višeg reda. Payne (1971) bio je prvi autor koji je prepoznao da je kašnjenje odziva i predviđanje ponašanja vozača bitno u makroskopskom modelu protoka prometa ako se želi objasniti nestabilnost prometa. Taj fenomen opisao je jednadžbom (4.1) [6]:

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \frac{V(t,x)\partial V(t,x)}{\partial x} = \frac{V(t,x) - V^e\big(k(t,x)\big)}{T} - \frac{Co^2(t,x)}{k(t,x)} * \frac{\partial k(t,x)}{\partial x}, \tag{4.1}$$

gdje je:

$$Co^2(t,x) = -\frac{1}{T} * \frac{\partial V^e\big(k(t,x)\big)}{\partial k}. \tag{4.2}$$

Lijeva strana jednadžbe (4.1) predstavlja ukupno vrijeme izvedeno iz srednje brzine. Takav tijek vremena razvoja srednje brzine vidjeli bi promatrači koji putuju tom brzinom V. Drug član na lijevoj strani predstavlja konvekciju, odnosno usmjereno gibanje prometnog toka, a definira proračun prosječne brzine na određenoj poziciji, uslijed odlaska ili dolaska vozila na tu poziciju s različitim

brzinama. Ukratko opisuje prometnu brzinu uz protok. Prva jednadžba na desnoj strani predstavlja smirivanje brzine. Pretpostavlja se da brzina prometa postaje uravnotežena $V^e(k)$, iako takvo stanje prometa nije moguće u potpunosti. Kao takav čimbenik taj utjecaj se odražava na konvekciju i predviđanje ali u manjoj mjeri. Drugi dio desne strane jednadžbe opsuje predviđanje tj. približavanje prometnog toka prostornim promjenama prometnih uvjeta izraženih iz prostorne gustoće prometa. Na temelju kojih se prilagođava brzina prometa [6].

4.2. Payne-Papageorgiou model

Poboljšanje postojećeg Payne-ovog modela daje Papageorgiou 1990. godine koji predlaže dodavanje dva dodatna uvjeta jednadžbi (4.1), kako bi se u obzir uzele dodatne pojave kod dinamike prometnog toka. Tijekom vožnje u intenzivnom prometu na autocesti, primjećuje se da promet usporava u blizini upravljanog pristupa priljevnih tokova u glavni tok. To opadanje brzine može se djelomično objasniti povećanjem prometne gustoće na dijelovima gdje se kontrolira priljevni tok. Vozila koja se nalaze u upravljanom priljevnom toku potrebno je priključiti na glavni tok, što uključuje promjenu prometnih traka i remeti protok prometa. To za posljedicu ima smanjenje prosjeka brzine. Dodavanjem jednadžbe (5.1) jednadžbi (4.1) uračunato je to dodatno smanjenje prosječne brzine:

$$-\left(\frac{\delta \Delta t}{l_j \lambda_j}\right) \frac{q_\mu(k) v_j(k)}{C_j(k) + L}, \tag{5.1}$$

gdje su:

δ i L – podešavajući parametri za pripajanje toka;

$q_\mu(k)$ – protok na kontroliranom priljevnom toku;

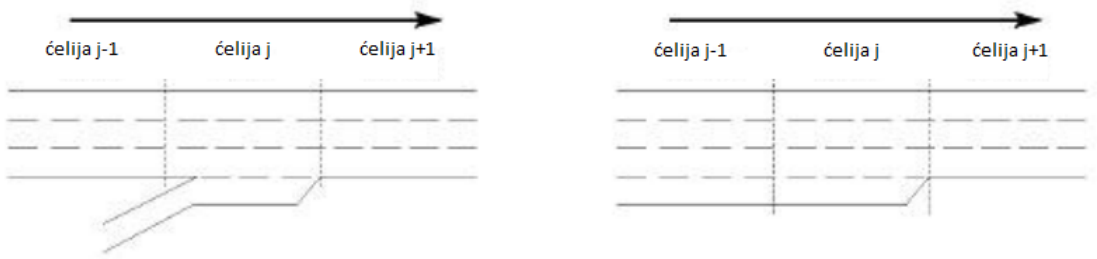
$v_j(k)$ – brzina vozila na priljevnom toku;

$C_j(k)$ – gustoća vozila na dionici autoceste j u vremenskom intervalu $(k\Delta t, (k+1)\Delta t)$;

l_j – duljina dijela j autoceste [km];

v_j – srednja brzina na dijelu j autoceste.

Sličan problem nastaje kada se broj prometnih traka na dijelu autoceste smanjuje. Navedeni problem priključivanja upravljanih priljevnih tokova i smanjenja broja prometnih traka prikazan je na slici 3.



Slika 3. Priključivanje upravljanog priljevnog toka na glavni tok i završetak prometne trake na autocesti, [10]

Vozila koja se nalaze u prometnoj traci koja završava moraju se prestrojiti u susjednu traku. Vozila koja putuju trakom koja prestaje mogu se promatrati kao tok koji se mora priključiti toku vozila koji prometuje postojećom trakom. Proces prestrojavanja uzrokuje pad srednje brzine koji je opisan jednadžbom (5.1). Proces promjene prometnih traka tj. njihov utjecaj na prometni tok dan je jednadžbom (5.2) koja se također pridružuje jednadžbi (4.1):

$$-\left(\frac{\emptyset \Delta t}{l_j \lambda_j}\right)\left(\frac{\Delta\lambda_j C_j(k)}{C_{jam,j}}\right) v_j^2(k), \tag{5.2}$$

gdje je:

$\emptyset$ – podešavajući parametar;

$\Delta\lambda_j = \lambda_j - \lambda_{j+1}$ – broj prometnih traka koje se smanjuju;

$C_{jam,j}$ – zastoj na dijelu j (maksimalna gustoća vozila na dionici autoceste (voz. /km/traci)).

S ova dva dodatna uvjeta prvobitni Payne-ov model je dorađen tj. poboljšan. Takav model je danas poznat pod nazivom Payne-Papageorgiou model [10].

4.3. AW-Rascle model

Model opisuje prometni tok jedne prometne trake, a time i brzinu koja se pretpostavlja da je nenegativna funkcija. AW-Rascle model se široko koristi za proučavanje fenomena nastajanja i dinamiku širenja zagušenja. Sa svojim karakteristikama model je temelj za modele s više prometnih traka. Tvorci modela naglašavaju da je model generalno poboljšan u odnosu na Payne–Whitham model te tvrde da se ostali znanstvenici previše oslanjaju na karakteristike protjecanja fluida. Odnosno da ne uzimaju u obzir prometni tok koji se po svom ponašanju razlikuje u nekim osobinama. Na primjer promet znatno ovisi o stanju toka koji se nalazi ispred trenutno razmatrane točke. Generalno model je definiran u obliku očuvanja broja vozila (analogno očuvanju mase u fizici) i momenta u prometnom toku sa sljedećim jednadžbama:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0, \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial \big(v + P(\rho)\big)}{\partial t} + v \frac{\partial (v + P(\rho))}{\partial x} = 0. \tag{6.2}$$

Prva jednadžba predstavlja očuvanje toka, dok druga predstavlja tijek razvoja brzine vozača u funkciji okolnog stanja prometa, gdje je $P(\rho)$ derivabilna rastuća funkcija gustoće ("tlak") takva da $\frac{d^2}{d\rho^2}(\rho P(\rho)) > 0$, a zapisana u obliku:

$$P(\rho) = C_0^2 \rho^{\gamma}\,, \tag{6.3}$$

gdje je $\gamma > 0, C_0 = 1$ [11], [12], [13].

Ako se (6.2) pomnoži s ρ i koristeći pravilo za deriviranje produkta dobije se izraz:

$$(\rho(v + \rho))_t - (v + P)\rho_t + \big(\rho v(v + \rho)\big)_x - (v + \rho)(\rho v)_x = 0. \tag{6.4}$$

Koristeći sad jednadžbu (6.1) može se lijeva strana jednadžbe reducirati na oblik:

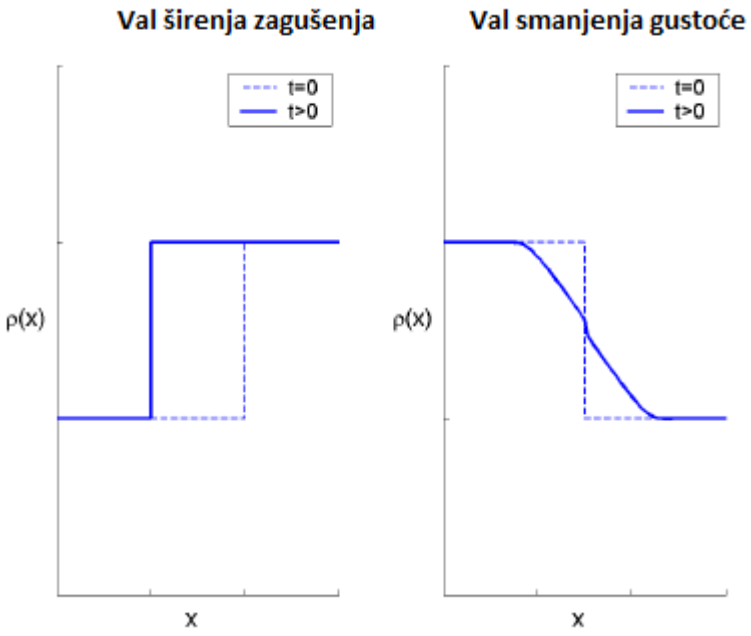
$$(\rho(v+P))_t + (\rho v(v+P))_x = 0, \tag{6.5}$$

koja predstavlja izraz očuvanja količine vozila. Iz toga slijedi da je sustav sastavljen od dvije konzervativne veličine ρ i $\rho(v+P) = y$. Za sustav jednadžbi (6.1) i (6.2) moraju se u obzir uzeti i diskontinuirana rješenja, odnosno treba poznavati ponašanje rješenja u blizini diskontinuiteta (prekida), te definirati početne i rubne uvjete. Riemann-ov problem predstavlja tri temeljna vala. Prvi je val gustoće vozila, drugi predstavlja kontaktnu diskontinuiranost tj. val koji se može tumačiti kao točka koja putuje i razdvaja dva stanja. Jedno gdje je gustoća vozila visoka i drugo gdje je gustoća niska. Te treći val razrjeđivanja gustoće vozila. Rješenje Riemann-ovog problema je linearna superpozicija svih temeljnih valova, koje određuje lokalno i dugotrajno ponašanje sustava. Rješenje početnih uvjeta poznato kao Riemann-ov problem daje:

$$\big(\rho(x,0), v(x,0)\big) = \begin{cases} U_l = (\rho_l, v_l), & x < 0 \\ U_r = (\rho_r, v_r), & x \geq 0 \end{cases} \tag{6.6}$$

koje se sastoji od prvog vala vozila koji povezuje lijevo stanje U_l sa srednjim U_c, a srednje stanje U_c povezano je drugim valom vozila s desnim stanjem U_d.

Ova dva vala su različita. Prvi može biti val širenja zagušenja (engl. *shock wave*) ili val gdje se smanjuje gustoća vozila (engl. *rarefaction wave*). Val širenja zagušenja je diskontinuiran u ρ i/ili u brzini kada se val giba konstantnom brzinom. Val gdje se smanjuje gustoća vozila ovisi samo o promjeni položaja u vremenu. Na sljedećim grafovima su prikazana stanja Riemann-ovog problema. Prvi graf (Slika 4) prikazuje mogući val koji povezuje lijevo stanje sa srednjim stanjem u rješenju Riemann-ovog problema.



Slika 4. Valovi povezuju lijevo stanje sa srednjim stanjem u rješenju Riemann-ovog problema, [11]

Na drugom grafu (Slika 5) prikazani su sljedeći parametri:

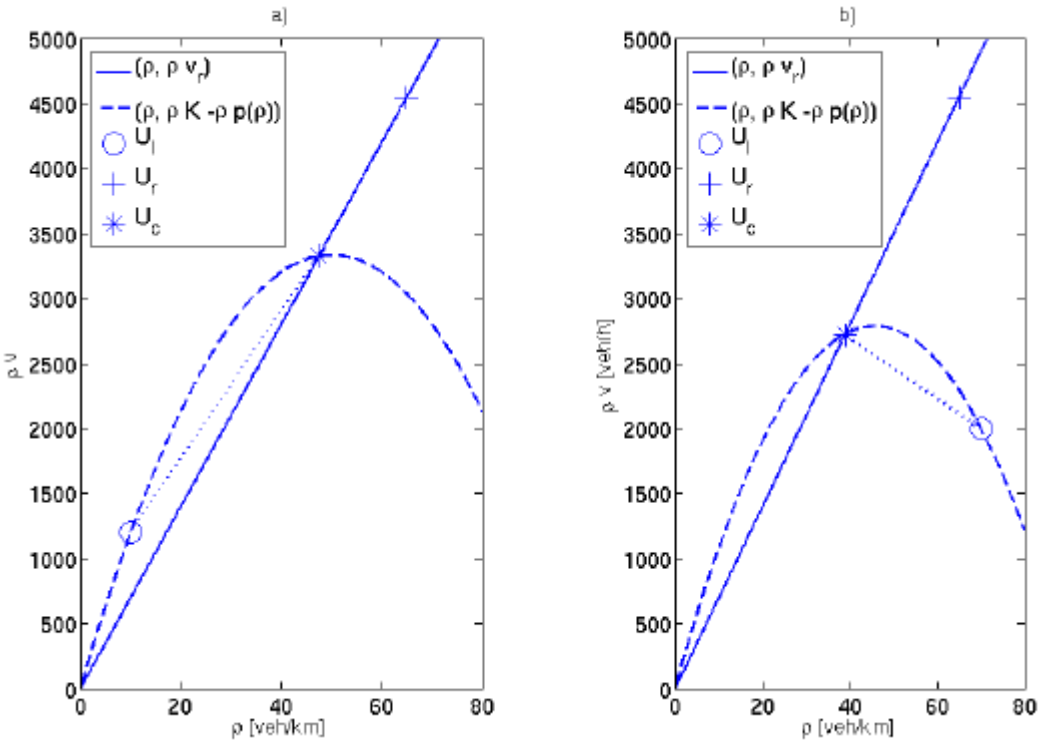
$(\rho, \rho v_r)$ – krivulja;

$(\rho, \rho K - \rho P(\rho))$ – prolazi kroz U_l;

U_l i U_r – dva početna stanja i srednje stanje U_c koja presijecaju dvije prethodno navedene krivulje u grafu $(\rho, \rho v)$;

U_l i U_c – segment povezivanja.

Slika a) prikazuje rješenje koje se sastoji od šok vala povezujući U_l i U_c praćeno kontaktnim diskontinuitetom povezuje U_c s U_r. Brzina šok vala jednaka je nagibu pravca koji povezuje U_l i U_c. Slika b) prikazuje rješenje koje se sastoji od jednog prorijeđenog vala vozila povezujući U_l sa U_c praćeno kontaktnim diskontinuitetom povezujući U_c s U_r.



Slika 5. Početno i srednje stanje grafa (ρ,ρv) za Riemann-ov problem, [11]

Drugi val je putujuća točka prekida vala vozila (kontaktna diskontinuiranost) koja dijeli dva stanja s istim brzinama ali različitim gustoćama vozila. Točka prekida vala putuje istom brzinom kao vozila [11]. Koristeći konzervativne veličine jednadžbe (6.1) i (6.5) mogu se zapisati kao:

$$(\rho)_t + (y - \rho P)_x = 0, \tag{6.7}$$

$$(y)_t + (\frac{y^2}{\rho} - yP)_x = 0. \tag{6.8}$$

Zapis u vektorskom obliku sustava parcijalnih diferencijalnih jednadžbi (6.7) i (6.8) , gdje su:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ y \end{pmatrix}, \qquad f(\vec{u}) = \begin{pmatrix} y - \rho P \\ \frac{y^2}{\rho} - yP \end{pmatrix}, \tag{6.9}$$

$$\vec{R} = 0,$$

može se zapisati kao $\vec{u}_t + f(\vec{u})_t = 0$, koji se da linearizirati u oblik:

$$\vec{u}_t + J\vec{u}_t = 0\,, \tag{6.10}$$

gdje je J Jacobijeva matrica iz koje se dalje računaju svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori. Ako se stavi da je

$\vec{u} = \binom{U1}{U2} = \binom{\rho}{y}$, a $f(\vec{u}) = \binom{f1}{f2} = \begin{pmatrix} y-\rho P \\ \frac{y^2}{\rho} - yP \end{pmatrix}$, te ako se vektor $f(\vec{u})$ izrazi kao funkcija od $\binom{U1}{U2}$, dobije se:

$$f_1 = U_2 - {U_1}^{1+\gamma} C_0^2; \tag{6.11}$$

$$f_2 = \frac{U_2^2}{U_1} - C_0^2 U_2 U_1^{\gamma}. \tag{6.12}$$

pomoću kojih se lakše računaju parcijalne derivacije u Jacobijevoj matrici.

$$J = \frac{\partial f(\vec{u})}{\partial \vec{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f1}{\partial U1} & \frac{\partial f1}{\partial U2} \\ \frac{\partial f2}{\partial U1} & \frac{\partial f2}{\partial U2} \end{pmatrix}. \tag{6.13}$$

Nakon što se izračunaju dobije se matrica u formi

$$J = \begin{pmatrix} -(\gamma+1)P & 1 \\ -\frac{y^2}{\rho^2} - \frac{\gamma P y}{\rho} & \frac{2y}{\rho} - P \end{pmatrix}, \tag{6.14}$$

iz koje se računa determinanta $|J - \lambda I| = 0$ iz koje slijede dva rješenja svojstvene vrijednost (engl**.** *eigenvalues*) čije su vrijednosti:

$$\lambda_1 = v, \qquad \lambda_2 = v - \gamma P. \tag{6.15}$$

Pomoću lambdi dalje se izračunaju svojstvene vrijednosti vektora matrice J (engl. *eigenvector*) u obliku:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ v + (\gamma+1)P \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ v + P \end{pmatrix}. \tag{6.16}$$

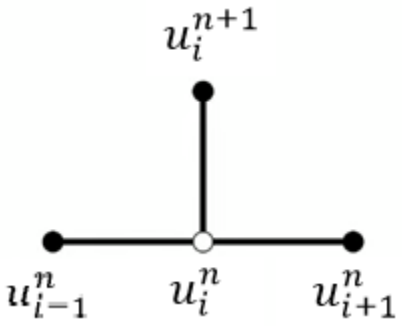
Pošto su vrijednosti obje lambde realne i različite sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi (6.7) i (6.8) je hiperboličnog tipa. Valja napomenuti ako je J konstantna matrica tada je sistem linearan i jedinstveno rješenje je superpozicija valova koji ne djeluju jedan na drugog (jednostavno prođu jedan kroz drugi bez posljedica). U protivnom nelinearan slučaj gdje dolazi do snažnog međudjelovanja između valova nastaju problemi npr. dva vala međusobno mogu: (promijeniti brzinu, veličinu, te mogu generirati novi val).

U postupku koji je prethodio dobivene su određene vrijednosti, a to su svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori koji daju informacije o lokalnom ponašanju rješenja. Te vrijednosti se u nastavku koriste u numeričkoj analizi modela. Zbog teškog pronalaženja jedinstvenog rješenja analitičkim putem kod sustava parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, te zbog lakše implementacije i grafičkog prikaza rezultata u programskom paketu Matlab, u daljnjem djelu je razrađen algoritam numeričkog rješavanja ovog sustava jednadžbi.

Numerička metoda za rješenje sustava jednadžbi

Da bi koristili numeričke metode rješavanja potrebno je koristiti diskretizacijske metode koje aproksimiraju diferencijalne jednadžbe kao sustav algebarskih jednadžbi. One se kao takve mogu riješiti na računalu. Generalno metoda daje vrijednost derivacije u točki uz određenu pogrešku, no ako se Δx uzme dovoljno malen aproksimacija je zadovoljavajuća. Metoda se razlikuje od klasične analitičke metode po tome što ne daje rješenje u obliku funkcije.

Jedna od metoda konačnih razlika (engl. *finite difference method*) koja će biti primijenjena je Lax-Friedrichs shema (engl. *Lax-Friedrichs Scheme*) točnosti prvog reda. Pomoću Lax-ove metode stanje za idući vremenski korak računa se pomoću prethodnih stanja, čvor s praznim kružićem se ne koristi. Slika 6 prikazuje Lax-ovu metodu za dobivanje stanja u sljedećoj vremenskoj iteraciji $(n+1)$ u točki (i), koje se dobije se na temelju stanja prethodnog vremenskog trenutka (n) oko točke (i) tj. uzimaju se vrijednosti stanja u točki prije $(i-1)$ i nakon $(i+1)$. Te se pomoću njih dobije stanje u (i) - toj točki za sljedeći vremenski trenutak $(n+1)$. Metoda je jednostavna za implementaciju, te daje grubu ideju o ponašanju sustava [14].



Slika 6. Čvorovi pomoću kojih se računaju iduća stanja sustava, [14]

Za sustav kao što je (6.7) i (6.8) Lax-Friedrichs shema izgleda:

$$\vec{u}_i^{n+1} = \frac{1}{2}(\vec{u}_{i+1}^n + \vec{u}_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[\vec{f}(\vec{u}_{i+1}^n) - \vec{f}(\vec{u}_{i-1}^n)\right] + O(\Delta t, \Delta x), \tag{6.17}$$

gdje je:

i – prostorni korak;

n – vremenski korak.

Za daljnje računanje potrebno je odrediti najveći dopušteni vremenski korak Δt, za konstantan prostorni korak Δx, prema formuli:

$$\Delta t \leq C\frac{\Delta x}{max|v|}, \tag{6.18}$$

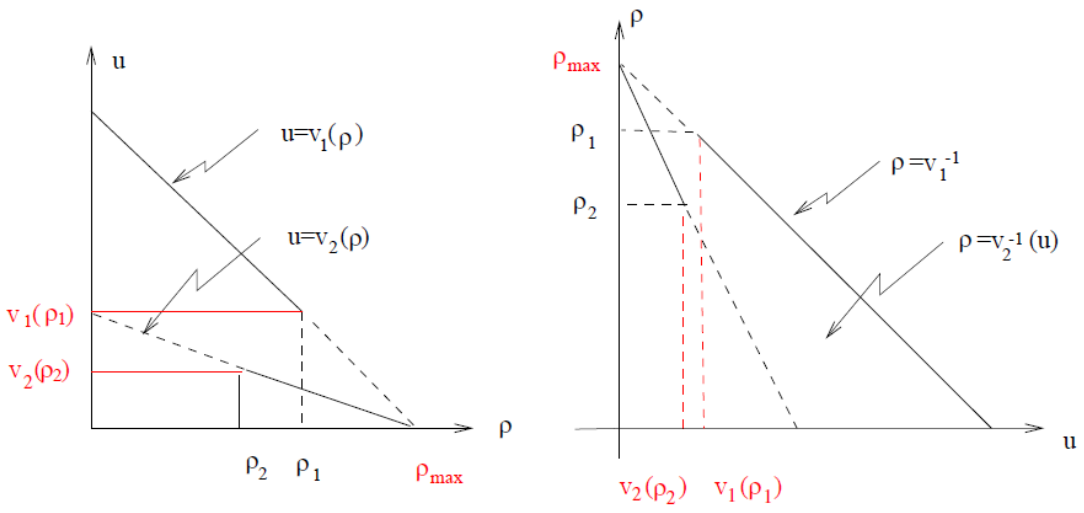
gdje je $C \leq 1$ (engl. *Courant number*). To je uvjet da Lax-Friedrichs shema bude stabilna. Te brzina $max|v| = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$ gdje se uzima maksimalna vrijednost svojstvene vrijednosti. Ograničenje vremenskog koraka za svaku eksplicitnu shemu potrebno je radi stabilnosti simulacije, poznato pod nazivom CFL uvjet (engl. *Courant Friedrichs Lewy*), no čak i kad je uvjet zadovoljen ne mora biti da je shema stabilna. Potrebno je uštimati vremenski korak iteracije Δt kako ne bi došlo do takozvane eksplozije rješenja odnosno neočekivanih oscilacija [14]. Algoritam rješavanja sustava jednadžbi (6.7) i (6.8) slijedi u poglavlju 6.

4.4. Greenberg-Klar-Rascle model prometnica s više prometnih traka

Model uzima u obzir jednosmjernu prometnicu s više prometnih traka, zbog čega su moguća različita stanja u prometu ovisno o gustoći prometa. Dok je razina prometa niska, promjene kolničkih traka i pretjecanje drugih vozila ne predstavlja veći problem. Time je uravnotežena brzina vozila vrlo visoka. Suprotno, kada je razina prometa visoka ove radnje su teže izvedive, tako da opada i uravnotežena brzina vozila. Tipične situacije uključuju dva stanja ujednačene brzine vozila, koja su opisana s dvije linearne funkcije:

$$v = v_1(\rho) > v = v_2(\rho), \quad 0 \leq \rho < \rho_{max}, \tag{7.1}$$

gdje su: v_1 i v_2 monotone padajuće funkcije koje zadovoljavaju uvjet $v_1(\rho_{max}) = v_2(\rho_{max}) = 0$. Gornja krivulja je tipično stabilna za gustoću prometa koja zadovoljava uvjet $0 \leq \rho \leq \rho_1$, dok je donja krivulja stabilna za gustoću ρ koja je u granicama $\rho_2 \leq \rho \leq \rho_{max}$ što je prikazano grafovima na slici 7. Grafovi prikazuju funkcije brzine u ovisnosti o gustoći toka vozila.



Slika 7. Graf uravnoteženih funkcija brzina i gustoća, [15]

Kao što je već spomenuto, kada je gustoća prometa visoka ujednačena krivulja brzine je sporija. S druge strane kada je prometno opterećenje manjeg intenziteta ujednačena krivulja brzine je veća. U model su uključene obje funkcije i mehanizam za prebacivanje o čijim odlukama ovisi režim rada modela. Pomoću mehanizma za prebacivanje omogućeno je vozačima da prelaze iz jednog moda brzine vožnje u drugi ovisno o trenutnoj gustoći prometa. Temeljni opis gustoće vozila ρ zadan je u mjernoj jedinici $[\frac{vozila}{km}]$ i brzina kojoj je mjerna jedinica $[\frac{km}{h}]$. Također, u modelu se pojavljuje izraz:

$$\alpha = u - v_1(\rho), \tag{7.2}$$

koji predstavlja razliku između trenutne brzine vozila i maksimalne brzine u uvjetu kad nema zagušenja. Glavna parcijalna diferencijalna jednadžba dana je izrazom:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \tag{7.3}$$

i

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \begin{cases} -\dfrac{\alpha}{\epsilon}, & \rho < R(u), \\ \dfrac{(v_2 - v_1)(\rho) - \alpha}{\epsilon}, & \rho \geq R(u). \end{cases} \tag{7.4}$$

U jednadžbi (7.4) sljedeći izrazi su:

$u \to R(u)$ – je monotona ne padajuća funkcija koja zadovoljava sljedeći izraz: $R(u) = \rho_2$, $0 \leq u \leq v_2(\rho_2)$ i $R(u) = \rho_1$, $v_1(\rho_1) \leq u$;

ϵ – je mala pozitivna konstanta [4], [15].

4.5. Hiperbolički fazno prijelazni model

Hiperbolički fazno prijelazni model za opis prometa uveo je Colombo 2002. godine. Ovaj model proizlazi iz činjenice da u gužvama parametar gustoće nije dovoljan za opis stanja sustava. Za određenu gustoću brzina vozila nije jednoznačno definirana. Stoga je model opisan dvjema jednadžbama: jednom za slobodan tok, dok druga karakterizira zagušeni tok. Slobodni tok opisan je sljedećim jednadžbama:

$$(\rho, q) \in \Omega_f, \tag{8.1}$$

$$\rho_t + \left[\rho v_f(\rho)\right]_x = 0, \tag{8.2}$$

$$v_f(\rho) = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right) V, \tag{8.3}$$

dok je izraz kojim je opisan zagušen tok dan jednadžbama:

$$(\rho, q) \in \Omega_c, \tag{8.4}$$

$$\rho_t + [\rho v_c(\rho, q)]_x = 0, \tag{8.5}$$

$$q_t + [(q - Q) v_c(\rho, q)]_x = 0, \tag{8.6}$$

$$v_c(\rho, q) = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right)\left(\frac{q}{\rho}\right), \tag{8.7}$$

gdje je:

ρ – gustoća vozila;

v – brzina vozila;

q – otežan tok;

ρ_{max} i V – maksimalna gustoća i brzina vozila;

Q – opterećen protok uravnotežene vrijednosti [4].

5. Prednosti modela drugog reda

U ovom poglavlju navedene su bitne prednosti modela drugog reda u odnosu na modele prvog reda. Modeli prvog reda uglavnom su temeljeni na parametru gustoće prometnog toka. Većina modela drugog reda temeljena je na dinamici brzine zajedno s gustoćom. Razvoj modela drugog reda i njihovo proučavanje u zadnje vrijeme je vrlo aktualno. Unatoč velikom broju modela, praktičnu primjenu u kontroli prometnog toka našlo je samo nekoliko njih. Većina ih služi za teorijska izučavanja vezana za promet.

Zahvaljujući senzornoj tehnologiji (induktivnim petljama) mjerenje prometnog toka na autocestama je vrlo precizno i lagano. S druge strane mjerenje trenutne gustoće (parametar na kojem se temelje modeli prvog reda) na određenom djelu autoceste je znatno složenije i nepreciznije. Zbog toga što modeli drugog reda koriste podatke dinamike toka praktičniji su za primjenu.

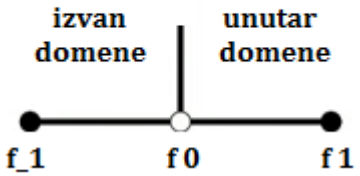
U isto vrijeme dobro je poznato da modeli prvog reda imaju ograničenu sposobnost kod određenih kompliciranijih prometnih pojava. Na primjer, izvorni LWR model griješi kod generiranja padova kapaciteta, histereza, spontanog zagušenja, gužvi i prometnih oscilacija, a to su upravo najčešće pojave na prometnicama. Neki modeli drugog reda mogu dati preciznije projekcije jer kao dodatan parametar uzimaju karakteristike vozača, geometriju ceste, broj prometnih traka, te imaju sposobnost da rade u više režima rada ovisno o prometnom opterećenju prometnice. Kao primjer može poslužiti Greenberg-Klar-Rascle model prometnica s više prometnih traka koji radi u dva režima. Pomoću modela drugog reda lakše je upravljati varijabilnim prometnim znakovima i priljevnim tokovima jer je njihova estimacija stanja na određenom dijelu autoceste točnija.

Ovdje valja navesti neke od prednosti AW-Rascle model koji se široko koristi za proučavanje fenomena nastajanja gužvi i njene dinamike širenja. Model rješava očite nedorečenosti i objašnjava nestabilnosti u prometnom toku vozila. Posebno u područjima gdje nastaju praznine, nastale u blizini nekolicine sporijih vozača koji

stvaraju prazan prostor na prometnici. Sa svojim karakteristikama model je temelj za modele s više prometnih traka. Također AW-Rascle model pokazuje bolje rezultate za realne podatke (za isti skup fizičkih podataka) od LWR modela. Model ima mogućnost dodavanja faznog prijelaza, što omogućuje ispravljanje nekih nedostataka izvornog modela. Dodavanjem čvorišta u kombinaciji s AW-Rascle modelom daje cjelovit opis razvoja prometa na cestovnoj mreži.

6. Mogućnosti implementacije u programskom paketu Matlab

Prvi korak implementacije Aw-Rascle modela u programskom paketu Matlab predstavlja definicija graničnih uvjeta. Granični uvjeti prolaznog toka kroz domenu, definirani su tako da prometni tok prođe kroz domenu tj. uđe na ulazni čvor i izađe na izlazni kao da ga nije ni bilo. Ovo je pojednostavljen pristup gdje se u obzir ne uzimaju refleksije i ulazna ograničenja toka. Izlazni tok vozila iz svakog čvora definiran je tako da jednostavno otpusti val vozila iz domene bez kreiranja reflektirajućih valova. Iz toga proizlazi da kad god se pristupi vrijednosti izvan domene za definiranje nepoznatog stanja vektora toka f_{-1} uzet će se da je njegova vrijednost jednaka izlaznom čvoru f_1 na poznatoj domeni, a ne ulaznom čvoru f_0. To je ilustrativno prikazano na sljedećoj slici. Ista je stvar s izlazom, te također ovo pravilo vrijedi i za brzinu [16].



Slika 8. Prikaz uvjeta izvan i unutar domene, [14]

Generalno za rubne uvjete brzine će vrijediti:

$$u_{-1} = u_1, \tag{9.1}$$

$$u_{n+1} = u_{n-1}, \tag{9.2}$$

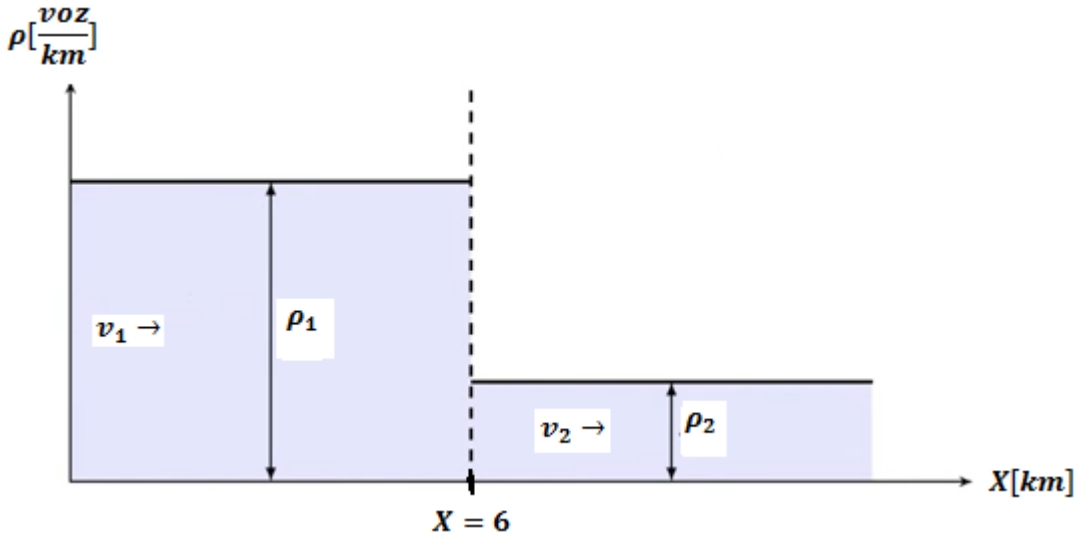
za prometni tok:

$$f_{-1} = f_{1,} \tag{9.3}$$

$$f_{n+1} = f_{n-1.} \tag{9.4}$$

6.1. Postupak ručnog izračuna

Prije samog računanja grafički je predočen problem koji se računa. Dionica ceste podijeljena je na pet jednakih dijelova. Promatrat će se čvorovi razmaknuti za $\Delta x = 3[km]$. Od $0 - 6[km]$ zadana je početna brzina toka i početna gustoća. Isto tako za dio ceste od $6 - 15[km]$, što je vidljivo na slici 9. Pomoću Lax-Friedrichs metode izračunate su vrijednosti u svakom čvoru uz zadane početne uvjete za vremenski trenutak $t = n = 0$.



Slika 9. Pojednostavljen primjer prometnog toka s dva stanja lijevo i desno od točke X=6 [km]

Prije samog računanja potrebno je odrediti vrijednost vektora

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ y \end{pmatrix},$$

$$f(\vec{u}) = \begin{pmatrix} y - \rho P \\ \frac{y^2}{\rho} - yP \end{pmatrix}$$

u određenim točkama koje definira korak $\Delta x = 3\ [km]$ od $0 - 15\ [km]$. Nakon toga se dobiveni podatci zapišu u tablicu radi bolje preglednosti. Osim toga potrebno je izračunati vremenski inkrement Δt koji mora zadovoljavati CFL uvjet stabilnosti. Interval na kojemu su definirani uvjeti $X \in [0, L]$, gdje je $L = 15\ [km]$. Za interval $0 \leq X < 6$ vrijede sljedeći uvjeti:

$$v_1 = 50 \left[\frac{km}{h}\right],$$

$$\rho_1 = 160 \left[\frac{voz}{km}\right],$$

iz kojih se dalje izračunaju:

$P(\rho) = C_0^2 \rho^\gamma = 160^{0,3} = 4{,}584,$

$y = \rho(v + P) = 160(50 + 4{,}584) = 8733,$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 \\ 8733 \end{pmatrix},$$

$$f(\vec{u}) = \begin{pmatrix} y - \rho P \\ \frac{y^2}{\rho} - yP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8000 \\ 436626 \end{pmatrix},$$

za interval $6 \leq X < 15$ zadani su sljedeći uvjeti:

$$v_2 = 80 \left[\frac{km}{h}\right],$$

$$\rho_2 = 90 \left[\frac{voz}{km}\right],$$

analogno prethodnom postupku dobiju se vrijednost vektora za ovaj interval:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 7547 \end{pmatrix},$$

$$f(\vec{u}) = \begin{pmatrix} y - \rho P \\ \frac{y^2}{\rho} - yP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7200 \\ 603748 \end{pmatrix}.$$

Određivanje vremenskog koraka prema sljedećoj formuli:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\max(|v|, |v - \gamma P|)} = \frac{\Delta x}{|v_2|} = \frac{3}{80} = 0{,}0375\ [h],$$

gdje je:

$\Delta x = 3[km]$.

Sada se konstruira tablica (Tablica 1) pomoću koje su ove izračunate vrijednosti pregledno posložene u odnosu na interval kojem pripadaju.

Tablica 1. Vrijednosti početnih vektora toka vozila i brzine u određenom čvoru tj. poziciji

i	0	1	2	3	4	5
X	0	3	6	9	12	15
$\underline{u}^0$	$\begin{pmatrix}160\\8733\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}160\\8733\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}160\\8733\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}90\\7547\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}90\\7547\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}90\\7547\end{pmatrix}$
$\underline{f}(\underline{u}^0)$	$\begin{pmatrix}8000\\436626\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}8000\\436626\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}8000\\436626\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7200\\603748\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7200\\603748\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7200\\603748\end{pmatrix}$

Ovdje su:

i – indeks koji označava korak prostorne iteracije;

$X -$ položaj čvora;

$\underline{u}^0 -$ stanje vektora $\vec{u}$ za početni uvjet u svakom čvoru;

$\underline{f}(\underline{u}^0) -$ stanje vektora $\vec{f}$ za početni uvjet u svakom čvoru.

Sada se iz formule (6.21) uz poznate vrijednosti može konačno napisati generalna formula za postupak iteracija koja izgleda:

$$\vec{u}_i^{n+1} = \frac{1}{2}(\vec{u}_{i+1}^n + \vec{u}_{i-1}^n) - \frac{1}{160}[\vec{f}(\vec{u}_{i+1}^n) - \vec{f}(\vec{u}_{i-1}^n)]. \tag{9.1}$$

Računanje iteracija započinje iz čvora $i = 0$, i vremenskog trenutka $n = 0$. Kroz sljedeće iteracije mijenjat će se samo čvorovi, a vrijeme ostaje zamrznuto te u svakom čvoru vladaju definirana početna stanja.

Za $i = 0$:

$$\vec{u}_0^1 = \frac{1}{2}(\vec{u}_1^0 + \vec{u}_{-1}^0) - \frac{1}{160}\left[\vec{f}(\vec{u}_1^0) - \vec{f}(\vec{u}_{-1}^0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}160\\8733\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}160\\8733\end{pmatrix}\right] - \underbrace{\frac{1}{160}\left[\begin{pmatrix}8000\\436626\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8000\\436626\end{pmatrix}\right]}_{0} = \begin{pmatrix}160\\8733\end{pmatrix}.$$

Podvučeni dio jednadžbe jednak je nuli, pa je krajnje stanje nepromijenjeno.

Za $i = 1$:

$$\vec{u}_1^1 = \begin{pmatrix}160\\8733\end{pmatrix}.$$

Analogno prethodnoj iteraciji izračunata je i ova čiji je rezultat identičan prethodnom rezultatu.

Za $i = 2$:

$$\vec{u}_2^1 = \frac{1}{2}(\vec{u}_3^0 + \vec{u}_1^0) - \frac{1}{160}\left[\vec{f}(\vec{u}_3^0) - \vec{f}(\vec{u}_1^0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}90\\7547\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}160\\8733\end{pmatrix}\right] - \frac{1}{160}\left[\begin{pmatrix}7200\\603748\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8000\\436626\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}130\\7096\end{pmatrix}.$$

U ovoj iteraciji krajnji desni dio nije jednak nuli, zbog čega se stanje vektora nešto promijenilo u odnosu na prethodne dvije iteracije. To se javlja zbog razlike početnog stanja prometnog toka u čvoru 3 u odnosu na čvor 1.

Za $i = 3$:

$$\vec{u}_3^1 = \frac{1}{2}(\vec{u}_4^0 + \vec{u}_2^0) - \frac{1}{160}\left[\vec{f}(\vec{u}_4^0) - \vec{f}(\vec{u}_2^0)\right] = \begin{pmatrix}130\\7096\end{pmatrix}.$$

U ovoj iteraciji postupak nije ponovno pisan jer je identičan prethodnom. I rezultat je jednak kao u prethodnom jer još uvijek postoji razlika u stanju prometnog toka između čvora 4 i 2.

Za $i = 4$:

$$\vec{u}_4^1 = \frac{1}{2}(\vec{u}_5^0 + \vec{u}_3^0) - \frac{1}{160}\left[\vec{f}(\vec{u}_5^0) - \vec{f}(\vec{u}_3^0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}90\\7547\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}90\\7547\end{pmatrix}\right] - \underbrace{\frac{1}{160}\left[\begin{pmatrix}7200\\603748\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7200\\603748\end{pmatrix}\right]} = \begin{pmatrix}90\\7547\end{pmatrix}.$$

U ovoj iteraciji podvučeni dio jednak je nuli što upućuje na to da se oba čvora nalaze u istim uvjetima, te se vrijednost vektora ne mijenja.

Za $i = 5$:

$$\vec{u}_5^1 = \frac{1}{2}(\vec{u}_6^0 + \vec{u}_4^0) - \frac{1}{160}\left[\vec{f}(\vec{u}_6^0) - \vec{f}(\vec{u}_4^0)\right] = \begin{pmatrix} 90 \\ 7547 \end{pmatrix}.$$

Računski postupak za zadnju iteraciju identičan je prethodnom, tj. rezultat je isti.

Analiza dobivenih podataka

Oko prijelomne točke tj. oko čvora kada je $X = 6[km]$ iz slike 9 vidi se da je to mjesto razlike stanja gustoće i brzine prometnog toka. Dobiveni podatci za drugu i treću iteraciju opisuju promjene u okolišu te točke. To se može vidjeti kroz analizu vektora:

$$\vec{u}_2^1 = \vec{u}_3^1 = \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 \\ 7096 \end{pmatrix},$$

gdje je:

$$\tilde{\rho} = 130\left[\frac{voz}{km}\right];$$

$$\tilde{y} = \tilde{\rho}\left(\tilde{v} + P(\tilde{\rho})\right) = 7096.$$

Iz $\tilde{y}$ se dobije brzina $\tilde{v}$, na sljedeći način:

$$130\left(\tilde{v} + P(\tilde{\rho})\right) = 7096,$$

$$\tilde{v} = \frac{7096}{130} - P(\tilde{\rho}),$$

ovdje je $P(\tilde{\rho}) = C_0^2\tilde{\rho}^{\gamma} = 130^{0,3} = 4{,}307,$

$$C_0^2 = 1,$$

$$\gamma = 0{,}3\ .$$

Konačno za brzinu i gustoću dobiveni su podatci:

$$\tilde{\rho} = 130 \left[\frac{voz}{km}\right];$$

$$\tilde{v} = 50{,}277 \left[\frac{km}{h}\right].$$

Iz dobivenih podataka vidi se da je brzina ovisna o prometnoj gustoći što se vidi i iz formule $\tilde{v} = \frac{7096}{130} - P(\tilde{\rho})$, gdje je funkcija $P(\tilde{\rho})$, često u literaturama zvana kao tlak, ovisna o gustoći i direktno umanjuje brzinu s porastom gustoće. S dolaskom vozila na manje opterećen dio prometnice povećava im se brzina. U primjeru je zadana velika razlika brzine i gustoće s naglom promjenom za $X = 6\,[km]$. U realnim situacijama takve promjene su postepene te se često početni uvjeti te distribucija toka ravna po određenoj razdiobi npr. normalnoj (Gaussova razdioba). U ovom slučaju promatrana dionica prometnice služi kao ilustrativan primjer pomoću kojeg je na jednostavan način predočen algoritam rada numeričke Lax-Friedrichs metode. Podatci o gustoći i brzini su odabrani proizvoljno. Parametar γ mora biti pozitivan ovisno o ostalim uvjetima odabire se pogodna vrijednost tog parametra. Vrijednost varira od literature gdje su prezentirane simulacije AW-Rascle modela u Matlab paketu. Te se vrijednosti kreću od 0,3 negdje do 1,4. U ovom primjeru uzeta je vrijednost $\gamma = 0{,}3$.

U simulacijama modela u programskom paketu Matlaba potrebno je dobro definirati granične uvjete. Zbog brzine računala broj iteracija je puno veći čime je realističnije predočena dinamika toka. Potrebno je dobro odrediti vremenski korak iteracije Δt kako ne bi došlo do takozvane eksplozije rješenja, odnosno neočekivanih oscilacija. U sljedećem potpoglavlju ovaj ručni računski postupak implementiran je u programski paket Matlab.

6.2. Koncept implementacije u Matlabu

Na početku su definirane varijable s identičnim vrijednostima kao u prethodnom postupku gdje je izračunata ručno jedna potpuna iteracija kroz sve čvorove za jedan vremenski trenutak. Zadan je vektor početnog stanja brzine i

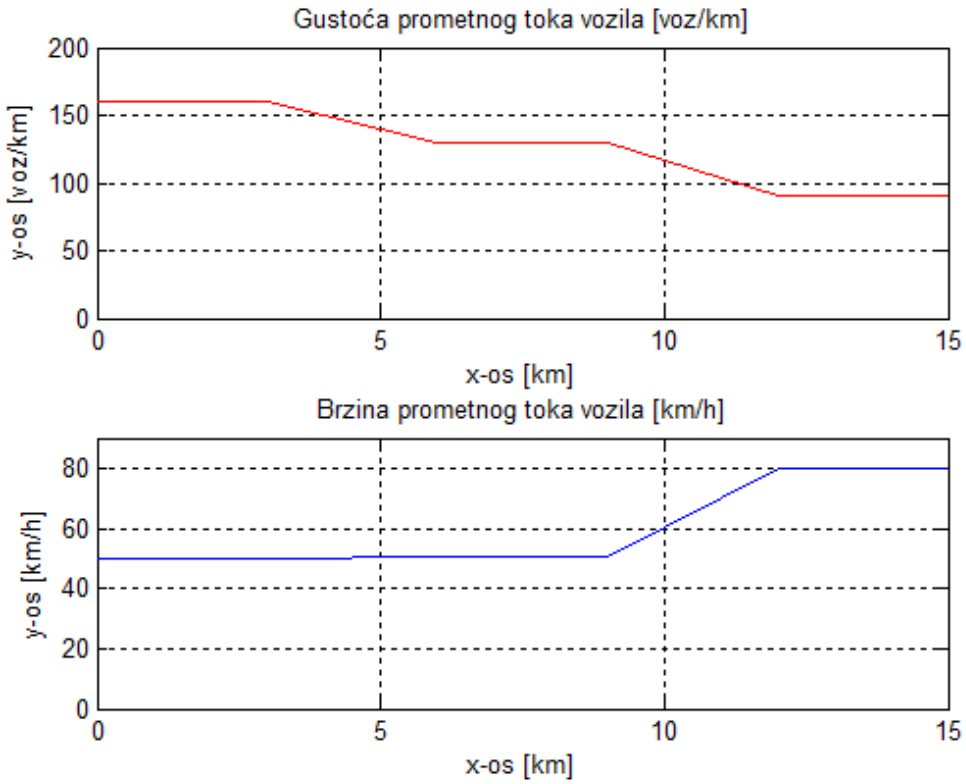
gustoće kako je to prikazano u tablici 1 iz prethodnog potpoglavlja. U Matlab skripti definirano je pet vremenskih obilazaka svih čvorova. Nakon što se obiđu svi čvorovi u prvoj iteraciji podaci se pohranjuju tj. ažuriraju te se isti koriste za izračun u sljedećoj vremenskoj iteraciji. I tako sve dok se ne prođe svih pet iteracija. Skripta je generirana tako da se većina podataka unosi ručno što olakšava kreiranje koda. Od izlaznih rezultata koji se na kraju ispisuju interesantan je podatak gustoće prometnog toka, te brzine vozila za pojedini dio prometnice koja je u ovisnosti s gustoćom toka vozila. Svaki čvor od `u(0)` sve do `u(5)` poprima određene vrijednosti, prvo se ispisuje gustoća vozila p, pa parametar koji opisuje protok y, te na kraju brzina vozila v i tako redom kroz pet koraka.

Iz tablice 2 može se zaključiti da vozila koja u početku voze većom brzinom $80\ [\frac{km}{h}]$ kroz dvije iteracije napuštaju promatrani dio prometnice te ju popunjava prometni tok veće gustoće. Svaka nova iteracija predstavlja realni vremenski period od $dt = 0{,}0375\ [h]$. Vozila s definiranom početnom brzinom od $80\ [\frac{km}{h}]$ za vrijeme dt prijeđu $3\ [km]$, dok ona s brzinom od $50\ [km/h]$ prijeđu $1{,}874\ [km]$. Ti podaci se slažu s prikazom stanja prometnog toka na izlaznim grafovima gustoće i brzine prometnog toka koji su prikazani u nastavku. Nakon simuliranog većeg broja iteracija dolazi do ustaljenja prometnog toka koji se podjednako raspodijeli, te do ujednačenja brizne vozila. Prikaz vrijednosti navedenih varijabli za svaku vremensku iteraciju kroz zadane čvorove dan je u (Tablica 2).

Tablica 2. Izlazni podatci za čvorove kroz pet iteracija

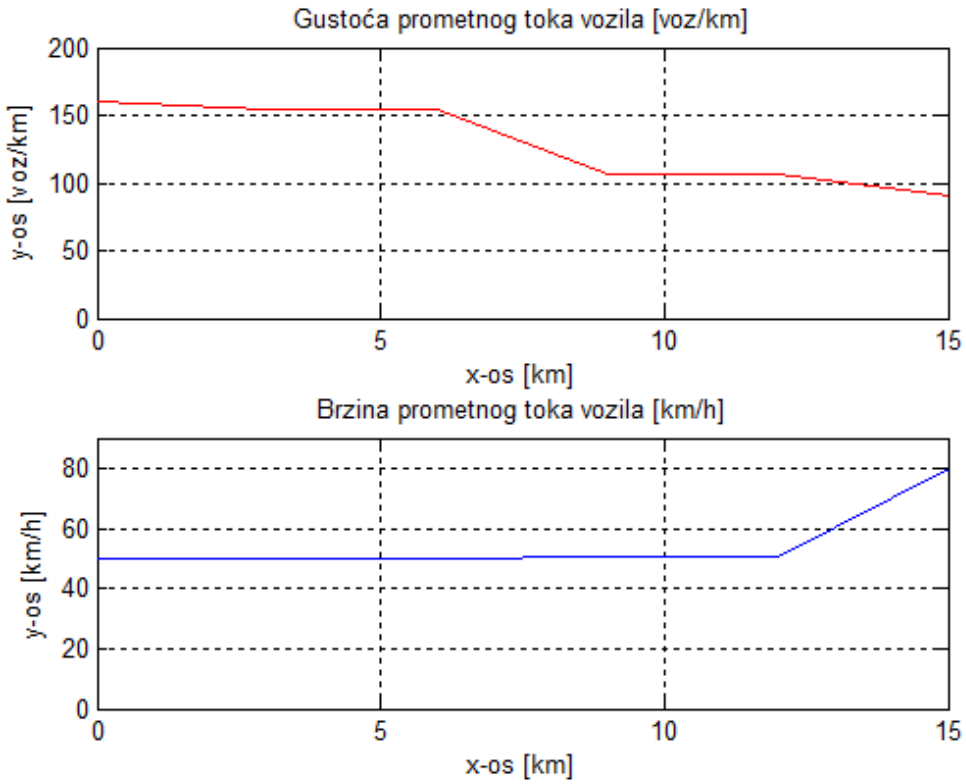
	$u(0)$	$u(1)$	$u(2)$	$u(3)$	$u(4)$	$u(5)$
p y v	160 8733 50,000	160 8733 50,000	130 7096 50,277	130 7096 50,277	90 7547 80,000	90 7547 80,000
p y v	160 8733 50,000	154 8414 50,051	154 8414 50,051	106 5778 50,534	106 5778 50,534	90 7547 80,000
p y v	159 8671 50,010	159 8671 50,010	145 7903 50,135	145 7903 50,135	86 4714 50,774	106 5778 50,534
p y v	159 8671 50,010	156 8521 50,034	156 8521 50,034	134 7289 50,242	137 7492 50,206	86 4714 50,774
p y v	158 8641 50,015	158 8641 50,015	152 8281 50,073	152 8320 50,066	124 6794 50,333	137 7492 50,206

Kao što je već prije naglašeno u izvedbi ove numeričke metode nisu u obzir uzeti valovi zagušenja, te valovi otpuštanja broja vozila koji bi zasigurno promijenili vrijednosti dobivenih rezultata. Za rubne uvjete pretpostavljen je slobodan ulaz prometnog toka vozila i izlaz, tj. koliko ih uđe na jednom čvoru toliko ih mora izaći iz promatranog djela prometnice. Na sljedećem grafu (Grafikon 1) prikazana je ovisnost gustoće prometnog toka o položaju, te kretanje parametra brzine koji se mijenja s prostornom promjenom gustoće toka vozila. Krivulje gustoće i brzine iz grafa reprezentiraju stanje toka u prvoj iteraciji, što potkrepljuju podaci p i v iz prvog retka tablice 2.



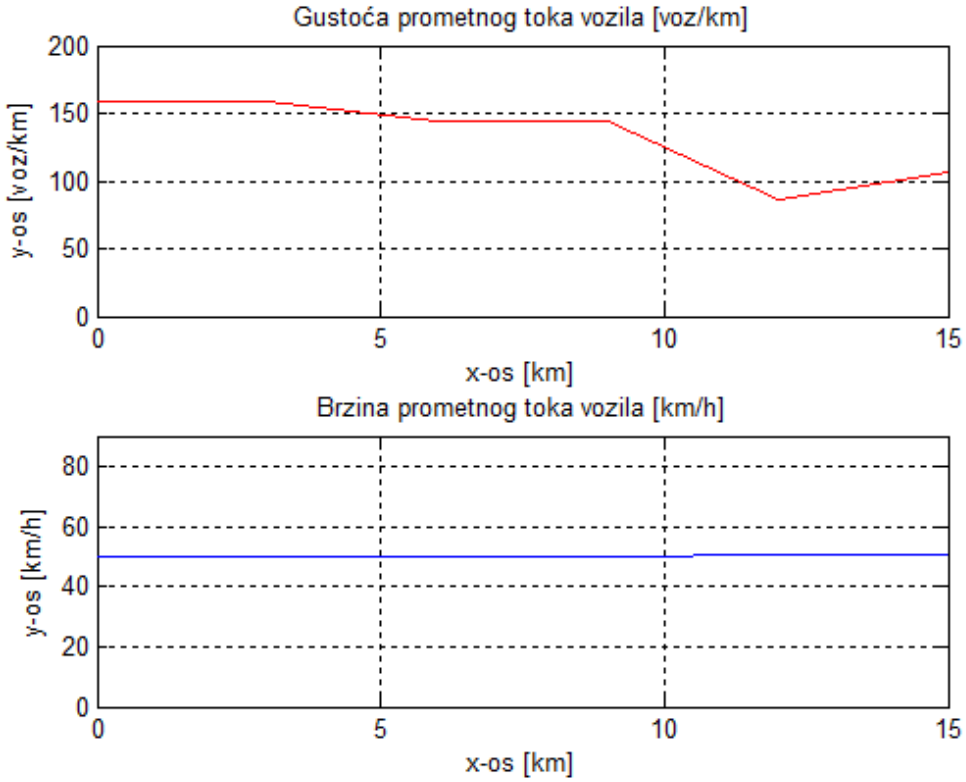
Grafikon 1. Graf gustoće i brzine prometnog toka vozila, prva iteracija

Za vrijeme sljedeće iteracije vidi se kako početni tok s manjom gustoćom, a većom početnom brzinom djelomično napušta promatrani odsječak prometnice tj. prolazi kroz izlazni čvor (Grafikon 2). Na mjesto manje gustoće pristiže prometni tok s manjom brzinom, ali većim brojem vozila po kilometru promatrane dionice.

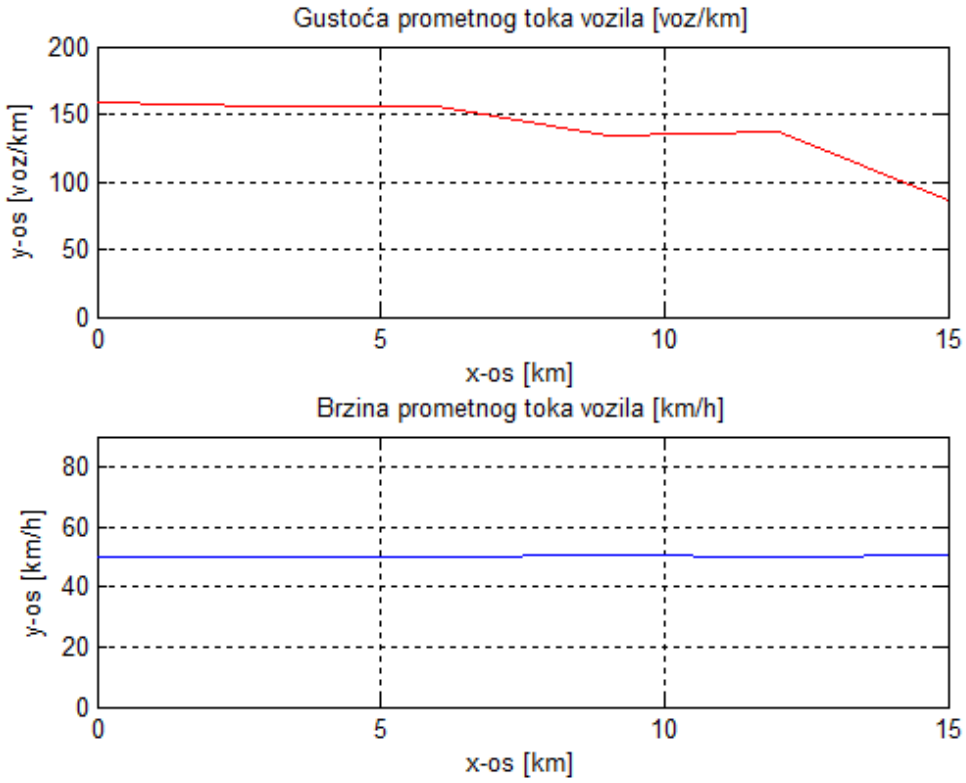


Grafikon 2. Graf gustoće i brzine prometnog toka vozila, druga iteracija

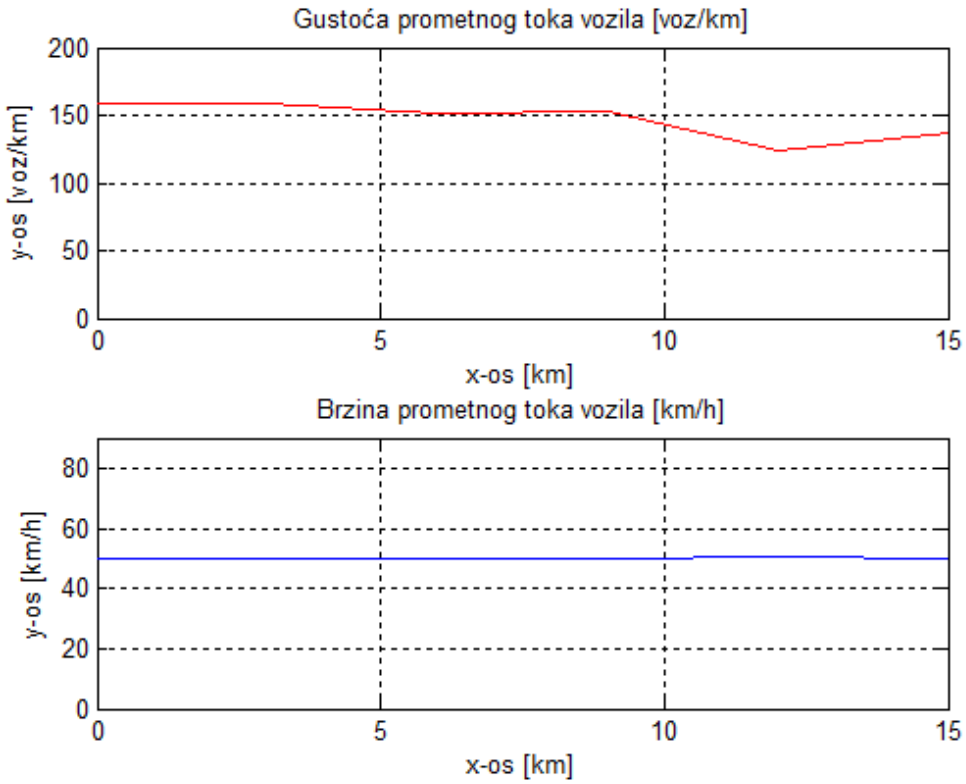
Na sljedećim grafovima prikazane su krivulje stanja prometnog toka za treću i četvrtu iteraciju (Grafikoni 3 i 4). U petoj iteraciji iz grafa (Grafikon 5) vidi se postupno ujednačenje prometne gustoće. Promatrani dio prometnice popunio se s nadolazećim prometnim tokom vozila veće gustoće, te dolazi do postupnog ustaljenja brzine prometnog toka na predefiniranu brzinu za tu gustoću toka vozila.



Grafikon 3. Graf gustoće i brzine prometnog toka vozila, treća iteracija



Grafikon 4. Graf gustoće i brzine prometnog toka vozila, četvrta iteracija



Grafikon 5. Graf gustoće i brzine prometnog toka vozila, peta iteracija

Nakon izračuna većeg broja iteracija u Matlab-u dolazi do potpunog ujednačavanja gustoće toka te ustaljenja brzine vozila na $50\ [\frac{km}{h}]$, što se može zaključiti već iz prikazanih prvih pet iteracija. Valja naglasiti da je simulacija modela koncipirana na slobodnim granicama i nema diskontinuiteta u prometnom toku. Iz analize dobivenih rezultata većeg broja iteracija proizlazi činjenica da ne dolazi do takozvanih eksplozija rješenja, tj. neželjenih oscilacija i raspršenja, što je čest slučaj kod simuliranja modela numeričkim metodama ako vrijeme diskretizacije nije dobro određeno.

7. Zaključak

Razvoj modela za modeliranje cestovnih mreža jedan je od glavnih preduvjeta kvalitetnih simulacijskih procesa za predviđanje stanja prometnog toka na određenoj dionici prometnice. Općenit problem je da su modeli za modeliranje cestovne mreže zasnovani na matematičkim jednadžbama. One opisuju stanja prometnog toka (makroskopska svojstva prometa) koja se usko oslanjaju na teoriju protjecanja fluida (nestlačivost fluida). Zbog svojstava prometnog toka koja se razlikuju od svojstava protjecanja fluida, potrebno je dodatno prilagoditi prometne modele. U tom pogledu postoje različita stajališta stručne i znanstvene zajednice. Drugim riječima postoji više pristupa rješavanju ovog problema pa su iz tog razloga i razvijeni različiti prometni modeli. Dodatne prilagodbe prometnih modela uključuju i dodatne jednadžbe koje opisuju te prilagodbe, što ih čini težima za rješavanje. Klasična analitička analiza takvih sustava tj. prometnih modela koji ih opisuju je vrlo teška, zbog čega se koriste numeričke analize. Prednosti numeričkih metoda karakterizira relativno jednostavan slijed koraka u izračunu. Uz primjenu računala moguće je na efikasan način dobiti približna rješenja, koja odstupaju od egzaktnog rješenja za određenu grešku. Vrijednost pogreške ovisi o odabranoj numeričkoj metodi, te o broju iteracija između čvorova.

Numeričkom analizom AW-Rascle modela drugog reda zasnovanog na sustavu dviju parcijalnih diferencijalnih jednadžbi dobiveni su aproksimacijski podaci za ponašanje dvaju različitih stanja prometnog toka na određenom isječku dionice prometnice. Iz dobivenih podataka je moguće zaključiti da postoji izravna povezanost brzine vozila u odnosu na gustoću prometnog toka vozila. Kao krajnji zaključak može se reći da modeli drugog reda daju realniji prikaz kretanja prometnih parametara, u odnosu na modele prvog reda, ali ih je teže implementirati u programski paket Matlab. Kao prijedlog za daljnji rad bio bi nastavak rada na ovom prometnom modelu kroz dodavanje rubnih uvjeta i definiranje područja diskontinuiteta. Također se preporuča izrada simulacije sa 3-D prikazom prostora uz korištenje stvarnih prometnih podataka.

Literatura

[1] Kogan, B. J., Introduction to Computational Cardiology: Mathematical Modeling and Computer Simulation, DOI 10.1007/978-0-387-76686-7_2, 2010.

[2] Mathew, T. V.; Transportation Systems Engineering, Cell Transmission Models, IIT Bombay, 2014.

[3] Breški, D.; Cvitanić, D.; Vukušić, P.; Izrada prometne analize, Primjena simulacijskih modela pri izradi prometne analize, GRAĐEVINAR 62 (2010) 2, 113-122.

[4] Garavello, M.; Piccoli, B.; Networks and heterogeneous media, On fluido-dynamic models for urban traffic, doi:10.3934/nhm.2009.4.107, pp. 107–126, 2009.

[5] Gregurić, M.; Ivanjko, E.; Buntić, M.; Manđuka, S.; State of the Art: Ramp Metering Algorithms, Tehničko izvješće Nr. A1-01, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 2013.

[6] Chris M. J. Tampère, Human-Kinetic Multiclass Traffic Flow Theory and Modelling (With Application to Advanced Driver Assistance Systems in Congestion), Ph.D.dissertation, Delft University of Technology, Netherlands, 2004.

[7] Dadić, I.; Kos, G.; Teorija i organizacija prometnih tokova, Fakultet prometnih znanost, Zagreb, 2007.

[8] Lu, X. Y.; Varaiya.P; Horowitz, R.; An Equivalent Second Order Model Based on Flow and Speed, U. C., Berkeley, University of California, 2009.

[9] Li, J.; Cheny, Q.Y.; Wang, H.; Ni, D.; Analysis of LWR model with fundamental diagram subject to uncertainties, University of Massachusetts Amherst, USA, 2011.

[10] Bellemans, T.; De Schutter, B.; De Moor, B.; Models for traffic control, Technical report bds:01-11, Journal A, vol. 43, no. 3–4, pp. 13–22, 2002., Delft University of Technology, Netherlands, 2002.

[11] Haut, B.; Bastin, G.; A second order model for road traffic networks, IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems, Vienna, Austria, 2005.

[12] Shen, C.; Sun,M.; Formation of delta shocks and vacuum states in the vanishing pressure limit of Riemann solutions to the perturbed Aw–Rascle model, Journal of Differential Equations 249 (2010) 3024–3051.

[13] Morgan, J. V.; Numerical Methods For Macroscopic Traffic Models, The University of Reading department of mathematics, 2002.

[14] Numerical Methods for Partial Differential Equations. Dostupno na: https://www.youtube.com/watch?v=P83-rwGkDuo (27. lipnja 2015.)

[15] Greenberg, J. M.; Klar, A.; Rascle, M.; Congestion on Multilane Highways, SIAM J. Appl. Math., 63(3), 818–833.

[16] Numerical Methods for Partial Differential Equations. Dostupno na: https://www.youtube.com/watch?v=--UgN7BKPNM (27. lipnja 2015.)

Popis kratica

CTM	(Cell Transmission Model) ćelijski prijenosni prometni model prvog reda
LWR	(Lighthill-Whitham-Richards) prometni model prvog reda
CFL	(Courant Friedrichs Lewy) Courant-ov uvjet stabilnosti numeričkih metoda

Popis slika

Slika 1. Primjer empirijski zasnovanih dijagrama, [6] 6

Slika 2. Diskretizacija prometnice u ćelije, [2]..... 9

Slika 3. Priključivanje upravljanog priljevnog toka na glavni tok i završetak prometne trake na autocesti, [10]..... 15

Slika 4. Valovi povezuju lijevo stanje sa srednjim stanjem u rješenju Riemann-ovog problema, [11]..... 18

Slika 5. Početno i srednje stanje grafa (ρ,ρv) za Riemann-ov problem, [11] 19

Slika 6. Čvorovi pomoću kojih se računaju iduća stanja sustava, [14] 22

Slika 7. Graf uravnoteženih funkcija brzina i gustoća, [15] 23

Slika 8. Prikaz uvjeta izvan i unutar domene, [14]..... 28

Slika 9. Pojednostavljen primjer prometnog toka s dva stanja lijevo i desno od točke X=6 [km]..... 29

Popis tablica

Tablica 1. Vrijednosti početnih vektora toka vozila i brzine u određenom čvoru tj. poziciji 31

Tablica 2. Izlazni podatci za čvorove kroz pet iteracija..... 36

Popis grafikona

Grafikon 1. Graf gustoće i brzine prometnog toka vozila, prva iteracija 37

Grafikon 2. Graf gustoće i brzine prometnog toka vozila, druga iteracija 38

Grafikon 3. Graf gustoće i brzine prometnog toka vozila, treća iteracija..... 39

Grafikon 4. Graf gustoće i brzine prometnog toka vozila, četvrta iteracija..... 39

Grafikon 5. Graf gustoće i brzine prometnog toka vozila, peta iteracija..... 40

Prilog

Matlab skripta sa implementiranim AW-Rascle modelom.

```
function AWR
clear all
close all
clc
N = 5;                                  % broj čvorova - 1
vmax = 80;                              % maksimalna brzina[km/h]
xmin = 0;                               % početni položaj
xmax = 15;                              % krajnji položaj
dx = (xmax - xmin)/N;                   % udaljenost između čvorova
dt = dx /vmax;
x = xmin:dx:xmax;
pauza = 5;                              % pauza između iteracije
ljevagranica = 0;                       % koliko uđe toliko izađe vozila
desnagranica = 0;
pnp1(N) = zeros;                        % vrijednosti početnih vektora
ynp1(N) = zeros;
p = [160 160 160 90 90 90];             % vektor gustoće
v = [50 50 50 80 80 80];                % vektor brzine
[p,v] = granica(p,v, ljevagranica, desnagranica,N);
[u1, u2, f1, f2] = zavisne(p,v);
for i = 1 : N+1    % inicijalizacija čvorova kod ispisa
    fprintf('                  u(%1i)',i-1)
end
```

```
fprintf('\n')
for n = 1: 5
% formula s kojom se računaju numeričke vrijednosti iteracija
    for i = 2 : N+2
        pnp1(i) = 0.5*(u1(i + 1) + u1(i - 1)) - 0.5 * (dt/dx) *
(f1(i+1) - f1(i-1));
        ynp1(i) = 0.5*(u2(i + 1) + u2(i - 1)) - 0.5 * (dt/dx)
*(f2(i+1) - f2(i-1));
    end
    fprintf('\n  (p)') % ispis gustoće i vrij. prometnog toka
    for i = 2:N+2
        fprintf('     % 6.f          ', pnp1(i) )
    end
    fprintf('\n  (y)')
    for i = 2:N+2
        fprintf('      %6.f         ', ynp1(i) )
    end
    fprintf('\n  (v)')
    [p, v] = azuriranevariable(pnp1,ynp1,N, ljevagranica,
desnagranica);
    [u1, u2, f1, f2] = zavisne(p,v);
    subplot(2,1,1) % grafovi brzine i gustoće prometnog toka
    plot(x,p(2:N+2),' r ')
    title('Gustoća prometnog toka vozila [voz/km]')
    xlabel('x-os [km]')
    ylabel('y-os [voz/km]')
    axis([0 15  0 200])
    grid on
    subplot(2,1,2)
    plot(x,v(2:N+2),' b ')
```

```
    title('Brzina prometnog toka vozila [km/h]')
    xlabel('x-os [km]')
    ylabel('y-os [km/h]')
    axis  ([0 15 0 90])
    grid on
    pause(pauza)
end
end
function[u1, u2, f1, f2] = zavisne(p,v) % zavisne varijable
u1 = p;
u2 = p.*(v+p.^0.3);
f1 =( p.*(v+p.^0.3))-p.*p.^0.3;
f2 = (p.*(v+p.^0.3).^2)-(p.*(v+p.^0.3).*p.^0.3);
end
% ažuriranje zavisnih varijabli
function[p,v] = azuriranevariable(pnp1,ynp1,N, ljevagranica,
desnagranica)
p = pnp1(2:N+2);
v = (ynp1(2:N+2)./pnp1(2:N+2))-(pnp1(2:N+2)).^0.3;
[p, v] = granica(p,v, ljevagranica, desnagranica,N);
for i = 2:N+2
    fprintf('       %2.3f       ',v(i))  % ispis brzine
end
fprintf('\n\n')
end
% uvjet na granice
function [p,v] = granica(p,v, ljevagranica, desnagranica,N)
if ljevagranica == 0 && desnagranica == 0
    p = [p(1), p, p(N)];
```

```
    v = [v(1), v, v(N)];
end
end
```

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet prometnih znanosti
10000 Zagreb
Vukelićeva 4

METAPODACI

Naslov rada: Mogućnosti primjene modela drugog reda za modeliranje cestovne mreže

Autor: Krešimir Kušić
Mentor: doc. dr. sc. Edouard Ivanjko

Naslov na drugom jeziku (engleski):
Application possibilities of second order models for road transport network modelling

Povjerenstvo za obranu:

- prof. dr. sc. Sadko Mandžuka , predsjednik
- doc. dr. sc. Edouard Ivanjko , mentor
- dr. sc. Miroslav Vujić , član
- prof. dr. sc. Hrvoje Gold , zamjena

Ustanova koja je dodjelila akademski stupanj: Fakultet prometnih znanosti Sveučilišta u Zagrebu
Zavod: Zavod za inteligentne transportne sustave
Vrsta studija: sveučilišni
Naziv studijskog programa: Inteligentni transportni sustavi i logistika
Stupanj: preddiplomski
Akademski naziv: univ. bacc. ing. traff.
Datum obrane završnog rada: **15. do 17. rujna 2015.**

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet prometnih znanosti
10000 Zagreb
Vukelićeva 4

IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI I SUGLASNOST

Izjavljujem i svojim potpisom potvrđujem kako je ovaj završni rad isključivo rezultat mog vlastitog rada koji se temelji na mojim istraživanjima i oslanja se na objavljenu literaturu što pokazuju korištene bilješke i bibliografija.

Izjavljujem kako nijedan dio rada nije napisan na nedozvoljen način, niti je prepisan iz necitiranog rada, te nijedan dio rada ne krši bilo čija autorska prava.

Izjavljujem također, kako nijedan dio rada nije iskorišten za bilo koji drugi rad u bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili obrazovnoj ustanovi.

Svojim potpisom potvrđujem i dajem suglasnost za javnu objavu završnog rada pod naslovom **Mogućnosti primjene modela drugog reda za modeliranje cestovne mreže** na internetskim stranicama i repozitoriju Fakulteta prometnih znanosti, Digitalnom akademskom repozitoriju (DAR) pri Nacionalnoj i sveučilišnoj knjižnici u Zagrebu.

Student/ica:

U Zagrebu, 2.9.2015 Krešimir Kušić

(potpis)